Univ.-Prof. Dr. Robert Schmidt

31961
Spieltheorie
Leseprobe

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Univ.-Prof. Dr. Robert Schmidt

31961
Spieltheorie

Einheit 1
Grundkonzepte und statische Spiele

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Grundkonzepte und erste Schritte

Die Spieltheorie ist die mikroökonomische Theorie des Verhaltens rationaler Akteure, die miteinander *interagieren*. Die Akteure sind dabei *rational*, d.h. sie handeln zielorientiert und treffen bewusste, nutzenmaximierende Entscheidungen. Als Beispiele für solche interaktiven Entscheidungen können Auktionen, Verhandlungen, Preiswettbewerb in Märkten, Schach, Poker etc. genannt werden. Auch internationale Klimaverhandlungen oder die Höhe von Steuersätzen (Stichwort: "Steuerwettbewerb" – engl. "tax competition") enthalten strategische Aspekte, und werden z.T. mit Hilfe von spieltheoretischen Methoden analysiert. In dem Falle sind nicht einzelne Personen, sondern Staaten die "Spieler". Allerdings sollte erwähnt werden, dass der "Nutzen" (also die Zielgröße des jeweiligen Spielers) alle möglichen Aspekte beinhalten kann, die weit hinausgehen über das pure Maximieren von (bspw.) Geld. Zu nennen wären u.a. Aspekte wie Einfluss, aber auch Gewissen oder Liebe. Die Spieltheorie bietet hierbei eine formale Beschreibung von Spielen und Konzepte zu deren Lösung.

Die Spieltheorie findet dadurch vielseitige Verwendung. Sie ist zunächst einmal, als Theorie des rationalen interaktiven Handelns, ein fundamentaler Bestandteil der ökonomischen Theorie. Sie findet aber auch Anwendung in Fächern wie z.B. Biologie. Darüber hinaus hat die Spieltheorie aber auch Einfluss auf die Gestaltung von wirtschaftlichen Institutionen genommen. Basierend auf der spieltheoretischen Analyse von Auktionen haben einige Staaten zu Beginn der 2000er Jahre ihre Versteigerungen von Telekommunikationsspektren gestaltet.

Im Unterschied zur Entscheidungstheorie, welches die (rationale) Entscheidung eines Individuums in einer Situation analysiert, ist das Neue der Spieltheorie, dass die Auszahlungen, d.h., das Ergebnis, auch von den Entscheidungen *anderer* Spieler abhängen. Ein "einfaches" Entscheidungsproblem wäre z.B. die Entscheidung einer Wanderin für "links" oder "rechts" an einer Weggabelung in unbekanntem Terrain (ein anderes Beispiel ist die Auswahl einer sichereren Geldanlage mit geringerer Gewinnerwartung vs. einer riskanteren Anlage mit höheren Gewinnchancen, aber auch Verlustrisiken). Aus dem Entscheidungsproblem der Wanderin wird erst dann ein "Spiel", wenn sie versucht, die Route zu wählen die eine andere Person ebenfalls wählt (von der anderen Seite kommend), und die beiden versuchen sich in der Mitte zu treffen, aber nicht kommunizieren können. Dabei handelt es sich um ein sog. Koordinationsspiel. (Dazu weiter unten mehr.)

Zur Verdeutlichung einer einfachen Spielsituation betrachten wir das *Bi-Matrix* Spiel in Tabelle 1.1. So einer Matrix werden wir noch öfter begegnen, da sie die Standarddarstellung für ein 2-Spieler Spiel ist, unter der Zusatzannahme, dass jeder Spieler genau eine von zwei Alternativen auswählen muss. Die gewählte Alternative von Spieler i bezeichnen wir als Aktion oder auch "Strategie" (den Unterschied zwischen Aktionen und Strategien erklären wir später). Die möglichen Strategien (*Strategieraum*) von Spieler 1 finden wir in der ersten Spalte der Tabelle: $\{O; U\}$. Den Strategieraum von Spieler 2 finden wir in der ersten Zeile: $\{L; R\}$.[1]

Die Frage ist wie sich Spieler 1 in diesem Spiel entscheiden würde? Wählt er zum Beispiel O(ben), beträgt seine Auszahlung 100 oder 5. Dies ist abhängig davon, wie Spieler 2 sich entscheidet. Hat Spieler 2 zum Beispiel L(inks) gewählt, dann beträgt die Auszahlung von Spieler 1: 100 (Einheiten). Wählt Spieler 1 U(nten), beträgt seine Auszahlung 2 oder 7, wieder abhängig davon, wie sich Spieler 2 entschieden hat. Beachte: beide Spieler fällen ihre Entscheidungen simultan, und können ihre gewählte Entscheidung daher nicht von der Entscheidung der jeweils anderen Person abhängig machen. Sie können lediglich Erwartungen bilden über diese Entscheidung. Diese Erwartungen sind wiederum Teil des Gleichgewichtskonzepts (s.u.).

Spieler 2

Spieler 1		L	R
	O	100;	5;
	U	2;	7;

Tabelle 1.1: Eine Bi-Matrix

Obwohl also Strategie O aus Sicht von Spieler 1 scheinbar attraktiv ist, ist dies abhängig von der Entscheidung von Spieler 2. Genauer gesagt: von den Erwartungen, die Spieler 1 hat im Hinblick auf die Entscheidung (Strategie) von Spieler 2. Da die Spieltheorie eine Theorie rationalen Handelns ist, ziehen wir das Kriterium der Rationalität zur Hilfe: Was also ist eine rationale Erwartung für das Verhalten von Spieler 2? Um dies zu beantworten, benötigen wir mehr Information, nämlich zu den Auszahlungen von Spieler 2. Diese Information wird in Tabelle 1.2 geliefert. Spieler 2 erhält eine Auszahlung von

[1] Mengen werden durch geschweifte Klammern gekennzeichnet. Das engl. Wort für Menge ist "set", z.B.: "the set of real numbers" (die Menge der reellen Zahlen). Eine reelle Zahl x erfüllt somit: $x \in \mathbb{R}$. Wenn M' eine Teilmenge der Menge M ist, so schreiben wir: $M' \subseteq M$.

