Univ.-Prof. Dr. Rainer Baule

Modul 32861
Finanzmanagement mit Excel
Leseprobe

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m^2, weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

6.1 Einfaktormodelle

6.1.1 Allgemeine Konzeption

Ziel: Empirische Beziehungen zwischen Renditen

Indexmodelle, allgemeiner Faktormodelle, stellen Zusammenhänge zwischen den Renditen einzelner Wertpapiere eines Marktes oder Teilmarktes auf. Die einfachste Variante ist ein Einfaktor-Indexmodell. In einem solchen Modell wird die Rendite einer Aktie r_i erklärt durch die Rendite eines Index r_I:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i \, r_I + \epsilon_i, \tag{6.1}$$

wobei wir hier aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst auf den Zeitindex verzichten.

Das Indexmodell (6.1) stellt einen Zusammenhang zwischen den Renditen einer Aktie und den Renditen eines Index auf. Der Hintergrund ist dabei, dass sich Aktien häufig im Gleichklang bewegen und ein Teil der Bewegung einer Einzelaktie durch die Bewegung eines Index erklärt werden kann. An die Wahl des Index sind dabei keine globalen Anforderungen gestellt. Um einen hohen Erklärungsgehalt zu erzielen, ist es sinnvoll, einen Index zu verwenden, der repräsentativ für die jeweilige Aktie ist – für große deutsche Aktien mag das der DAX sein, für mittelgroße eher der MDAX.

Aufspaltung der Varianz

Anhand Gleichung (6.1) kann die Varianz der Aktienrendite aufgespalten werden in einen indexgetriebenen und einen idiosynkratischen Anteil, wenn unterstellt wird, dass die beiden Renditebestandteile unkorreliert sind:

$$\mathrm{Cov}(r_I, \epsilon_i) = 0; \tag{6.2}$$

$$\mathrm{Var}(r_i) = \beta_i^2 \, \mathrm{Var}(r_I) + \mathrm{Var}(\epsilon_i). \tag{6.3}$$

In Anlehnung an das CAPM wird der indexgetriebene Anteil häufig auch systematisch, der individuelle unsystematisch genannt. Man muss sich dabei vor Augen halten, dass sich „systematisch" hier explizit auf den gewählten Index und nicht auf den Markt im Sinne des CAPM bezieht.

Schätzung des Beta-Faktors empirisch gut möglich

Abbildung 6.1 stellt die täglichen Überrenditen des Marktes und der Siemens-Aktie für das Jahr 2015 grafisch dar. Man erkennt einen ausgeprägten positiven Zusammenhang. Die Regressionsgerade weist eine Steigung von 0,9 auf – diese entspricht dem Beta-Faktor der Siemens-Aktie, $\beta_{SIE} = 0{,}9$.

Beispielrechnung

Die Standardabweichung der täglichen Siemens-Renditen liegt hier bei 1,53 %, die des DAX bei 1,49 %. Skaliert auf eine Periode von einem Jahr (hier 253

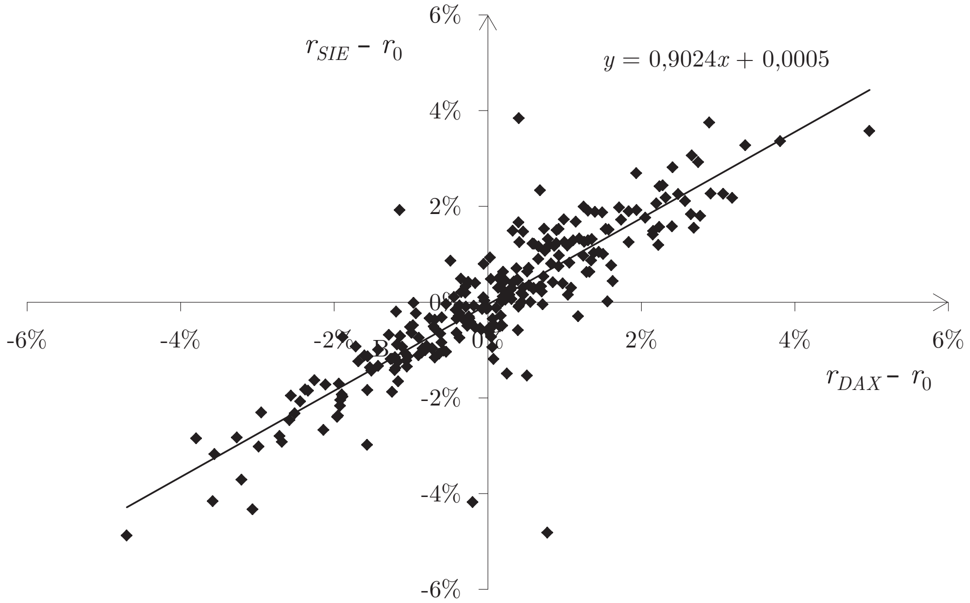

Abbildung 6.1. *Tagesrenditen vom DAX und der Siemens-Aktie im Jahr 2015. Die Regressionsgerade liefert einen Beta-Koeffizienten von 0,9.*

