Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine
Prof. Dr. Jochen Schwarze

Überarbeitung:
Prof. Dr. Hermann Singer
Dipl.-Stat. Anja Bittner

Modul 31101
Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

Leseprobe

Fakultät für
Wirtschaftswissenschaft

FernUniversität in Hagen

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m^2, weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

Grundlagen der Analysis und Linearen Algebra

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Einheit 1: Folgen, Reihen und finanzmathematische Grundlagen

1 Folgen, Reihen und ökonomische Anwendungen

Vorbemerkungen

In vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften dienen quantitative Daten, d.h. numerische Werte bzw. Zahlen, als Grundlage für vertiefende Untersuchungen. Es lassen sich zahlreiche Beispiele für entsprechende betriebswirtschaftliche und volkswirtschaftliche Kennziffern finden. Exemplarisch seien etwa der Umsatz, die Kosten, der Gewinn, der Deckungsbeitrag und die Produktivität genannt. Wie diese numerischen Größen definiert und zu interpretieren sind, ist unter anderem Gegenstand des Moduls „Einführung in die Wirtschaftswissenschaft“ (Modul 31001). Da sich die Daten vielfach nicht zufällig ergeben, sondern sich durch spezielle Regeln bzw. Berechnungsvorschriften bestimmen lassen, bietet sich eine mathematische Darstellung der ökonomischen Kennziffern an. Diese Abbildungsvorschriften stehen im Mittelpunkt der Grundlagen der Wirtschaftsmathematik. Zu diesen Abbildungen zählen unter anderem Funktionen, aber auch Folgen. Die Folgen stehen in diesem ersten Kapitel im Fokus der Betrachtungen, mit Funktionen beschäftigen sich die nachfolgenden Kapitel.

Die Abschnitte 1.1 und 1.2 führen die Begriffe der Folgen und Reihen ein. Die Eigenschaften von Folgen und Reihen werden an kleinen numerischen Beispielen sowie an unterschiedlichen Abschreibungsmethoden in den Abschnitten 1.1.3 und 1.2.2 illustriert. Von besonderer Bedeutung für die weiteren Betrachtungen ist der Begriff des Grenzwertes, der daher in den Abschnitten 1.1.4 und 1.2.4 detailliert dargestellt wird. Aus ökonomischer Sicht ist die Zinsrechnung eine wichtige Anwendung von Folgen und Reihen. Der Abschnitt 1.3 stellt entsprechende Grundlagen der Finanzmathematik vor.

1.1 Folgen

Zahlenfolge, Folge

Da sich ökonomische Daten unterschiedlich entwickeln können, bietet es sich an, entsprechende Folgen bzw. Sequenzen von Zahlen zu erfassen. Dies führt zum Begriff einer Zahlenfolge.

Definition 1.1 ***(Zahlenfolge)***

*a) Eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt **unendliche** reelle **Zahlenfolge** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oder kurz **Folge** $\{a_n\}$.*

*b) Eine Abbildung, die den Zahlen $n \in \{1{,}2,\ldots,m\}$ eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt **endliche** reelle **Zahlenfolge** $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ oder kurz **endliche Folge** $\{a_n\}^m$.*

In einer Zahlenfolge mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet a_1 das erste Folgenglied, a_2 das zweite Folgenglied und allgemein a_n das n-te Folgenglied. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist a_0 der Startwert. Zahlenfolgen können unterschiedliche Eigenschaften aufweisen.

Eine Folge heißt

- ▷ **monoton wachsend**, wenn jedes Folgenglied größer oder gleich als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n,
- ▷ **streng monoton wachsend**, wenn jedes Folgenglied größer als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} > a_n$ für alle n,
- ▷ **monoton fallend**, wenn jedes Folgenglied kleiner oder gleich als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n,
- ▷ **streng monoton fallend**, wenn jedes Folgenglied kleiner als sein Vorgänger ist: $a_{n+1} < a_n$ für alle n,
- ▷ **nach oben beschränkt**, wenn es eine obere Schranke S_o gibt, die von keinem Folgenglied überschritten wird: $a_n \leq S_o$ für alle n,
- ▷ **nach unten beschränkt**, wenn es eine untere Schranke S_u gibt, die von keinem Folgenglied unterschritten wird: $a_n \geq S_u$ für alle n,
- ▷ **beschränkt**, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Das folgende Beispiel illustriert einige Eigenschaften endlicher Zahlenfolgen.

Beispiel 1.1
Ein Handelsunternehmen plant in den nächsten Monaten für vier unterschiedliche Produkte A, B, C und D mit folgenden Umsätzen (Angaben in Tausend Euro = TEur).