1 für die Strategie L und eine Auszahlung von 2 für die Strategie R, jeweils unabhängig davon wie Spieler 1 sich entscheidet. Spieler 2 wählt also R. Spieler 1 wählt daraufhin U. Diese Wahl führt zu dem für Spieler 1 suboptimalen Ergebnis (7,2). Dennoch ist es die beste Wahl unter Berücksichtigung des Entscheidungskalküls von Spieler 2. Dies nennen wir *strategisches Verhalten.*

Spieler 2

Spieler 1		*L*	*R*
	O	100;1	5;2
	U	2;1	7;2

Tabelle 1.2: Bi-Matrix-Spiel

Dabei ist Altruismus von Spieler 2 gegenüber Spieler 1 nicht ausgeschlossen. Wenn Spieler 2 dem Spieler oder der Spielerin 1 die höhere Auszahlung von 100 ermöglichen möchte, und dafür bereit wäre, eigene Gewinne (z.B. eine monetäre Auszahlung) aufzugeben, so würde sich dies jedoch direkt in den "Auszahlungen", die in der Bi-Matrix enthalten sind, wiederspiegeln. Bei diesen handelt es sich nämlich nicht (oder nicht notwendiger Weise) um monetäre Auszahlungen (in Geldeinheiten bemessen), sondern sie spiegeln auch andere Aspekte wie z.B. Altruismus oder Neid wieder, die für die Entscheidung eines Spielers relevant sind.

Wären die Auszahlungen hingegen wie in folgender Tabelle, würde Spieler 1 die Strategie O wählen und Spieler 2 L. Diese Wahl führt zu dem für Spieler 1 gewünschten Ergebnis von (100,2). Die Präferenzen beider Spieler sind hier also sozusagen korreliert:

Spieler 2

Spieler 1		*L*	*R*
	O	100;2	5;1
	U	2;2	7;1

Übungsaufgabe: ein Koordinationsspiel mit Interessenskonflikt (auch "Kampf der Geschlechter" – engl. "battle of the sexes" genannt)

Zwei Personen möchten gemeinsam ausgehen. Spieler 1 ("er") möchte lieber ein Fußballspiel besuchen, wohingegen Spielerin 2 ("sie") einen Konzertbesuch bevorzugen würde. Wenn die beiden Spieler es schaffen, sich zu koordinieren und dieselbe Veranstaltung besuchen, erhält jeder Spieler einen Nutzen (eine Auszahlung) von 1. Handelt es sich bei der Veranstaltung zudem um das Konzert, so erhält Spielerin 2 zusätzlich einen Nutzen von 3 (Nutzeneinheiten); handelt es sich dabei hingegen um das Fußballspiel, so erhält Spieler 1 einen Zusatznutzen in Höhe von 2, aber Spieler 2 keinen Zusatznutzen. Wenn die beiden

Spieler unterschiedliche Veranstaltungen besuchen, so beträgt der Nutzen beider Spieler jeweils 0. Vervollständigen Sie die Bi-Matrix, die zu dem Spiel gehört (Tabelle 1.3).

	Spieler 2 (sie)		
		Fußball	
Spieler 1 (er)		3;1	;
		;	;

Tabelle 1.3: "battle of the sexes"

Wir werden an späterer Stelle zu dem Koordinationsspiel zurückkehren. Dann können Sie auch überprüfen, ob Ihre Einträge in Tabelle 1.3 korrekt sind.

Wir werden nun einige Aspekte, die in den obigen Beispielen bereits anklangen, etwas verallgemeinern. Was ist allgemein gesagt ein "Spiel"?: eine Situation in der strategische Interaktion eine wichtige Rolle spielt. Ein sauber definiertes Spiel beinhaltet zunächst die Spieler: $i = 1, ..., n$. (In einem Bi-Matrix-Spiel gilt $n = 2$). Darüber hinaus müssen alle möglichen Aktionen $a_{i,t}$ spezifiziert werden. Dabei ist $a_{i,t}$ die Aktion von Spieler i in Stufe t des Spiels. (In einem Bi-Matrix-Spiel gibt es nur eine einzige Spielstufe, in der beide Spieler simultan ihre jeweilige Aktion wählen.) Zu einem Spiel gehören weiterhin die Strategien der Spieler: s_i. Dabei ist s_i der Aktions*plan* – welche Aktion Spieler i in jeder Stufe des Spiels wählt, gegeben alle Informationen die der Spieler über den bisherigen Verlauf des Spiels hat. Und zu einem Spiel gehören letztlich die Auszahlungen: $u_i(s_1, ..., s_n)$. Diese hängen von den Aktionen ab, welche die Spieler in den verschiedenen Spielstufen wählen.