Handelstagen) mit dem Faktor $\sqrt{253}$ erhalten wir $\mathrm{Var}(r_{SIE}) = 0{,}244^2$ sowie $\mathrm{Var}(r_{DAX}) = 0{,}236^2$. Der Betafaktor beträgt 0,9. Damit haben wir

$$0{,}244^2 = 0{,}9^2 \cdot 0{,}236^2 + \mathrm{Var}(\epsilon_{SIE}),$$

also

$$0{,}0594 = 0{,}0452 + 0{,}0142.$$

Die Gesamtvarianz der Siemens-Aktie in Höhe von 0,0594 wird zu etwa 76 % (0,0452) durch die Varianz des DAX erklärt, der idiosynkratische Anteil beträgt 24 %.

Reduktion der Datenanforderungen

Indexmodelle werden häufig im Rahmen der Portfoliooptimierung verwendet, da mit ihnen die Datenanforderungen massiv reduziert werden können. Zur Portfoliooptimierung nach Markowitz im n-Wertpapier-Fall (siehe Lehreinheit 5) benötigt man die vollständige Korrelations- bzw. Kovarianzmatrix mit n Varianzen und $n \cdot (n-1)/2$ Kovarianzen. Nimmt man als Anlageuniversum die 30 Aktien des DAX, so sind dies insgesamt 465 Daten. Im Einfaktormodell benötigt man lediglich $n+1$ Varianzen (die der Aktien sowie die des Index) und n Betafaktoren – im Beispiel also 61 Daten. In der Praxis sind die Anlageuniversen noch deutlich größer, was eine Reduktion der Datenanforderungen um so notwendiger macht.[1]

[1] Bei $n = 1.000$ reduziert sich der Umfang von 500.500 auf 2.001 Daten.

Vereinfachende Annahmen

Allerdings wird diese Reduktion des Datenvolumens erkauft durch eine vereinfachende Annahme, die man an das Verhalten der Aktienkurse bzw. -renditen stellen muss: Es wird unterstellt, dass die idiosynkratischen Komponenten untereinander unabhängig sind, dass also

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \quad \forall i,j \tag{6.4}$$

gilt. Dies stellt eine nicht unerhebliche Einschränkung an das Verhalten der Aktienkurse dar. Die Bedingung besagt, dass es jenseits des Index keine gemeinsamen Faktoren gibt, von denen zwei verschiedene Aktienrenditen abhängen. In der Realität werden insbesondere branchen- oder regionenspezifische Faktoren eine Rolle spielen. Solche Faktoren sind im Einfaktor-Indexmodell nicht vorgesehen.

Unter dieser Annahme lässt sich die Kovarianzmatrix berechnen. Für zwei Aktien i und j gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(r_i, r_j) &= \mathrm{Cov}(\alpha_i + \beta_i\, r_I + \epsilon_i, \alpha_j + \beta_j\, r_I + \epsilon_j)\\ &= \beta_i\, \beta_j \mathrm{Var}(r_I) + \beta_i\, \mathrm{Cov}(r_I, \epsilon_j) + \beta_j\, \mathrm{Cov}(\epsilon_i, r_I) + \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j)\\ &= \beta_i\, \beta_j \mathrm{Var}(r_I), \end{aligned} \tag{6.5}$$

da alle Kovarianzen in der zweiten Zeile annahmegemäß null sind.

Für ein beliebiges Portfolio P mit Gewichten $w_1, \ldots, w_n$ ergibt sich die Rendite

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i\, \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, \beta_i\right) r_I + \sum_{i=1}^{n} w_i\, \epsilon_i. \tag{6.6}$$

Die Varianz beträgt

$$\mathrm{Var}(r_P) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, \beta_i\right)^2 \mathrm{Var}(r_I) + \sum_{i=1}^{n} w_i^2\, \mathrm{Var}(\epsilon_i) \tag{6.7}$$

und ist auch wesentlich leichter zu berechnen als mit der Varianzformel (5.22), da keine Doppelsumme vorkommt.

