Univ-Prof. Dr. Andreas Kleine
Univ-Prof. Dr. Wilhelm Rödder
Dr. Gabriel Piehler
Dipl.-Math. Diethelm Sippel

# 09804
# Brückenkurs „zur Mathematik in der Wirtschaftswissenschaft“

# Leseprobe

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m$^2$, weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

# Kurseinheit 1: Aussagen, Mengen und Zahlenbereiche

# 1 Aussagen, Mengen und Zahlenbereiche

Der erste Teil dieser Kurseinheit, der mit „Aussagen, Mengen und Zahlenbereiche“ überschrieben ist, führt Sie in die wichtigsten Grundbegriffe und Notationen ein, die wir in den weiteren Kurseinheiten (KE) des Brückenkurses verwenden und die insbesondere auch für das Verständnis der Inhalte in der Wirtschaftsmathematik von Bedeutung sind.

## 1.1 Aussagenlogik

### 1.1.1 Aussagen

Begriffe und Symbole zur Aussagenlogik sind nicht nur in der Mathematik von grundlegender Bedeutung. Eine Aussage ist hierbei ein Satz, der einen Sachverhalt beschreibt, der wahr oder falsch ist. In der deutschen Sprache heißen diese Sätze daher auch *Aussagesätze*; sie sind von Fragen oder Aufforderungen zu unterscheiden. Zwei Aussagen sind zum Beispiel: Aussagesatz

- ▷ Düsseldorf ist eine Landeshauptstadt.
- ▷ Frankfurt ist eine Landeshauptstadt.

Die erste Aussage ist offensichtlich wahr, denn Düsseldorf ist die Landeshauptstadt von Nordrhein-Westfalen, während die zweite Aussage falsch ist, denn nicht Frankfurt, sondern Wiesbaden ist die Landeshauptstadt von Hessen. Derartige Aussagen gibt es auch in der Mathematik:

- ▷ 9 ist eine ungerade Zahl.
- ▷ 9 ist eine Primzahl.

Auch hier ist die erste Aussage wahr, denn die Zahl 9 ist nicht ohne Rest durch 2 teilbar und daher eine ungerade Zahl. Die zweite Aussage ist dagegen falsch, denn eine Primzahl ist nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar. Da sich aber die Zahl 9 durch 3 ohne Rest teilen lässt, ist die zweite Aussage falsch.

Aussage

**Definition 1.1**
*Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.*

Eine Aussage kann somit nicht gleichzeitig wahr und falsch sein. Bei einer Aussage kann es sich allerdings auch um eine Vermutung handeln, von der zunächst nicht bekannt ist, ob sie wahr oder falsch ist. Derartige Behauptungen sind in der Mathematik durch einen Beweis zu verifizieren. Es gibt übrigens bis heute einige ungelöste mathematische Probleme, d.h. mathematische Aussagen, die bislang nicht bewiesen wurden.

---

**Übungsaufgabe 1.1**
Geben Sie an, ob es sich im Folgenden jeweils um eine Aussage handelt:

*a*) $A$: „8 ist größer als 3“,

*b*) $B$: „3 ist größer als 8“,

*c*) $C$: „ist 3 größer als 8“.

---

### 1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Negation
Verneinung

Aussagen stehen vielfach nicht alleine, sondern werden zu neuen Aussagen verknüpft. Die Aussagenwerte von Verknüpfungen lassen sich überblicksartig in Wahrheitstafeln zusammenfassen. Eine einfache Form einer Verknüpfung ist die *Negation*, d.h. die *Verneinung* einer Aussage.

**Definition 1.2**
*Die **Negation** $\neg A$ (lies „nicht $A$“) einer Aussage $A$ ist wahr, wenn $A$ falsch ist, und die Negation $\neg A$ ist falsch, wenn $A$ wahr ist.*

*Wahrheitstafel der Negation:*

| $A$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $\neg A$ | $f$ | $w$ |

In der Literatur findet sich vielfach auch die Schreibweise $\bar{A}$ für die Negation einer Aussage $A$.

**Beispiel 1.1**

a) Für die Aussage $A$ „Düsseldorf ist eine Landeshauptstadt“ lautet $\neg A$ , d.h. die Negation von $A$, „Düsseldorf ist nicht Landeshauptstadt“. Die deutsche Sprache hält hierfür übrigens auch synonyme Formulierungen wie „Düsseldorf ist keine Landeshauptstadt“ bereit. Die Negation dieser Aussage $\neg A$ ist bekanntlich falsch. Dieser Zusammenhang ist in der zweiten Spalte der Wahrheitstafel zu erkennen: wenn $A$ wahr (w), dann $\neg A$ falsch (f).

b) Betrachten wir das eingangs erwähnte Zahlenbeispiel. Es ist $A$ bekanntlich die falsche Aussage „9 ist eine Primzahl“, dann ist die Negation $\neg A$ „9 ist keine Primzahl“ wahr.