Wir nehmen an, dass jeder Spieler sich stets an seine Strategie hält, da diese einen vollständigen Handlungsplan enthält, für jede mögliche Situation, die im Spiel theoretisch oder tatsächlich eintreten könnte, gegeben die Spielstufen und Aktionsmöglichkeiten der Spieler (in jeder Spielstufe). Somit hängen die Aktionen, welche die Spieler am Ende tatsächlich wählen, wiederum nur von den Strategien der Spieler (allerdings den Strategien *aller* Spieler) ab. Dies gestattet es uns, die Auszahlungen direkt als Funktionen der Strategien der Spieler (anstatt der Aktionen) zu betrachten. (In einem Bi-Matrix-Spiel ist die Aktion von Spielerin i mit ihrer Strategie identisch, da jede Spielerin nur einen einzigen Spielzug hat, und die Aktionen zudem simultan implementiert werden. Demnach kann Spielerin j nicht auf die Aktion von Spielerin i reagieren. In einem dynamischen Spiel wäre das hingegen möglich.) Ferner bezeichnen wir eine Menge s an Strategien, die jedem Spieler i eine bestimmte Strategie s_i zuordnet, als Strategienprofil: $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$.

Das zentrale Gleichgewichtskonzept, das wir verwenden, um Aussagen über den plausiblen (zu erwartenden) Spielausgang zu treffen, bei rationalen Entscheidngsträgern, ist

Kapitel 2

Statische Spiele - Teil I: reine Strategien

2.1 Definition

Nachdem wir uns mit den entscheidungstheoretischen Grundlagen vertraut gemacht haben, beginnen wir hier mit der einfachsten Klasse von Spielen: den statischen Spielen mit vollständiger Information. Im Einführungskapitel haben wir dafür schon einige Beispiele gesehen. Die Spielregeln sind wie folgt:

- Spieler wählen ihre Handlungen gleichzeitig (simultan) und die Auszahlungen erfolgen sofort.
- Spieler haben vollständige Information, d.h. sie kennen (a) die Auszahlungsfunktionen und (b) Wahlmöglichkeiten aller Spieler.
- All dies ist zudem allgemein bekannt (engl.: "common knowledge"): Jeder Spieler weiß, dass jeder andere Spieler vollständig informiert ist, und er weiß auch, dass jeder andere Spieler ebenfalls dasselbe von ihm und jedem anderen Spieler denkt, etc. ad infinitum.

Man nennt diese Darstellung eines Spiels auch die strategische Form. Statische Spiele in strategischer Form werden üblicherweise in der sogenannten *Normalform* dargestellt.

Definition: Die Normalform ist eine Spielbeschreibung. Sie enhält drei Elemente:

1.) Eine Menge von Spielern: $i \in I = \{1, ..., i, ..., n\}$,

2.) Für jeden Spieler eine Strategiemenge $S_i = \{s_{i1}, ..., s_{is}\}$,

3.) Für jeden Spieler eine Auszahlungsfunktion: $u_i(s_1, s_2, ..., s_n)$, wobei s_i die gewählte Strategie von Spieler i ist. Oder kurz: $u_i(s)$, wobei s die Strategiekombination aller Spieler ist, also $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$.

In Kurzform, ein Normalform-Spiel ist gegeben durch $G = (S_i, u_i(\cdot))_{i=1}^n$, wobei (a) die Beschreibung vollständig sein muss und (b) die Auszahlungen von Neumann - Morgenstern - Nutzen (vNM) sind. Was dies genau bedeutet, erklären wir erst in einem späteren Kapitel. Intuitiv gesagt bedeutet es, dass es sich um zugrunde liegende Präferenzen handelt, die solcher Art sind, dass bei Unsicherheit allein der Erwartungsnutzen für die rationale Entscheidung eines Spielers ausschlaggebend ist. Ohne Unsicherheit sind vNM-Nutzenfunktionen einfach gewöhnliche Nutzenfunktionen ohne weitere Einschränkungen.

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst ein Normalform-Spiel mit *zwei* Spielern und endlicher Strategie-Menge. Formal:

$$G = \big((\{A, B, C\}, u_1(\cdot)) \ , \ (\{X, Y\}, u_2(\cdot))\big) \tag{2.1}$$

Dieses Spiel kann man mit in einer Bi-Matrix abbilden, so wie sie in Tabelle 2.1 dargestellt ist.

		Spieler 2	
		X	Y
Spieler 1	A	$(u_1(A, X)\ ;\ u_2(A, X))$	$(u_1(A, Y)\ ;\ u_2(A, Y))$
	B	$(u_1(B, X)\ ;\ u_2(B, X))$	$(u_1(B, Y)\ ;\ u_2(B, Y))$
	C	$(u_1(C, X)\ ;\ u_2(C, X))$	$(u_1(C, Y)\ ;\ u_2(C, Y))$

Tabelle 2.1: Bi-matrix Spiel

Übungsaufgabe: Chicken Game

Das folgende Spiel ist unter dem Namen "Chicken Game" bekannt. In einer Gang aus Halbstarken streiten sich zwei um die Anführerschaft. Die Gang einigt sich auf folgendes Verfahren. Beide müssen in ihren Autos direkt aufeinander zurasen. Weicht einer aus, und der andere nicht, wird derjenige, der nicht ausweicht, zum Anführer ernannt und erzielt dadurch einen Nutzen von 2. Der andere wird als Weichei verspottet und erzielt einen Nutzen von 0. Weichen beide aus, ist die Schmach begrenzt, und beide erhalten einen Nutzen von 2. Weichen beide nicht aus, erhalten beide einen Nutzen von -3. Beschreiben Sie das Spiel in Normalform und als Bi-Matrix!