6.1.2 Parameterschätzung im Einfaktormodell

Da wir im Weiteren einige Annahmen über die zeitabhängigen Bestandteile des Einfaktor-Indexmodells treffen wollen, fügen wir dem Faktormodell gemäß (6.1) nun einen Zeitindex hinzu:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i\, r_{I,t} + \epsilon_{i,t}. \tag{6.8}$$

Wir unterstellen, dass Beobachtungen der Renditen r_i und r_I über n Zeitpunkte $t = 1, \ldots, n$ vorliegen. Das Modell repräsentiert einen Spezialfall eines **einfachen linearen Regressionsmodells**. Hierbei wird angenommen, dass die idiosynkratischen Komponenten $\epsilon_{i,t}$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

Annahmen über die Residuen

$$E(\epsilon_{i,t}) = 0 \text{ und } Var(\epsilon_{i,t}) = \sigma^2 \ \forall t. \tag{6.9}$$

Zur Konstruktion von Konfidenzintervallen und Teststatistiken wird überdies unterstellt, dass die idiosynkratischen Komponenten normalverteilt sind, also

$$\epsilon_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{6.10}$$

In diesem Fall sind auch die Aktienrenditen $r_{i,t}$ normalverteilt mit

$$E(r_{i,t}) = \alpha_i + \beta_i r_{I,t}; \qquad \text{Var}(r_{i,t}) = \sigma^2, \tag{6.11}$$

wobei die Aktienrenditen $r_{i,t}$ bedingt (auf eine Ausprägung des Faktors) unabhängig sind. Im Zuge der linearen Regression werden die Modellparameter α_i und β_i nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Hierbei werden die Schätzer $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}_i$ in der Form bestimmt, dass die Summe der quadratischen Abweichungen

Kleinste-Quadrate-Schätzer

$$\sum_t \hat{\epsilon}_{i,t}^2 = \sum_t (r_{i,t} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i r_{I,t})^2 \tag{6.12}$$

bei gegebenen Daten $(r_{i,t}, r_{I,t})$ minimiert wird.[2] Anhand der Schätzer $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}_i$ erhält man die geschätzten Aktienkursrenditen:

$$\hat{r}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \, r_{I,t}. \tag{6.13}$$

Geschätzte Aktienkursrendite

Der Schätzer für die Aktienkursrenditen repräsentiert die Schätzung für den bedingten Erwartungswert der Aktienkursrenditen bei gegebenen Realisationen der Indexrenditen, $r_{I,t}$, und kann damit zur Prognose von $r_{i,t}$ verwendet werden. Hat man das lineare Regressionsmodell ausgehend von den Realisationen $(r_{i,t}, r_{I,t})$ spezifiziert, so stellt sich die Frage nach der Anpassungsgüte des Modells. Naiv könnte man versucht sein, über die Summe der quadrierten Störterme auf die Anpassungsgüte des Modells zu schließen. Dies birgt jedoch zwei Kernprobleme: Zum einen besitzt die Quadratsumme der Residuen keine absolute obere Schranke, zum anderen ist sie maßstabsabhängig. Damit ist die Quadratsumme der Störterme kein geeignetes Maß zur Quantifizierung der Anpassungsgüte. Stattdessen beruft man sich auf das so genannte **Bestimmtheitsmaß** (R^2), um zu ermitteln, wie gut das Regressionsmodell die Variabilität in den zugrunde liegenden Daten erklärt. Das R^2 ist in der

Anpassungsgüte des Regressionsmodells

[2] Vgl. hierzu z. B. Fahrmeir, Kneib und Lang (2009), S. 90 ff.

vorliegenden Situation definiert durch

$$R^2 = \frac{\sum_t (\hat{r}_{i,t} - \bar{r}_i)^2}{\sum_t (r_{i,t} - \bar{r}_i)^2} = 1 - \frac{\sum_t (r_{i,t} - \hat{r}_i)^2}{\sum_t (r_{i,t} - \bar{r}_i)^2}, \tag{6.14}$$

wobei $\bar{r}_i$ die mittlere Rendite über den Beobachtungszeitraum bezeichnet. Das heißt, das Bestimmtheitsmaß wird gegeben durch den Anteil der durch die Regression erklärten Quadratsumme an der zu erklärenden Quadratsumme. Naturgemäß nimmt R^2 Werte aus dem Intervall [0,1] an. Allgemein gilt: Je höher der Wert für das Bestimmtheitsmaß, desto höher die Anpassungsgüte des Modells an die Daten. Für $R^2 = 1$ liegt ein perfektes Modell vor, für $R^2 = 0$ liefert das lineare Regressionsmodell keinerlei Erklärungsgehalt.