	Jan. (Monat 1)	Feb. (Monat 2)	März (Monat 3)	April (Monat 4)
Umsatz Produkt A	120	130	125	128
Umsatz Produkt B	50	55	55	62
Umsatz Produkt C	Umsatz steigt um monatl. 5 TEur			
Umsatz Produkt D	Umsatz fällt um monatlich 20 %			

Während die Umsätze der beiden Produkte A und B in der Tabelle explizit angegeben sind, wird für die Produkte C und D die monatliche Veränderung beschrieben, aus denen sich die Umsätze in den Monaten ergeben. Ausgehend von einem Umsatz von 78 TEur für Produkt C und 156,25 TEur für Produkt D im Dezember des Vorjahres resultieren die Folgenglieder:

	Jan. (Monat 1)	Feb. (Monat 2)	März (Monat 3)	April (Monat 4)
Umsatz Produkt C	$a_1 = 83$	$a_2 = 88$	$a_3 =$____	$a_4 = 98$
Umsatz Produkt D	$a_1 = 125$	$a_2 = 100$	$a_3 =$____	$a_4 = 64$

Geben Sie jeweils den Umsatz a_3 der Produkte C und D im Monat März an! ✎

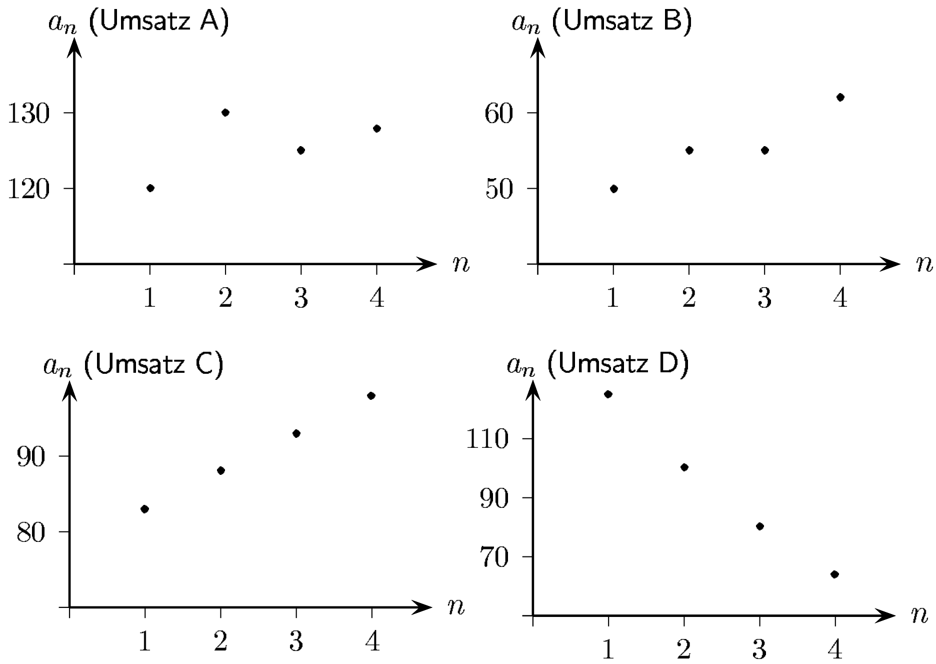


Abbildung 1.1: Umsatz der Produkte A, B, C und D für den Monat n

Die Umsätze in den vier Zahlenfolgen sind – wie auch Abbildung 1.1 veranschaulicht – durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

Einheit 5:
Lineare Algebra & Optimierung

5 Lineare Algebra

Die Grundlagen der linearen Algebra, in die dieses Kapitel einführt, sind für die Wirtschaftswissenschaften von erheblicher Bedeutung. Simultan zu treffende Entscheidungen lassen sich im Allgemeinen nicht durch eine, sondern nur durch mehrere Variable abbilden. Bereits im Kapitel 3 zur Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variabler werden Problemstellungen betrachtet, bei denen mehr als eine Unbekannte zum Einsatz kommt. Die Erläuterungen im Abschnitt 3.3 zu diesen Optimierungsproblemen machen deutlich, dass dann die Bestimmung eines globalen Optimums, speziell unter der zusätzlichen Berücksichtigung von Restriktionen, ein schwieriges Problem darstellt. Wenn sich derartige Problemstellungen jedoch durch lineare Funktionen abbilden lassen, kann auf spezielle Ansätze zurückgegriffen werden, die Gegenstand der linearen Algebra sind.

Ist beispielsweise ein Unternehmen ein Preisnehmer, d.h. der Preis eines Produktes ist nicht unmittelbar veränderbar, so kann der Umsatz (Erlös) nur durch die Variation der Herstellungsmenge beeinflusst werden. Aus einer Multiplikation der nicht veränderbaren Preise p_i (Koeffizienten) mit den veränderbaren Mengen x_i (Variablen) und der Summe über alle $i = 1, \ldots, n$ Produkte resultiert eine lineare Funktion mit dem Gesamterlös $\sum_i p_i \cdot x_i$. Die Preise lassen sich auch in einer Liste, einem n-Tupel $(p_1, \ldots, p_n)$, zusammenfassen, ebenso die variablen Herstellungsmengen $(x_1, \ldots, x_n)$. Diese Tupel werden in der linearen Algebra als Vektoren bezeichnet. Es stellt sich die Frage, mit welchen Rechenoperationen der Gesamterlös aus den beiden Vektoren ermittelt werden kann. Diese und hierauf aufbauende Problemstellungen werden in der linearen Algebra untersucht.