Lösung:

Spiel in **Bimatrix-Form**:

	ausweichen	nicht ausweichen
ausweichen	2, 2	0, 2
nicht ausweichen	2, 0	-3, -3

Kapitel 5

Anwendungen

5.1 Cournot-Oligopol

Wir haben das Cournot-Duopol bereits im Einführungskapitel, sowie in Kapitel 2 kennengelernt. Da dieses Spiel in Anwendungen der mikroökonomischen Theorie (insbes. im industrieökonomischen Bereich) von besonderer Bedeutung ist, wollen wir hier nochmal zu dem Spiel zurückkehren, und es uns noch etwas genauer anschauen.

Gehen wir zunächst vom Fall mit n Firmen aus. Der Gewinn von Firma i ist gegeben durch:

$$\pi_i = P(Q)q_i - C_i(q_i).$$

Hierbei ist $C_i(\cdot)$ die Kostenfunktion von Firma i (im asymmetrischen Cournot-Oligopol können die Kostenfunktionen verschiedener Firmen unterschiedlich sein, daher der Index für die Firma i bei der Funktion C_i). $P(Q)$ ist die inverse Marktnachfrage-Funktion nach dem (hier als homogen angenommenen) Gut. Die Idee ist, dass jede Firma so viel produziert, wie sie möchte. Anschließend werden alle Güter zum Markt geschafft, wo ein (hypothetischer) Auktionator (auch Walras-Auktionator genannt) den Preis so einstellt, dass der Markt gerade geräumt wird, also keine Mengen übrig bleiben (kein Überschussangebot), und alle Konsumenten so viel von dem Produkt bekommen, wie sie zu dem Preis bereit sind, zu kaufen (also auch keine Überschussnachfrage). Ein solcher Auktionator existiert nur in den wenigsten Märkten, weswegen das Modell etwas artifiziell wirken kann. Man kann aber zeigen, dass das Cournot-Modell als solches als vereinfachte Dartellung eines komplexeren Modells betrachtet werden kann, in dem Firmen zunächst ihre Produktionskapazitäten wählen, und anschließend ihre Preise selber festlegen.[1]

Um das Cournot-Nash-Gleichgewicht auszurechnen, schreiben wir den Gewinn von

[1] Dies wird auch als Bertrand-Edgeworth-Wettbewerb bezeichnet. Eine formale Betrachtung dieser Art von Wettbewerb liegt außerhalb dieses Moduls. Wir begnügen uns mit der ursprünglichen Interpretation des Cournot-Modells, mit einem Auktionator, der den Marktpreis festlegt.

Firma i zunächst wie folgt um:

$$\pi_i(q_i, Q_{-i}) = P(q_i + Q_{-i})q_i - C_i(q_i),$$

wobei Q_{-i} die Gesamtangebotsmenge aller anderen Firmen (außer Firma i) ist. Dieser Schritt ist wichtig, weil Firma i ihren Einfluss auf den Marktpreis (durch ihre Wahl von q_i) antizipiert! Sie hat daher einen Anreiz, keine allzu große Menge auf den Markt zu werfen, weil dies den Marktpreis nach unten drücken würde. Dieser strategische Effekt ist es, welcher Cournot-Wettbewerb von sog. "vollständigem Wettbewerb" unterscheidet (s.u.). Bilden wir nun die Bedingung erster Ordnung:

$$0 = \frac{\partial \pi_i(q_i, Q_{-i})}{\partial q_i} = P(q_i + Q_{-i}) + P'(q_i + Q_{-i})q_i - C_i'(q_i).$$

Nach dem Ableiten können wir die Bedingung etwas vereinfachen, in dem wir statt q_i+Q_{-i} wieder Q schreiben:

$$P(Q) + P'(Q)q_i = C_i'(q_i).$$

In Worten: Firma i wählt ihre Produktionsmenge q_i so, dass ihre Grenzkosten $C_i'(q_i)$ dem Grenzerlös entsprechen. Eine noch höhere Menge würde zu zusätzlichen Produktionskosten oberhalb der zusätzlichen Erlöse führen, und den Gewinn daher schmälern! Der Grenzerlös ist der Preis, $P(Q)$ (weil eine zusätzliche Einheit zu diesem Preis verkauft wird und daher diesen Zusatzerlös bringt), plus $P'(Q)q_i$. Letzterer Term ist aber negativ, weil P eine fallende Funktion ist. Dieser Term spiegelt den marginalen Preisverfall wieder, der durch eine marginale Erhöhung der Output-Menge q_i hervorgerufen wird. Diese B.1.O. impliziert die Reaktionsfunktion $q_i^R(Q_{-i})$ von Firma i (s.u.).

Zum Vergleich: Im *vollständigen Wettbewerb* würde Firma i (nun "Wettbewerbsfirma" genannt) den Gewinn

$$\pi_i(q_i, Q) = P(Q)q_i - C_i(q_i)$$

über q_i maximieren, dabei aber die Gesamtmenge Q, die im Markt angeboten wird, und somit den Marktpreis P hypothetisch als *konstant* annehmen. Intuition: Firma i hat einen so kleinen Marktanteil, dass der Marktpreis durch eine marginale Veränderung von q_i sich nicht spürbar verändert. Die B.1.O. lautet dann:

$$0 = P(Q) - C_i'(q_i),$$

d.h.: $P(Q) = C_i'(q_i)$ (also "Preis = Grenzkosten"). Der einzige Unterschied zum Cournot-Fall ist also, dass der Term $P'(Q)q_i$ hier fehlt. Eine Wettbewerbsfirma betrachtet den Marktpreis als exogen (sog. Preisnehmer-Verhalten)! Dies führt zu höheren Ausbringungsmengen im Gleichgewicht, und daher zu einem geringeren Marktpreis als im Cournot-Fall.