Da R^2 üblicherweise anhand von Stichproben einer Grundgesamtheit ermittelt wird, ist in diesem Fall zu hinterfragen, ob der für das Bestimmtheitsmaß ermittelte Wert 'valide' ist. Anhand eines F-Tests lässt sich R^2 auf statistische Signifikanz testen. Hierbei testet man die Hypothese, dass kein linearer Zusammenhang zwischen r_i und r_I besteht, das heißt, die Hypothese $R^2 = 0$. Für $(n-2)$ Freiheitsgrade ist die Teststatistik des F-Tests definiert als:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (n-2). \tag{6.15}$$

Überschreitet der ermittelte F-Wert den zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau zugehörigen kritischen F-Wert, so ist die Hypothese $R^2 = 0$ auf diesem Niveau zu verwerfen. Im obigen Beispiel nimmt das R^2 einen Wert von 0,762 an; bei $n = 252$ Beobachtungen folgt

$$F = \frac{0{,}7616}{1 - 0{,}7616} \cdot 250 = 799. \tag{6.16}$$

Bei 250 Freiheitsgraden muss der F-Wert auf dem Signifikanzniveau von 99 % (bzw. 95 %) die kritische Größe $F = 6{,}74$ (bzw. $F = 3{,}88$) überschreiten, damit die Hypothese $R^2 = 0$ verworfen werden kann. Bei F-Werten, die kleiner sind, kann diese Hypothese nicht mit ausreichender Sicherheit verworfen werden. Da der F-Wert im vorliegenden Beispiel die kritischen Niveaus deutlich überschreitet, kann davon ausgegangen werden, dass zwischen den Renditen r_i der Aktie und r_I des Index ein signifikanter Zusammenhang besteht.

Neben dem Bestimmtheitsmaß dienen üblicherweise der Standardfehler der Schätzung sowie die Standardfehler beziehungsweise Signifikanztests der Regressionskoeffizienten, α_i und β_i, zur Überprüfung der Verlässlichkeit des Modells. Der **Standardfehler der Schätzung** gibt Auskunft über die Streuung der Residuen:

Standardfehler als Streuungsmaß

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_t \hat{\epsilon}_{i,t}^2}{n-2}}. \tag{6.17}$$

Der **Standardfehler** von $\hat{\beta}_i$ bestimmt sich indes zu:

$$se(\hat{\beta}_i) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_i)} = MSE \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_t (r_{I,t} - \bar{r}_I)^2}}, \tag{6.18}$$

wobei der **Standardfehler** von $\hat{\alpha}_i$ definiert ist als:

$$se(\hat{\alpha}_i) = \sqrt{Var(\hat{\alpha}_i)} = MSE \cdot \frac{\sqrt{\sum_t r_{I,t}^2}}{\sqrt{n \sum_t (r_{I,t} - \bar{r}_I)^2}}. \tag{6.19}$$

Die Standardfehler der Regressionskoeffizienten geben einen ersten Anhalt zur Streuung der Koeffizienten, das heißt, sie quantifizieren die Bandbreite der erwarteten Werte, die man bei einer Schätzung der Koeffizienten auf Basis einer anderen Stichprobe annehmen würde.

Statistische Signifikanz der Regressionskoeffizienten

Unterzieht man die Regressionskoeffizienten einem Signifikanztest, so zielt dies auf die Frage ab, mit welcher Berechtigung sich die Null-Hypothese, $\alpha_i = 0$ beziehungsweise $\beta_i = 0$, verwerfen lässt. Wäre beispielsweise der Regressionskoeffizient $\beta_i = 0$, so bestünde kein linearer Zusammenhang zwischen r_i und r_I. Beim **t-Test** wird der Schätzer des Regressionskoeffizienten in Beziehung zu seinem Standardfehler gesetzt:

$$t_{n-2}(\hat{\beta}_i) = \frac{\hat{\beta}_i}{se(\hat{\beta}_i)},\ t_{n-2}(\hat{\alpha}_i) = \frac{\hat{\alpha}_i}{se(\hat{\alpha}_i)}. \tag{6.20}$$

Überschreiten diese t-Werte die kritischen Werte auf einem vorgegebenen Signifikanzniveau, so bezeichnet man die Schätzer auf diesem Niveau als statistisch signifikant. Im obigen Beispiel gilt:

$$t_{n-2}(\hat{\beta}_i) = 28{,}3,\ t_{n-2}(\hat{\alpha}_i) = -1{,}04. \tag{6.21}$$

Ein Vergleich mit den kritischen Werten der t-Verteilung zeigt, dass $\hat{\beta}_i$ auf sehr hohem Niveau (weit über 99,99 %) statistisch signifikant ist, während $\hat{\alpha}_i$ selbst auf einem Niveau von 90 % nicht als statistisch signifikant eingestuft wird.

Anhand der t-Werte lassen sich ebenso **Konfidenzintervalle** für die Schätzer der Regressionskoeffizienten angeben: Für ein Quantil q ergibt sich das $(1-q)$-Konfidenzintervall für β_i gemäß:

$$[\hat{\beta}_i - t_{n-2,1-q/2} \cdot se(\hat{\beta}_i), \hat{\beta}_i + t_{n-2,1-q/2} \cdot se(\hat{\beta}_i)]. \tag{6.22}$$

In analoger Weise lässt sich ein Konfidenzintervall für α_i angeben. Eine Beispielrechnung betrachten wir im Lehrvideo.