In diesem Kapitel werden zunächst im Abschnitt 5.1 Vektoren und Rechenoperationen mit Vektoren vorgestellt. Mehrere gleichartige Vektoren lassen sich in „Tabellen“ zusammenfassen, die in der linearen Algebra als Matrizen bezeichnet werden. Der Abschnitt 5.2 führt in das Rechnen mit Matrizen ein. Diese Grundlagen können genutzt werden, um lineare Gleichungssysteme zu lösen (Abschnitt 5.3). Hierbei ist eine zulässige Lösung für ein (ökonomisches) Problem gesucht, das sich durch mehrere lineare Gleichungen abbilden lässt. Die Lösung ist allerdings oftmals nicht eindeutig. So kann es mehrere Möglichkeiten geben, verschiedene Herstellungsmengen der Produkte zu kombinieren. Daher schließt sich unmittelbar die Frage an: Welche dieser zulässigen Lösungen ist die „Beste"? Aus der Menge der zulässigen Lösungen ist in Bezug auf ein bestimmtes Ziel eine optimale Alternative gesucht. Die Bestimmung dieser Lösung ist Bestandteil der linearen Optimierung, in die der Abschnitt 5.4 einführt.

5.1 Vektoren

5.1.1 Begriff und spezielle Vektoren

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die Zusammenfassung von unterschiedlichen Komponenten in einer Liste. Sind diese Elemente reelle Zahlen und werden sie untereinander aufgeführt sowie in Klammern gesetzt, handelt es sich um einen Spaltenvektor.

Spaltenvektor

Definition 5.1
Ein Tupel von n reellwertigen Komponenten $a_1, \ldots, a_n$

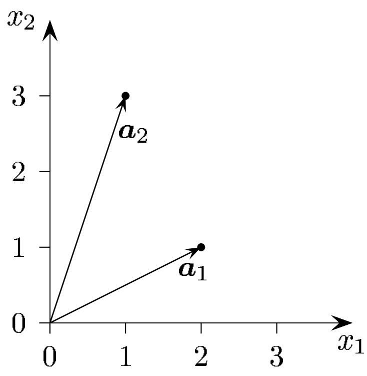
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \textit{heißt } n\textit{-dimensionaler } \textbf{\textit{Spaltenvektor (Vektor)}}.$$

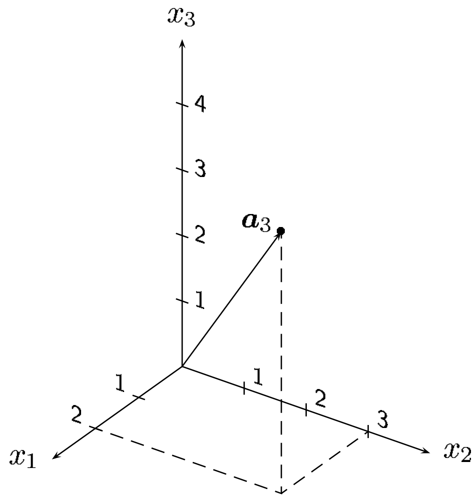
Zur Vereinfachung der Darstellung heißen in der Einheit 5 die Spaltenvektoren auch nur kurz Vektoren, da diese standardmäßig verwendet werden. Um Vektoren – wie z.B. $\boldsymbol{a}_1$ – von den einzelnen Komponenten a_1 bis a_n deutlich abzugrenzen, sind diese hier fett gedruckt. Neben dieser in den Wirtschaftswissenschaften vielfach verwendeten Schreibweise findet sich in der Literatur – insbesondere in den Natur- und Ingenieurwissenschaften – die Darstellung von Vektoren mit einem Pfeil über dem Symbol, wie zum Beispiel für den Vektor $\vec{a}$. Dies ist unter anderem in der graphischen Veranschaulichung von Vektoren im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum (für $n = 2, 3$) begründet.

Vektoren

Beispiel 5.1
Die folgende Abbildung zeigt im linken Teil die beiden zweidimensionalen Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ sowie im rechten Teil den dreidimensionalen Vektor $\boldsymbol{a}_3$ mit:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$





Zeichnen Sie in die linke Abbildung den Vektor $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und in die rechte* $\boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zwei- und dreidimensionale Vektoren lassen sich im Koordinatensystem als Pfeile darstellen. Die im Koordinatenursprung beginnenden Vektoren sind durch ihre Endpunkte • eindeutig gekennzeichnet und werden als Ortsvektoren bezeichnet. Vektoren können auch an beliebigen Punkten aufsetzen. Jedoch ist bei ökonomischen Anwendungen in der graphischen Darstellung eines Vektors, d.h. des Ortsvektors, vielfach die Abbildung des Endpunkts ausreichend, so dass ein Vektor hierbei auf einen Punkt des $\mathbb{R}^n$ reduziert wird. Ortsvektor

Bei der Schreibweise der Vektoren ist – wie in Beispiel 5.1 – zu berücksichtigen, dass ein j-ter Vektor $\boldsymbol{a}_j$ sich aus den Komponenten a_i zusammensetzt ($i = 1, \ldots, n$). In bestimmten Fällen kann es sinnvoll oder sogar notwendig sein, die Komponenten eines Vektors in einer Zeile aufzulisten. Dieser Vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt Zeilenvektor. Jeder Spaltenvektor lässt sich in einen Zeilenvektor transponieren und umgekehrt. Der obere Index T – oder auch $'$ – bringt zum Ausdruck, dass es sich um einen transponierten Vektor handelt. Zeilenvektor transponierter Vektor