Univ.-Prof. Dr. Robert Schmidt

31961
Spieltheorie

Einheit 2

Dynamische Spiele und Spiele mit unvollständiger Information

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Dynamische Spiele

Im ersten Teil des Moduls haben wir interaktive Entscheidungssituationen betrachtet, in denen die Spieler ihre Entscheidungen gleichzeitig (simultan) getroffen haben. Viele interessante Entscheidungsinteraktionen sind aber dynamischer Natur, d.h. die Entscheidungen werden nacheinander (sequenziell) getroffen. Man denke zum Beispiel an Schach, Verhandlungen, oder den dynamischen Wettbewerb zwischen Unternehmen. Beispiele wie diese werden in der dynamischen Spieltheorie behandelt, die Gegenstand dieses Kapitels ist.

1.1 Definition

Hierzu benötigen wir allerdings eine neue Art der Spielbeschreibung, da wir in dynamischen Spielen nicht nur wissen müssen, was die Strategie eines Spielers oder einer Spielerin beinhält, sondern auch wer wann am Zuge ist.

Die extensive Form. Diese Information ist in der sogenannten *extensiven Form* eines Spiels enthalten, die Folgendes wiedergibt:

1. die Menge der Spielerinnen und Spieler,
2. die genaue Anordnung ihrer Entscheidungen,
3. die Informationen, die die Spieler zu ihren Entscheidungszeitpunkten besitzen,
4. die Wahlmöglichkeiten der Spieler zu jedem Entscheidungszeitpunkt,
5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen über exogene Ereignisse, die Einfluss auf das Spiel haben,
6. die Auszahlungsfunktionen der Spieler.

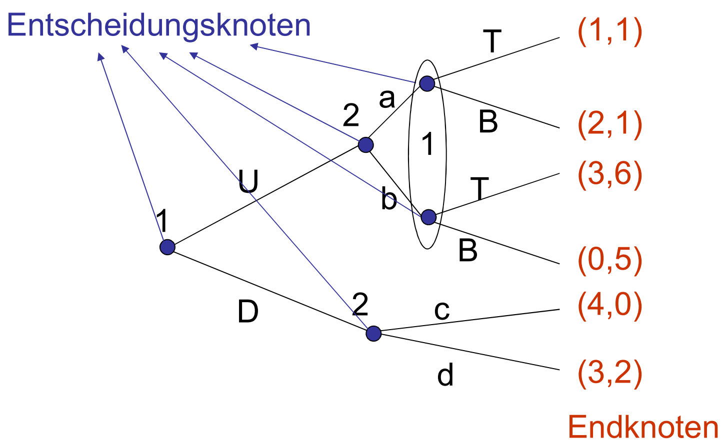

Abbildung 1.1: Ein Spielbaum

Der Spielbaum. Eng verbunden mit der extensiven Form ist der Spielbaum (engl. “game tree”). Er stellt ein dynamisches Spiel grafisch dar und enthält die folgenden Elemente:

1. Entscheidungsknoten, die durch die Nummer des jeweiligen Spielers der gerade am Zug ist, gekennzeichnet sind.
2. Endknoten, die die Auszahlungen der Spieler wiedergeben, wenn sie das Spiel an diesem Endknoten verlassen. Die Auszahlungen sind stets in der Reihenfolge der Spielernummern angeordnet. Die erste Auszahlung gehört somit Spieler 1, die zweite Auszahlung Spieler 2, die dritte Auszahlung Spieler 3 etc.
3. Entscheidungsäste, die die Knoten miteinander verbinden und somit die Reihenfolge der Entscheidungen festlegen sowie den zugehörigen Endknoten zuordnen.
4. Es gibt genau einen Anfangs-Entscheidungsknoten. Jeder andere Entscheidungsknoten hat genau einen Vorgänger, mit dem er durch einen Ast verbunden ist. Außer den Endknoten hat jeder Knoten typischerweise mehrere Nachfolger.
5. Beginnend von dem Anfangsknoten legen die Spieler mit ihren Strategien die Äste fest, entlang denen sich das Spiel entfaltet bis es einen Endknoten erreicht. Dort, und erst dort, werden die Auszahlungen bestimmt.

Das Beispiel eines dynamischen Spiels mit zwei Spielerinnen ist in Abbildung 1.1 zu finden. Spielerin 1 macht den ersten Zug am linken Ende des Spielbaums. Sie hat die Wahl zwischen U und D. Für Spielerin 2 ergeben sich somit zwei Entscheidungsknoten, ein Knoten pro möglicher Wahl von Spielerin 1. Wenn Spielerin 1 sich für D entscheidet, hat Spielerin 2 die Wahl zwischen c und d. Das Spiel ist danach beendet und die Spieler erhalten, abhängig von ihren Entscheidungen, die Auszahlungen $(u_1(D,c), u_2(D,c)) = (4,0)$ oder $(u_1(D,d), u_2(D,d)) = (3,2)$.

Entscheidet sich Spielerin 1 hingegen für U, so hat Spielerin 2 die Wahl zwischen a und b. Das Spiel ist danach jedoch nicht beendet, da Spielerin 1 nun noch die Wahl zwischen T und B hat. Dabei gibt es jedoch eine Besonderheit zu beachten. Spielerin 1 weiß bei ihrer Wahl nicht, wie sich Spielerin 2 in ihrem vorherigen Zug entschieden hat. Sie weiß also nicht, ob sie sich in dem oberen Entscheidungsknoten, ausgehend von dem Ast a, oder in dem mittleren Entscheidungsknoten, ausgehend von dem Ast b, befindet. Dies wird in dem Spielbaum aus Abbildung 1.1 durch die Ellipse um die beiden Entscheidungsknoten von Spielerin 1 dargestellt. Wir sagen, dass die beiden Entscheidungsknoten von Spielerin 1 in derselben *Informationsmenge* liegen.