Während bei der Negation eine einzige Aussage verneint wird, kombinieren die folgenden Verknüpfungen zwei Aussagen.

Die *Konjunktion* zweier Aussagen $A$ und $B$ ist nur dann wahr, wenn sowohl die Aussage $A$ als auch die Aussage $B$ wahr ist. Die Konjunktion entspricht somit einer „und“-Verknüpfung. Sie wird daher auch als „*logische und*“ Verknüpfung bezeichnet.

Konjunktion

logisches und

**Definition 1.3**

*Die **Konjunktion** $A \wedge B$ (lies „$A$ und $B$“) zweier Aussagen $A$ und $B$ ist wahr, wenn sowohl $A$ als auch $B$ wahr sind, und genau dann falsch, wenn mindestens eine der Aussagen $A$, $B$ falsch ist.*

*Wahrheitstafel der Konjunktion $A \wedge B$:*

| $A$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $A \wedge B$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |

Folgendes Beispiel illustriert die Verknüpfung der bekannten Aussagen zu den beiden Landeshauptstädten. Das Beispiel zeigt auch, wie sich die Negation einer Aussage durch eine Konjunktion verknüpfen lässt.

**Beispiel 1.2**

Gegeben seien die wahre Aussage $A$ und die falsche Aussage $B$:

$A$ : Düsseldorf ist eine Landeshauptstadt.

$B$ : Frankfurt ist eine Landeshauptstadt.

So gilt für folgenden Konjunktionen:

(i) $A \wedge B$: $f$,
denn die Aussage „Düsseldorf und Frankfurt sind Landeshauptstädte“ ist falsch.

(ii) $A \wedge (\neg B)$: $w$,
denn die Aussage „Düsseldorf, aber nicht Frankfurt ist eine Landeshauptstadt“ ist korrekt.

(iii) $(\neg A) \wedge (\neg B)$ : $f$,
denn die Aussage „Düsseldorf und Frankfurt sind keine Landeshauptstädte“ stimmt nicht.

# Lösungen zu den Übungsaufgaben

**Lösung zu Übungsaufgabe 1.1 auf S. 2:**

a) $A$: „8 ist größer als 3“ ist eine Aussage, die wahr ist.

b) $B$: „3 ist größer als 8“, ist ebenfalls eine Aussage, die jedoch falsch ist.

c) $C$: „Ist 3 größer als 8“ ist ein Frage, die weder wahr noch falsch sein kann und daher auch keine Aussage ist.

# Kurseinheit 3: Gleichungen und Ungleichungen

# 3 Gleichungen und Ungleichungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit verschiedenen Formen von Gleichungen mit einer Variable (Kapitel 3.1). Anschließend widmen wir uns den Ungleichungen (Kapitel 3.2) und den Gleichungen mit zwei Variablen (Kapitel 3.3).

## 3.1 Gleichungen

Gleichungen kommen bei vielfältigen wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen zum Einsatz. Daher gehört das Lösen von Gleichungen zu einer wichtigen mathematischen Grundlage.

**Definition 3.1.**
*Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen $T_1$ und $T_2$, die durch ein Gleichheitszeichen „=“ miteinander verbunden sind: $T_1 = T_2$.* **Gleichung**

Die beiden Terme einer Gleichung setzen sich aus Zahlen bzw. reellwertigen Parametern (Konstante) und Variablen (Unbekannte) zusammen, die durch verschiedene Rechenoperationen wie Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division, aber auch Potenzen, Wurzeln oder Logarithmen verknüpft sein können. Die Variablen werden hier zumeist mit $x$ bzw. $y$ bezeichnet und die Parameter mit $a, b, c$, usw. ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Die Bezeichnungen sind jedoch in der Literatur nicht einheitlich und insbesondere in den Wirtschaftswissenschaften vom zu Grunde liegenden ökonomischen Zusammenhang abhängig. **Variable, Unbekannte**

Betrachten wir zunächst Gleichungen mit einer vergleichsweise einfachen Struktur, wie zum Beispiel die Gleichung $2x = 8$. Bei dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich, dass sie nur für den Wert $x = 4$ erfüllt ist, denn nur in diesem Fall gilt $2 \cdot 4 = 8$. Bereits bei der Gleichung $2x^2 = 8$ ist jedoch zu beachten, dass es zwei Lösungen gibt, denn sowohl für $x = 2$ als auch für $x = -2$ ist diese Gleichung erfüllt.