Transponierter Vektor: $\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Geben Sie zu dem Vektor $\boldsymbol{a}_1$ *aus Beispiel 5.1 die transponierten Vektoren* $\boldsymbol{a}_1^T$ *sowie* $(\boldsymbol{a}_1^T)^T$ *an.*

Es gibt zudem Vektoren, die durch spezielle Eigenschaften gekennzeichnet sind. So enthält der so genannte Nullvektor $\boldsymbol{o}$ ausschließlich Komponenten mit dem Wert null. Ein (kanonischer) Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$ ist ein Vektor, dessen i-te Kom- Nullvektor Einheitsvektor

Grundlagen der Statistik

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

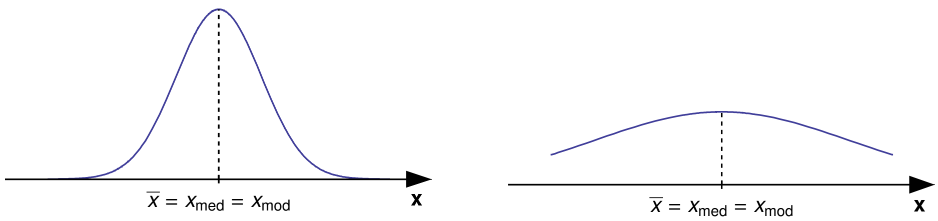
2.4 Schiefe und Wölbung einer Verteilung

Symmetrie, Schiefe, Steilheit, Wölbung

Zur Beschreibung von Verteilungen können auch die Begriffe **Symmetrie, Schiefe**, **Steilheit** und **Wölbung** herangezogen werden.

Die Schiefe gibt an, wie stark eine eingipflige Verteilung nach rechts bzw. nach links geneigt ist. Eine Verteilung ist symmetrisch, wenn sie in Bezug auf das arithmetische Mittel symmetrisch ist. Merkmalsausprägungen, die um den gleichen Betrag nach unten bzw. oben vom arithmetischen Mittel abweichen, haben dann die gleiche absolute bzw. relative Häufigkeit. Des Weiteren kann zwischen flachen und steilen Verteilungen unterschieden werden.

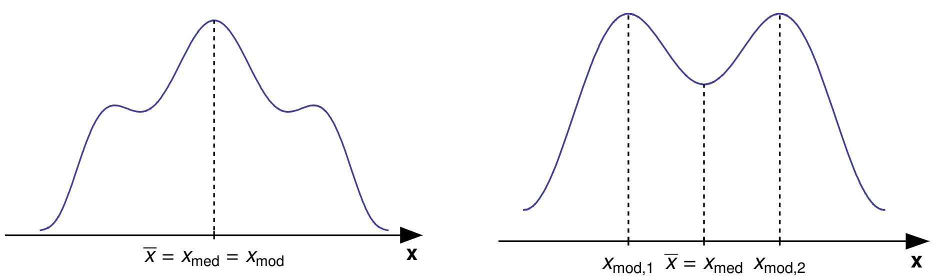
Arithmetisches Mittel, Median und Modalwert stimmen bei einer **eingipfligen, symmetrischen Verteilung** überein.



steile Verteilung flache Verteilung

Abbildung 2.4.1: *Eingipflige, symmetrische Verteilungen*

Auch bei **mehrgipfligen, symmetrischen Verteilung** stimmen das arithmetische Mittel und der Median stets überein. Aufgrund der Mehrgipfligkeit können jedoch mehrere Modalwerte auftreten.



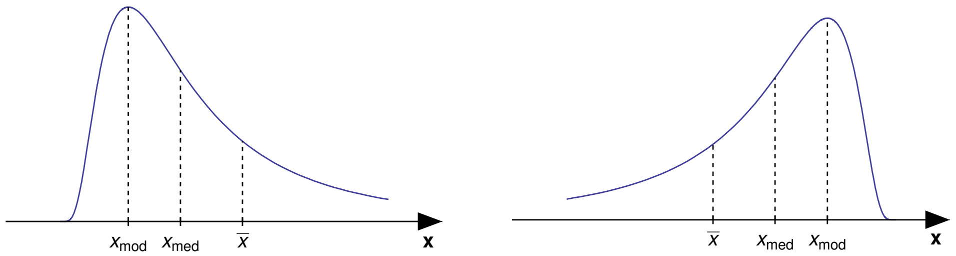
unimodale Verteilung bimodale Verteilung

Abbildung 2.4.2: *Mehrgipflige, symmetrische Verteilungen*

rechtsschief (linkssteil)

linksschief (rechtssteil)

Eingipflige Verteilungen können nach ihrer Schiefe beurteilt werden, wobei zwischen rechtsschief und linksschief unterschieden werden kann. **Rechtsschiefe Verteilungen** steigen von links nach rechts steil an und fallen dann nach rechts flach ab. **Linksschiefe Verteilungen** steigen dagegen von rechts nach links steil an und fallen dann nach links flach ab. Daher werden diese auch als **linkssteile** bzw. **rechtssteile Verteilungen** bezeichnet.



linkssteile bzw. rechtsschiefe Verteilung

linksschiefe bzw. rechtssteile Verteilung

Abbildung 2.4.3: *Schiefe Verteilungen*

Fechnersche Lageregel

Mit Hilfe der **Fechnerschen Lageregel** können Verteilungen hinsichtlich der Schiefe betrachtet werden, ohne eine Grafik hinzuzuziehen.