Informationsmengen. Ganz allgemein kann die fehlende Information eines Spielers über die vorherige Entscheidung eines anderen Spielers in einem dynamischen Spiel mithilfe einer Informationsmenge abgebildet werden.[1] Für Informationsmengen gilt:

1. Jeder Entscheidungsknoten liegt in genau einer Informationsmenge, und eine Informationsmenge enthält nur die Entscheidungsknoten eines einzigen Spielers.

2. Alle Entscheidungsknoten, die in einer Informationsmenge zusammengefasst sind, stellen ein und dieselbe Entscheidungssituation dar. Somit kann sich ein Spieler in allen zugehörigen Entscheidungsknoten auch nicht unterschiedlich verhalten. Anders ausgedrückt: nicht die Entscheidungsknoten, sondern die Informationsmengen bilden die Entscheidungssituationen eines Spielers ab.

3. Wenn jede Informationsmenge des Spiels nur einen einzigen Entscheidungsknoten umfasst, sprechen wir von einem Spiel mit *perfekter Information.* Andernfalls sprechen wir von Spielen mit *imperfekter Information.*

Alle Informationsmengen des Spiels aus Abbildung 1.1 sind in Abbildung 1.2 verdeutlicht. Da der Spielverlauf oder die Historie (engl.: history) des Spiels darüber entscheidet, welche Informationsmenge zu einem gegebenen Zeitpunkt erreicht wird, werden die Informationsmengen in der Abbildung mit h bezeichnet. Die Indizees sind die Spielernummern (erster Index) bzw. die Nummer der jeweiligen Informationsmenge für diese Spielerin (zweiter Index). Die gesamte Historie des Spiels bis zum Ende bestimmt die Auszahlungen, welche die Spieler erreichen (Endknoten). Diese Historie hängt wiederum nur davon ab, welche Strategien die Spieler verfolgen. Somit gilt, dass die Auszahlungen der Spieler letztlich nur von deren Strategien bestimmt werden. Bei zufälligen Elementen

[1] Einer weiteren Anwendung von Informationsmengen werden wir uns in Kapitel 6 in dieser Einheit zuwenden.

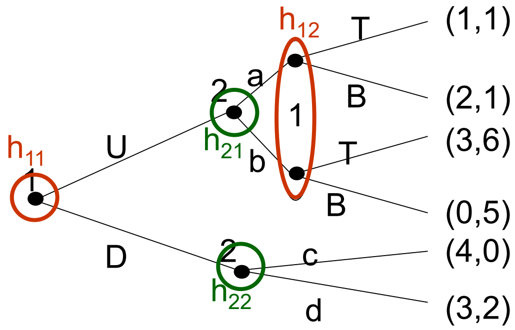

Abbildung 1.2: Informationsmengen

(externe Zufallsprozesse im Spiel, oder gemischte Strategien) gilt diese Aussage ebenfalls, aber für die zu erwartenden Auszahlungen der Spieler, da verschiedene Endknoten mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden können.

Mithilfe von Informationsmengen können Entscheidungssituationen dargestellt werden, die denen in einem statischen Spiel ähneln. Betrachten wir zur Verdeutlichung wieder Abbildung 1.1. In dem Entscheidungsknoten von Spieler 2, der auf Ast U folgt, weiß Spieler 2 noch nicht wie Spieler 1 sich entscheiden wird, da Spieler 1 seine Entscheidung erst später trifft. Und da die beiden darauffolgenden Entscheidungsknoten von Spieler 1 in derselben Informationsmenge liegen, weiß Spieler 1 nicht wie Spieler 2 sich entschieden hat. Die Situation in diesem Teil des Spielbaums ähnelt also einem statischen Spiel, in dem die Entscheidungen gleichzeitig getroffen werden. Aus strategischer Sicht macht es keinen Unterschied, ob Spieler 1 sich tatsächlich erst *nach* Spieler 2 entscheidet, nicht wissend wie Spieler 2 sich entschieden hat, oder ob beide Spieler *gleichzeitig* entscheiden. In beiden Fällen wissen die Spieler nicht, wie sich der jeweils andere entschieden hat.

1.1.1 Statische Spiele in extensiver Form

Wie wir gesehen haben, können mittels Informationsmengen simultane Entscheidungen in einem Spielbaum abgebildet werden. Folglich kann somit jedes statische Spiel in der extensiven Form dargestellt werden und jedes dynamische Spiel in der Normalform. Abbildung 1.3 verdeutlicht diesen Transformationsschritt am Beispiel eines uns vertrauten Spiels: dem einfachen Koordinationsspiel.[2] Die Normalform des Spiels ist in der Abbildung links dargestellt. In dem Spielbaum rechts wird ein willkürlicher Spieler, hier Spieler 1, in die Position des Eröffnungsspielers platziert. Die beiden Entscheidungsknoten von Spieler 2 werden dann in einer Informationsmenge zusammengefasst. Wir können dann den Spielbaum so interpretieren, als ob das statische Spiel von zwei Spielern gespielt wird,

[2] Der umgekehrte Transformationsschritt von einem Spiel in extensiver Form hin zur Normalform wird im folgenden Unterkapitel besprochen; siehe insbes. Abbildung 1.5.