Parameter, Konstante

Oft fällt es schwerer, die Lösung einer Gleichung mit einem Parameter (Konstante) $a$ zu ermitteln, wie zum Beispiel die Lösung der Gleichung: $2x^2 = a$. Hierbei ist der Parameter $a$ ein Platzhalter für einen Wert der Konstanten, der in diesem Fall auf der rechten Seite der Gleichung steht. Es könnte etwa noch nicht genau bekannt sein, welchen Wert der Parameter $a$ exakt annehmen wird. Diese Gleichung ist wiederum nach der Variable $x$ aufzulösen, so dass sich die beiden von $a$ abhängigen Lösungen $x = \sqrt{a/2}$ bzw. $x = -\sqrt{a/2}$ ergeben. Damit lässt sich ablesen, dass für den Wert des Parameters $a = 8$ die beiden bekannten Lösungen $x = 2$ bzw. $x = -2$ resultieren, aber eben auch für jeden anderen nichtnegativen Wert von $a$.

Lösung einer Gleichung

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir uns ausführlich mit speziellen Gleichungen und deren Lösungsmöglichkeiten beschäftigen. Dabei sind jeweils die Werte zu ermitteln, die die Gleichung erfüllen. Die Lösungsmenge einer Gleichung enthält alle möglichen Lösungen einer Gleichung.

Lösungsmenge

**Definition 3.2.**
*Ein Wert der Variablen $x \in \mathbb{D}$, bei der eine Gleichung erfüllt ist, heißt **Lösung dieser Gleichung.** Die Menge aller Lösungen wird als **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ bezeichnet* ($\mathbb{L} \subseteq \mathbb{D}$).

Welche Werte eine Variable grundsätzlich annehmen darf, ist hierbei im Definitionsbereich $\mathbb{D}$ festgelegt.

**Beispiel 3.1**
Es sei die Gleichung

$$\frac{1}{x-2} = 1$$

gegeben. Da die Variable $x$ im Nenner steht und eine Division durch $0$ nicht definiert ist, darf $x$ nicht den Wert $2$ annehmen. Für den Definitionsbereich gilt in diesem Fall: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Eine Lösung dieser Gleichung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Terme auf beiden Seiten übereinstimmen. In diesem Beispiel finden wir die Zahl $x = 3$ als Lösung der Gleichung, $1/(3-2) = 1$. Folglich ist $x = 3$ ein Element der Lösungsmenge dieser Gleichung. Da keine weiteren Lösungen zu finden sind, setzt sich die Lösungsmenge nur aus diesem Element zusammen: $\mathbb{L} = \{3\}$.

Im Übrigen muss nicht jede Gleichung lösbar sein. Falls keine Lösung existiert, ist die Lösungsmenge leer: $\mathbb{L} = \varnothing$ bzw. $\mathbb{L} = \{\}$. So gibt es zum Beispiel für die Gleichung $x^2 = -1$ mit $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$ keine reellwertige Lösung. Egal welche reelle

Zahl Sie für $x$ einsetzen, die Gleichung ist nie erfüllt, denn die Quadratzahlen sind bekanntlich positiv.

Zur Ermittlung der Lösung einer Gleichung nutzen wir verschiedene zulässige Operationen (Äquivalenzumformungen), die die Lösungsmenge nicht verändern. Ziel ist es, die Gleichung schrittweise so äquivalent umzuformen, dass eine Variable auf einer Seite der Gleichung isoliert steht und die Lösung direkt abgelesen werden kann.

**Regel 3.1.**
*Die folgenden Äquivalenzumformungen verändern die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Gleichung $T_1 = T_2$ nicht.*

**Äquivalenzumformungen von Gleichungen**

*(1) Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung:*

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_2 = T_1.$$

*(2) Addition/Subtraktion eines Terms $T_3$ auf beiden Seiten einer Gleichung:*

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 + T_3 = T_2 + T_3 \text{ bzw. } T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 - T_3 = T_2 - T_3.$$

*(3) Multiplikation/Division eines Terms $T_3 \neq 0$ auf beiden Seiten einer Gleichung:*

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_3 \text{ bzw. } T_1 = T_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_2}{T_3}.$$

Neben den in dieser Regel vorgestellten Äquivalenzumformungen gibt es noch zahlreiche weitere, die im Verlauf dieses Kapitels eingeführt werden. In diesem Kurs wird zumeist am Ende einer Gleichungszeile angegeben, welche äquivalente Rechenoperation durchzuführen ist - dabei wird zumeist auf das Äquivalenzzeichen ($\Leftrightarrow$) zwischen den Umformungen verzichtet (vgl. zur Äquivalenz Abschnitt 1.1.2).