Fechnersche Lageregel:

$x_{mod} = \overline{x} = x_{med}$	für symmetrische Verteilungen,
$x_{mod} < x_{med} < \overline{x}$	für rechtsschiefe Verteilungen,
$\overline{x} < x_{med} < x_{mod}$	für linksschiefe Verteilungen.

Als Maßzahl zur Beurteilung der Schiefe einer eingipfligen Verteilung metrischer Merkmale kann der Momentenkoeffizient berechnet werden.

Momentenkoeffizient der Schiefe

Der **Momentenkoeffizient der Schiefe g_3** lautet:

$$g_3 = \frac{m_3}{\tilde{s}^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i^n (x_i - \overline{x})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_i^n (x_i - \overline{x})^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

3.3 Arten von Zusammenhängen

Die Aufstellung und Analyse zweidimensionaler Verteilungen hat insbesondere den Zweck folgende Fragestellungen zu untersuchen:

- Besteht eine Abhängigkeit zwischen den betrachteten Merkmalen? Wenn ja, in welcher Ausprägung und von welcher Art liegt diese vor?
- Wie kann eine vorhandene Abhängigkeit quantitativ beschrieben werden?

Die Frage, ob überhaupt Abhängigkeit vorliegt, kann bei quantitativen Merkmalen in vielen Fällen durch Streudiagramme geklärt werden.

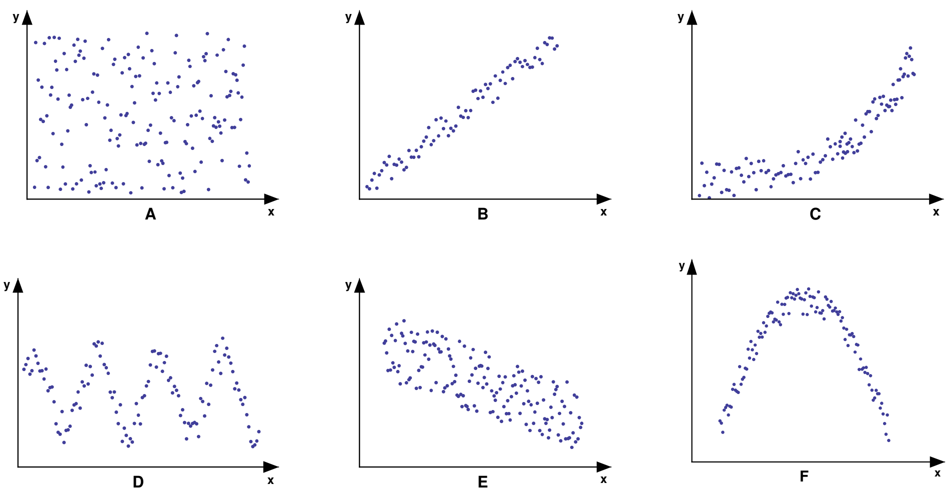


Abbildung 3.3.1: *Streudiagramme mit unterschiedlichen Abhängigkeiten der Merkmale*

In der Darstellung A sind keine Anzeichen von Abhängigkeit zwischen den Merkmalen X und Y zu erkennen. Die anderen Darstellungen weisen auf eine Abhängigkeit hin, welche jedoch nicht exakt im Sinne der Eindeutigkeit ist, wie sie bei Funktionen vorliegt. Die Abhängigkeit besteht tendenziell.

In B hat das Merkmal Y im Durchschnitt um so größere Werte, je größer die Werte von X sind, während in der Darstellung E die Werte von Y im Durchschnitt um so kleiner sind, je größer die Werte von X sind.

Beide Grafiken veranschaulichen einen linearen Zusammenhang. Grafik D deutet auf einen periodischen Zusammenhang hin, während in C die Werte von Y für zunehmende Werte des Merkmals X exponentiell steigen. Die Darstellung F verdeutlicht einen quadratischen Zusammenhang.

Allgemein ist es anhand einer grafischen Darstellung i.d.R. nicht möglich, Aussagen folgender Form zu treffen: „Wenn X den Wert x annimmt, dann nimmt Y immer genau den Wert y an.“

Die Überlegungen zu Bild 3.3.1 zeigen, dass bei quantitativen Merkmalen die grafische Darstellung der zweidimensionalen Verteilung in einem Streudiagramm bereits ausreichen kann, um grundlegende Aussagen über eventuelle Abhängigkeiten zu machen. Dabei ist oft auch bereits eine Aussage über den Grad (die Ausgeprägtheit) eines Zusammenhangs möglich.

Für Merkmale, die nach einer Nominalskala oder einer Ordinalskala klassifiziert werden können, ist eine grafische Darstellung einer zweidimensionalen Verteilung in einem Streudiagramm nicht möglich. Hier können nicht so schnell Urteile über eventuelle Abhängigkeiten gemacht werden.