Kapitel 4

Statische Spiele mit unvollständiger Information

Bisher haben wir Spiele betrachtet, in denen die Spieler alle Bestandteile des Spiels kennen: die Anzahl der Mitspieler, ihre Aktionen und Auszahlungen. Situationen, in denen dies der Fall ist, sind allerdings eher die Ausnahme als die Regel. Zum Beispiel sind Firmen nicht vollständig über die Kostenstruktur ihrer Konkurrenten informiert, Verhandlungspartner über die Alternativen ihrer Gegenüber, und Bieter in Auktionen über die maximale Zahlungsbereitschaft anderer Bieter. Solchen Situationen sind Spiele mit *unvollständiger Information* gewidmet, auch *Bayesianische Spiele* genannt.

Als Einführungsbeispiel mag uns das modifizierte "Battle of the Sexes"-Spiel aus Abbildung 4.1 dienen. Die Bi-Matrix auf der linken Seite zeigt das Standardspiel mit den zwei Nash-Gleichewichten (B, B) und (X, X). Das Spiel auf der rechten Seite zeigt eine Modifikation des Basisspiels. Hier behält Spieler 1 (der Zeilenspieler) seine üblichen Auszahlungen für B und X bei. Spieler 2 (der Spaltenspieler) hingegen will Spieler 1 vor allem aus dem Weg gehen. D.h. er bevorzugt immer noch seine Strategie X, er erhält aber seine maximale Auszahlung in der Zelle (B, X), wo er und Spieler 1 getrennte Wege gehen.

Es ist leicht festzustellen, dass das rechte Spiel für sich genommen kein Nash-Gleichwicht in reinen Strategien besitzt.[1] Die Situation in dem *gesamten* Spiel ist nun aber die, dass Spieler 1 nicht genau weiß, welche der beiden Matrizen die Auszahlungen von Spieler 2 wiedergeben. Dies hängt vielmehr davon ab, welcher "Typ" Spieler 2 tatsächlich ist. Ist Spieler 2 der "liebe Typ", was mit Wahrscheinlichkeit p der Fall ist, dann gibt die linke Matrix die wahren Auszahlungen beider wieder. Ist Spieler 2 hingegen der "hassende Typ" (mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$) dann befinden sich die wahren Auszahlungen in der rechten Matrix. Wählt Spieler 1 zum Beispiel die Strategie B, dann würde der liebe Typ

[1] Die Auszahlungen in der rechten Bi-Matrix ähneln denen in dem Matching Pennies - Spiel, wo es auch kein NGG in reinen Strategien gibt, da die Anreize der beiden Spieler in Konflikt mit einander stehen. Es handelt sich hierbei um sog. "anti-Koordinationsspiele" (anti-coordination game).

Liebe — Wahrscheinlichkeit p

	B	X
B	2 , 1	0 , 0
X	0 , 0	1 , 2

Hass — Wahrscheinlichkeit $1-p$

	B	X
B	2 , 0	0 , 2
X	0 , 1	1 , 0

Abbildung 4.1: Battle of the Sexes mit unvollständiger Information

ebenfalls mit B antworten. Der hassende Typ wird hingegen X wählen. Wenn Spieler 1 dies voraussieht und wenn er die Wahrscheinlichkeiten p und $1-p$ kennt, können wir seine erwartete Auszahlung bestimmen. Diese ist gegeben durch

$$\mathbb{E}u_1(B, BX) = p * 2 + (1-p) * 0 = 2p. \tag{4.1}$$

Hier gibt B die Strategie von Spieler 1 und BX die Strategien der beiden Typen von Spieler 2 wieder. Je größer also die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 der freundliche Typ ist, umso attraktiver ist B. Zur Bestimmung eines Gleichgewichts müssen wir uns nun noch die Frage stellen, ob Spieler 1 tatsächlich kein Interesse hat, von B abzuweichen (gegeben dass Spieler 2 bei seiner Strategie BX bleibt). Dazu bestimmen wir die Auszahlung von Spieler 1, wenn er X wählen würde:

$$\mathbb{E}u_1(X, BX) = p * 0 + (1-p) * 1 = 1-p. \tag{4.2}$$

Somit ist B eine beste Antwort, wenn gilt dass $2p \geq 1-p \Leftrightarrow p \geq 1/3$. Und da BX auch eine beste Antwort auf B ist, hat keiner der Typen von Spieler 2 einen Anreiz abzuweichen. Wir sagen dann, dass (B, BX) ein Bayesianisches Nash-Gleichgewicht ist.

Übungsaufgabe:
Bestimmen Sie die Werte für p, für die im modifizierten Battle of the Sexes - Spiel (siehe Abbildung 4.1) das Strategienprofil (X, XB) ein Bayesianisches Nash-Gleichgewicht ist.

[Hinweis: Wir geben keine Musterlösung an. Aber wenn Sie richtig gerechnet haben, sollten Sie die Bedingung $p \geq \frac{2}{3}$ finden.]

Kapitel 6

Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

Wir wenden uns hier dynamischen Spielen mit unvollständiger Information zu. Diese Klasse von Spielen ist einfach zu motivieren. In vielen Situationen, in denen Entscheidungen sequenziell getroffen werden, sind die Spieler nicht vollständig über ihre Mitspieler informiert. In Verhandlungen zum Beispiel wissen die Parteien wenig über die alternativen Angebote (outside options) ihrer Verhandlungspartner, und im dynamischen Innovationswettbewerb zwischen Unternehmen ist typischerweise der Wissenstand der Konkurrenz die entscheidende Unbekannte. Ein weiteres Beispiel ist der Arbeitsmarkt, oder genauer gesagt das Einstellungsgespräch, wo die wahren Talente und Qualifikationen des Kandidaten dem Interviewer weitestgehend verborgen bleiben.