**Fortsetzung Beispiel 3.1**
Um die Gleichung $1/(x-2) = 1$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ schrittweise zu lösen, nutzen wir die in Regel 3.1 eingeführten Äquivalenzumformungen. Dazu multiplizieren wir zunächst beide Seiten mit $(x-2)$, addieren dann jeweils 2 und vertauschen die beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} &= 1 && \mid \cdot (x-2) \\ 1 &= x-2 && \mid +2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Das gesuchte Ergebnis der Gleichung $1/(x-2) = 1$ lautet $x = 3$ mit $\mathbb{L} = \{3\}$.

---

**Übungsaufgabe 3.1**
Führen Sie zur Lösung der Gleichung $2x - 5 = 3$ schrittweise Äquivalenzumformungen durch. Zeigen Sie anschließend mit Hilfe der ermittelten Lösung, dass die Gleichung nach jeder durchgeführten Äquivalenzumformung erfüllt ist.

---

### 3.1.1 Lineare Gleichungen

Die lineare Gleichung ist folgende spezielle Gleichung:

**Lineare Gleichung**

*Eine Gleichung mit einer Variablen $x$ und den beiden Konstanten $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, die sich wie folgt darstellen lässt*

**Lineare Gleichung in Normalform**

$$a \cdot x = b$$

*ist eine lineare Gleichung. Sie wird nach äquivalenter Umformung zu $ax - b = 0$ als lineare Gleichung in Normalform bezeichnet. Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen lassen sich lineare Gleichungen in die Normalform umformen, wie die folgenden Beispiele zeigen.*

**Beispiel 3.2**
Die Gleichung

$$5x - 4 = 3x + 12$$

ist eine lineare Gleichung und wie folgt äquivalent umformbar:

$$\begin{aligned} &5x - 4 = 3x + 12 && |-3x \\ &2x - 4 = 12 && |+4 \\ &2x = 16 && |:2 \\ &x = 8 \text{ mit } \mathbb{L} = \{8\}. \end{aligned}$$

Bei praktischen, insbesondere ökonomischen Anwendungen ist vielfach keine Gleichung gegeben, sondern die Aufgabe besteht zunächst darin, diese aufzustellen. Hierbei ist es wichtig, die Variable zu beschreiben, d.h. den Definitionsbereich anzugeben. Erst dann folgt die Bestimmung der Lösung.

**Beispiel 3.3**
Felix Mercator hat aktuell auf seinem Bankkonto ein Guthaben von $4.500$ Euro. Er ist als Student der Wirtschaftswissenschaften gerade in seine erste eigene Wohnung gezogen und stellt fest, dass er jeden Monat $150$ Euro mehr ausgibt, als er

monatlich an Unterstützung erhält. Nach wie vielen Monaten wird sein Guthaben aufgebraucht sein?

Felix erkennt, dass er sein Problem in Gleichungsform wie folgt darstellen kann:

$$150x = 4500,$$

wobei die Variable $x$ die Anzahl der gesuchten Monate bezeichne. Zur Lösung des Problems ist die Gleichung nach $x$ aufzulösen:

$$\begin{aligned} 150x &= 4500 \qquad |:150 \\ x &= \frac{4500}{150} = 30 \end{aligned}$$

Unter den getroffenen Annahmen wird sein Bankguthaben nach $30$ Monaten aufgebraucht sein.

Allgemein ergibt sich die Lösung einer linearen Gleichung in Normalform $ax - b = 0$, indem beide Seiten durch $a$ dividiert werden.

**Regel 3.2.**
*Eine lineare Gleichung in Normalform $ax - b = 0$ mit $a \neq 0$ hat die Lösung*

$$x = \frac{b}{a} \text{ mit } \mathbb{L} = \left\{ \frac{b}{a} \right\}.$$

**Lösung linearer Gleichung in Normalform**

---

**Übungsaufgabe 3.2**

Felix benötigt zusätzlich einen Internet- und Telefonanschluss. Er setzt sich eine Budgetobergrenze von 30 Euro monatlich. Der von ihm gewählte Basis-Tarif beinhaltet eine Grundgebühr von 15 Euro für das Internet- und Festnetztelefon. Zusätzlich kann er für 10 Cent pro Minute in Mobilfunknetze telefonieren. Damit stellt sich die Frage, wie viele Minuten Felix pro Monat unter Ausschöpfung seines Budgets in Mobilfunknetze anrufen kann?

a) Stellen Sie das Problem in Gleichungsform dar.

b) Lösen Sie die Gleichung.