Als Aufgabenstellung für die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Merkmalen kann festgehalten werden:

- Bestimmung von Maßzahlen, die angeben, ob überhaupt ein Zusammenhang vorliegt und wie ausgeprägt dieser ist. Die Maßzahlen werden im Allgemeinen so definiert, dass sie bei Unabhängigkeit den Wert 0 annehmen. Bei einem vorhandenen Zusammenhang soll aus dem Wert der Maßzahl deutlich werden, wie ausgeprägt der Zusammenhang ist.

- Bestimmung von Funktionen, die die durchschnittliche Tendenz eines Zusammenhangs wiedergeben. Das ist nur für metrisch messbare Merkmale möglich. Diese Funktionen sind so zu bestimmen, dass sie die in einem Zusammenhang steckende Tendenz möglichst gut beschreiben.

Zur Beschreibung des Zusammenhangs können für die Streudiagramme in Abbildung 3.3.1 folgende Funktionen verwendet werden: Für C bietet sich eine Exponentialfunktion, für D eine Sinusfunktion und für F eine Parabel an, während die Tendenz des Zusammenhangs in B und E am besten durch eine steigende bzw. fallende Gerade beschrieben wird.

1.4.4 Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

Die in diesem Abschnitt behandelte statistische Definition der Wahrscheinlichkeit beruht auf einem Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten.

Betrachtet wird ein Zufallsexperiment, das unter völlig gleichen Bedingungen nacheinander n-mal durchgeführt wird. Nach jeder Durchführung wird die relative Häufigkeit für das Auftreten des Ereignisses A bestimmt. In den ersten Versuchen schwanken die berechneten relativen Häufigkeiten für das Auftreten des Ereignisses A sehr stark. Je größer die Anzahl der Versuche des Zufallsexperimentes ist, desto enger schwanken die relativen Häufigkeiten um einen festen Wert.

Beispiel 1.4.6:

Ein Würfel wurde 200*-mal hintereinander geworfen Nach jedem Durchgang wurde die relative Häufigkeit für das Ereignis* A=*„Auftreten der Augenzahl* 6*" registriert. Für jeden Durchgang ist die Anzahl* n *der Würfe (*x*-Achse) und die zugehörige relative Häufigkeit* $f_n(A)$ *(*y*-Achse) in Bild 1.4.1 grafisch dargestellt. Dieser Vorgang wurde* 9 *mal wiederholt.*

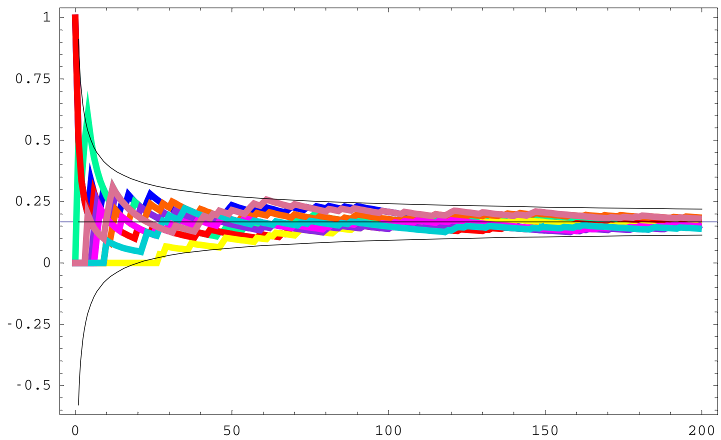


Abbildung 1.4.1: *Relative Häufigkeit für das Auftreten von „Augenzahl* 6*" in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfelwürfe*[4]

[4]siehe interaktive Mathematica-Applet „frequenzneu.nbp" auf http://www.fernuni-hagen.de/ls_statistik/forschung/multimedia/eigene.shtml

In Beispiel 1.4.6 schwanken die relativen Häufigkeiten immer weniger um den Wert $\frac{1}{6}$. Je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird, desto besser stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten. Offensichtlich streben die relativen Häufigkeiten einem „Grenzwert“ zu. Dieser Grenzwert entspricht der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A. Diese Eigenschaft der relativen Häufigkeit führt zu der statistischen Definition der Wahrscheinlichkeit.

statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

Nach der statistischen Definition ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A gleich dem Grenzwert der relativen Häufigkeiten, der sich ergibt, wenn das Zufallsexperiment unendlich oft durchgeführt wird:

$$\boldsymbol{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A).$$

Da es in der Wirklichkeit unmöglich ist, ein Zufallsexperiment unendlich oft durchzuführen, ist es ebenso unmöglich, auf die angegebene Art eine Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass über die Berechnung von relativen Häufigkeiten zumindest eine Näherung oder Schätzung der dem Zufallsexperiment zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden kann. In dem Fall wird von den sogenannten **empirischen Wahrscheinlichkeiten** gesprochen.

empirische Wahrscheinlichkeit

1.4.5 Das Gesetz der großen Zahlen

Im Zusammenhang mit Anwendungen der Statistik wird sehr häufig vom sogenannten Gesetz der großen Zahlen gesprochen, wobei zu beachten ist, dass es verschiedene „Gesetze der großen Zahlen“ gibt.