Eine wesentliche Besonderheit der Spiele in diesem Kapitel ist, dass die Spieler während des Spielverlaufs aus den gewählten Aktionen ihrer Mitspieler über deren Typen lernen können. Im Fall des Einstellungsgesprächs zum Beispiel, das vom Nobelpreisträger Michael Spence untersucht wurde, kann ein Arbeitgeber so einiges aus den vorgelegten Qualifikationen und Zertifikaten eines Kandidaten lernen. Laut Spence's Theorie würde ein wahrhaft talentierter Arbeitnehmer nämlich ein "über alles erhabenes" Qualifikationssignal senden, das unzweifelhaft von seinen Talenten überzeugt. Man denke an ein Doppelstudium in regulärer Studiendauer, nebst Auslandsaufenthalt. Wir sprechen hierbei von einem *separierenden Gleichgewicht*, da der Interviewer aus den vorgelegten Qualifikationen Rückschlüsse auf die Talente der Kandidaten ziehen kann.

Auf der anderen Seite ist es in vielen anderen Situationen üblich, dass die Spieler mit einem Bluff davonkommen. Man denke zum Beispiel an Verhandlungen oder an den Wettbewerb zwischen Firmen, wo es einen Anreiz gibt, Schwächen zu verheimlichen und Stärken vorzutäuschen. In Spielen, wo ein Bluff erfolgreich gelingt, sprechen wir von einem *Pooling Gleichgewicht*. Diese beiden Typen von Gleichgewichten, und die wesentlichen Bedingungen, die zu ihnen führen, werden im Verlauf dieses Kapitels und des folgenden

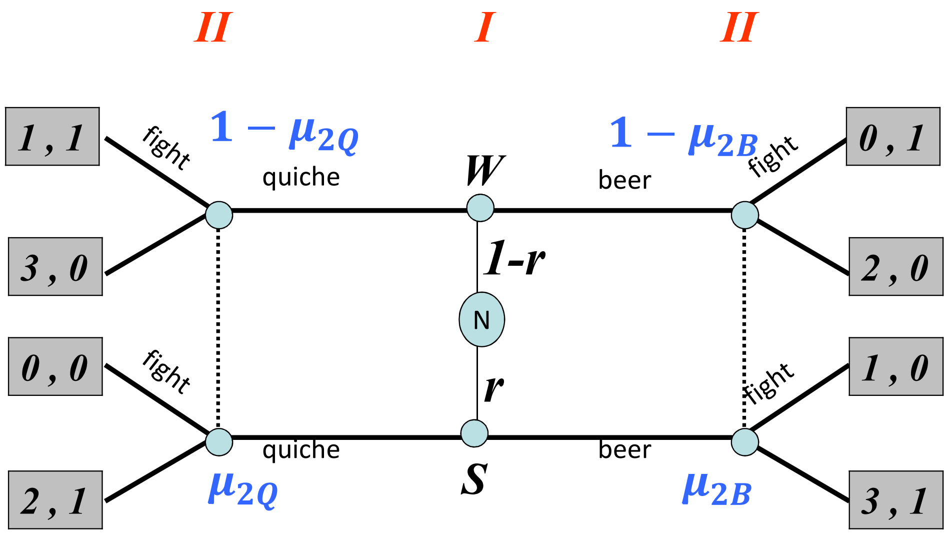

Abbildung 6.1: Das Bier oder Quiche Spiel

Kapitels herausgearbeitet.

Als Einführungsbeispiel mag uns das folgende "Bier oder Quiche" - Spiel von Cho and Kreps (1987) dienen: Spieler 1 betritt eine Bar, um ein Frühstück zu bestellen. Dort trifft er auf Spieler 2, der auf Ärger aus ist. Allerdings legt sich Spieler 2 lieber nur mit schwächlichen Typen an und meidet den Kampf gegen Starke. Die "Stärke" von Spieler 1 wird von der Natur festgelegt bevor Spieler 1 die Bar betritt. Spieler 1 weiß um seine Stärke, Spieler 2 dagegen nicht. Für ihn ist Spieler 1 mit Wahrscheinlichkeit r stark und mit Wahrscheinlichkeit $1 - r$ schwach.

Abbildung 6.1 stellt die Situation im Spielbaum dar, wobei wir schon die Harsanyi Transformation angewendet und die Situation somit als Spiel mit imperfekter Information dargestellt haben. Zur besseren Übersichtlichkeit haben wir außerdem den Eröffnungsknoten in der Mitte platziert. Das Spiel wird von der Natur eröffnet. Die gepunkteten Linien deuten die beiden Informationsmengen von Spieler 2 an. Spieler 2 weiß nicht mit Sicherheit, ob er einen starken oder einen schwachen Spieler 1 vor sich hat. Er kann aber unterscheiden, was Spieler 1 als Bestellung aufgibt, oder anders gesagt er kann die von Spieler 1 gewählte Aktion beobachten. Konkret bestellt Spieler 1 entweder ein Maß Bier oder eine Portion Quiche.

Woher weiß Spieler 2 nun aber, ob er einen Kampf riskieren sollte, wenn er Bier oder Quiche sieht? Dies lässt sich möglicherweise aus der Strategie von Spieler 1 zusammen mit Bayes' Regel herleiten. Spieler 2 weiß, dass der schwächliche Typ eher Quiche bevorzugt, der starke Typ dahingegen den Tag lieber mit einem Bier beginnt. Somit ergibt sich für Spieler 2 möglicherweise die Chance, dass sich Spieler 1 verrät. Konkret sind die Auszahlungen wie folgt gegeben: Spieler 1 bekommt, unabhängig von seinem Typen, 1 Punkt, wenn er sein bevorzugtes Frühstück essen kann, und 2 zusätzliche Punkte, wenn