---

In Gleichungen können selbstverständlich auch Brüche auftauchen. Zur Lösung sind hierbei die Regeln der Bruchrechnung zu beachten (vgl. Kapitel 2.2). Besondere Aufmerksamkeit erfordern jedoch Gleichungen mit einem linearen Term im Nenner eines Bruchs.

**Lineare Gleichung in gebrochener Form**

*Eine Gleichung mit einer Variablen $x$ und den beiden Termen $T_i = a_i \cdot x - b_i$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1{,}2)$ und $a_2 \neq 0$ sowie der Konstanten $c \in \mathbb{R}$, die sich wie folgt darstellen lässt*

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a_1 \cdot x - b_1}{a_2 \cdot x - b_2} = c \text{ mit } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{b_2}{a_2} \right\},$$

*ist eine lineare Gleichung in gebrochener Form.*

**Bruchgleichung**

Aufgrund des von $x$ abhängigen Terms $T_2$ im Nenner handelt es sich im Übrigen nicht um eine spezielle Form einer linearen Gleichung, sondern um eine Bruchgleichung, eine spezielle Bruchgleichung mit einem linearen Term im Nenner.

Da eine Division durch 0 auszuschließen ist, muss für den Term im Nenner $T_2 \neq 0$ gelten. Gemäß Regel 3.2 ist $a_2 \cdot x - b_2 \neq 0$, wenn $x \neq b_2/a_2$, so dass dieser Wert aus der Definitionsmenge auszuschließen ist. Zur Lösung der linearen Gleichung in gebrochener Form ist die Gleichung mit dem Term $T_2$ zu multiplizieren und in die Normalform zu überführen. Betrachten Sie hierzu das nachfolgende Beispiel.

**Beispiel 3.4**

Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{8}{x-3} = 2 \text{ mit } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Die Zahl 3 gehört nicht zum Definitionsbereich, denn für $x = 3$ ist der Term im Nenner gleich null. Äquivalente Umformungen führen zur Lösung:

$$\frac{8}{x-3} = 2 \qquad | \cdot (x-3)$$

$$8 = 2(x-3) \qquad | + 6$$

$$14 = 2x \qquad | : 2$$

$$x = 7 \text{ mit } \mathbb{L} = \{7\}.$$

# Lösungen zu den Übungsaufgaben

## Lösung zu Übungsaufgabe 3.1 auf S. 4

Mit Hilfe der nachfolgend aufgeführten Äquivalenzumformungen erhalten wir das gesuchte Ergebnis der Gleichung $2x - 5 = 3$:

$$\begin{array}{lll} (1) & 2x - 5 = 3 & \mid +5 \\ (2) & 2x = 8 & \mid :2 \\ (3) & x = 4 & \end{array}$$

Nun zeigen wir noch, dass die Gleichungen (1) bis (3) nach den einzelnen Äquivalenzumformungen erfüllt sind. Hierfür setzen wir jeweils $x = 4$ ein:

$$\begin{array}{lll} (1) & 2 \cdot 4 - 5 = 3 & \text{bzw. } 3 = 3 \\ (2) & 2 \cdot 4 = 8 & \text{bzw. } 8 = 8 \\ (3) & x = 4 & \text{bzw. } 4 = 4 \end{array}$$

Die Lösung der Gleichung ist somit für jede Äquivalenzumformung gültig.

## Lösung zu Übungsaufgabe 3.2 auf S. 5

a) Die Variable $x$ bezeichnet die Anzahl der Minuten, die zu Mobiltelefonen angerufen werden kann. Die zu bestimmende Gleichung lautet unter Berücksichtigung des Budgets von 30 Euro und der monatlichen Grundgebühr von 15 Euro: $30 = 15 + 0{,}1x$.

b) Die Lösung der in a) aufgestellten Gleichung ergibt sich nach folgenden Äquivalenzumformungen:

$$\begin{array}{ll} 30 = 15 + 0{,}1x & \mid -15 \\ 15 = 0{,}1x & \mid :0{,}1 \\ 150 = x & \end{array}$$

Felix kann 150 Minuten pro Monat auf Mobiltelefonen anrufen.