Die relative Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis eines Zufallexperimentes nähert sich mit zunehmender Anzahl der Wiederholungen des Zufallexperimentes einem bestimmten Wert immer mehr an. Dieser Wert ist im allgemeinen unbekannt, da die relative Häufigkeit mit ihm erst dann übereinstimmt, wenn unendlich viele Versuche durchgeführt werden. Bild 1.4.1 veranschaulicht, dass die relativen Häufigkeiten sich

3.3 Normalverteilung

3.3.1 Definition der Normalverteilung

Die **Normalverteilung** ist die wichtigste stetige Verteilung. Sie spielt bei nahezu allen Anwendungen der Statistik eine große Rolle.

Normalverteilung

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion der **Normalverteilung** lautet:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Zu der Dichtefunktion $f_X(x)$ existiert keine elementare Stammfunktion, so dass die **Verteilungsfunktion** der Normalverteilung nicht mehr mit Hilfe elementarer Funktionen darstellbar ist. Die Werte der Verteilungsfunktion können mittels numerischer Integrationsverfahren oder spezieller Tabellen (s. Gesamtglossar) angegeben werden. Die Parameter der Normalverteilung lauten:

Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \mu \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Eine normalverteilte Zufallsvariable X wird als $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt bezeichnet. Die Schreibweise lautet $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$.

Erwartungswert und Varianz bzw. Standardabweichung der Normalverteilung lassen sich also unmittelbar aus der Dichtefunktion ablesen.

Aus der Dichtefunktion ergibt sich, dass die Normalverteilung in einem konkreten Fall durch die Angabe von μ und σ^2 jeweils spezifiziert werden muss. Es gibt also nicht nur eine Normalverteilung, sondern eine ganze Klasse von Normalverteilungen. Die Dichtefunktion der Normalverteilung hat folgende typische Gestalt:[5]

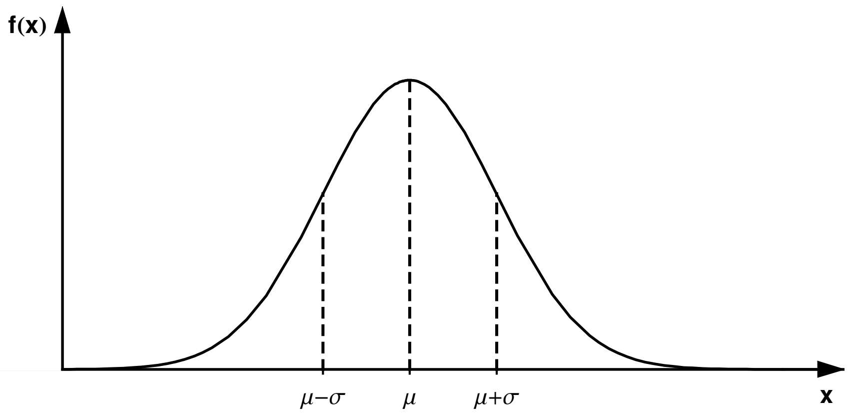


Abbildung 3.3.1: *Dichtefunktion der Normalverteilung*

[5] siehe interaktive Mathematica-Applets auf der Homepage des Lehrstuhls http://www.fernuni-hagen.de/ls_statistik/forschung/multimedia/

Die Dichtefunktion ist symmetrisch und hat ihren Gipfel bei $x = \mu$. An den Stellen $x = \mu - \sigma$ und $x = \mu + \sigma$ befinden sich Wendepunkte. Aufgrund der Symmetrie gilt, dass Erwartungswert, Median und Modalwert übereinstimmen. In der Abbildung 3.3.2 sind Normalverteilungen für verschiedene Werte von μ und σ^2 dargestellt.

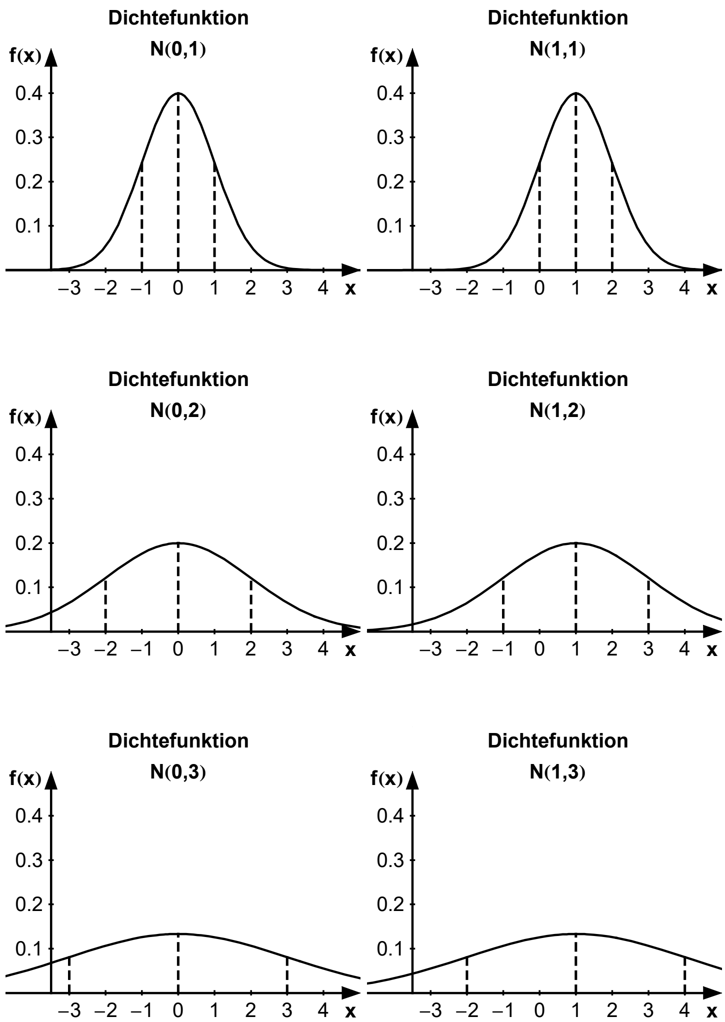


Abbildung 3.3.2: *Verschiedene Normalverteilungen*

> Ist eine Zufallsvariable normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1, so liegt eine **Standardnormalverteilung** vor. In diesem Zusammenhang wir die Zufallsvariable mit Z bezeichnet, d.h. $\boldsymbol{Z \sim N(0,1)}$.

Standardnormalverteilung

3.4 Zusammenhang zwischen Konfidenzintervall und Testverfahren

Für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit unbekanntem Parameter μ und **bekannter** Varianz σ^2, d.h. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ lautet das zweiseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ

$$\text{KI}: \qquad \left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Hierbei sind die Grenzen Zufallsvariablen, d.h. die Grenzen sind zufällige Größen. Der Parameter μ ist dagegen eine unbekannte, aber feste Größe.

Wird ein Parametertest für μ durchgeführt, so geben die kritischen Grenzen c_u und c_o einen Bereich für den Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ an, bei dem die Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ nicht abgelehnt werden kann.

$$\text{Test}: \qquad \left[\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Grenzen des Bereiches $[c_u; c_o]$ sind feste Größen, während die Prüfgröße $\overline{X}$ zufällig ist.

Die Grenzen des einen Bereiches können aus den Grenzen des anderen Bereiches hergeleitet werden ($\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{P}\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \leq \overline{X} \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) \\
= \ & \boldsymbol{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \leq \overline{X} - \mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) \\
= \ & \boldsymbol{P}\left(-\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \leq -\mu \leq -\overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) \\
= \ & \boldsymbol{P}\left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) = 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Die Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ kann auch mittels des Konfidenzintervalls überprüft werden. Überdeckt das Konfidenzintervall nicht den Wert μ_0, so kann die Nullhypothese abgelehnt werden. Die Testentscheidung mittels der Prüfgröße $\overline{X}$ und die Testentscheidung mittels des Konfidenzintervalls liefern dasselbe Ergebnis. Das Konfidenzniveau „$1-\alpha$“ entspricht „1−Signifikanzniveau“ beim Testen.

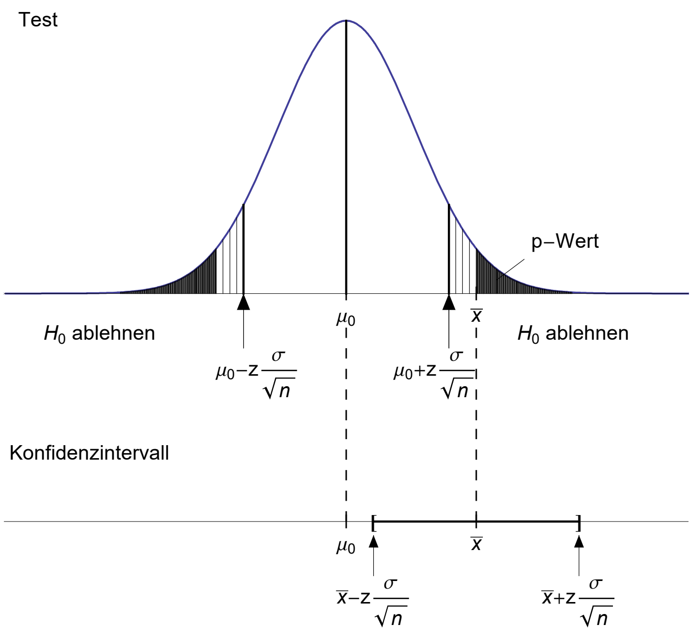


Abbildung 3.4.1: *Zusammenhang zwischen Konfidenzintervall und Testverfahren*

Zusammenfassend kann formuliert werden:

Das Konfidenzintervall mit der Wahrscheinlichkeitsaussage

$$\boldsymbol{P}\left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) = 1 - \alpha$$

ist ein Intervall, dessen Grenzen Zufallsvariablen sind und welches den unbekannten (aber festen) Parameter μ mit der Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ überdeckt.

Das Intervall mit der Wahrscheinlichkeitsaussage

$$\boldsymbol{P}\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \leq \overline{X} \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) = 1 - \alpha$$

hat feste Grenzen und gibt die Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ an, mit der die Zufallsvariable $\overline{X}$ in den angegebenen Bereich fällt.