

Konsensuale Effizienzbewertung und –verbesserung mittels DEA
- Output- vs. Inputorientierung -

Elmar Reucher und Wilhelm Rödder

Diskussionsbeitrag Nr. 454

August 2010

Diskussionsbeiträge der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
der FernUniversität in Hagen

Herausgegeben vom Dekan der Fakultät

Alle Rechte liegen bei den Verfassern

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Präliminarien	2
3	Vom Selbstlob zur Kreuzeffizienzmatrix	5
3.1	Die Kreuzeffizienzmatrix – ein Ausweg?	5
3.2	Effizienzverbesserungspotentiale aus Sicht eines Peers	9
4	Outputveränderung einer DMU l bei Gewichtung eines Peers k	10
4.1	Radiale Outputerhöhung	10
4.2	Variable Outputveränderungen	13
5	Auswahl eines Peers	18
6	Zusammenfassung und Ausblick	21

Tabellenverzeichnis

1	In- und Outputs von fünf DMUs.	7
2	Gewichte der einzelnen DMUs, outputorientiert mit $\epsilon = 10^{-5}$	7
3	Kreuzeffizienzmatrix, outputorientiert	7
4	Kreuzeffizienzmatrix, inputorientiert	8
5	Matrix verbesserter Effizienzen, outputorientiert	12
6	Matrix verbesserter Effizienzen, inputorientiert	12
7	Lösungen von (V) für alle Peers k und alle DMUs l	15
8	Matrix maximaler Effizienzen, outputorientiert	16
9	Matrix maximaler Effizienzen, inputorientiert	17

1 Einleitung

Der vorliegende Beitrag setzt auf einen von Rödder und Reucher verfassten Artikel auf, in dem sie erstmals der Frage nachgehen, inwieweit Wirtschaftseinheiten, so genannte Decision Making Units (DMUs), ihre Effizienz aus Sicht eines Peers verbessern können (Rödder und Reucher, 2009). Motiviert durch die Arbeiten von Sexton et al. (1986) und Doyle und Green (1994) über die Aussagekraft von Kreuzeffizienzmatrizen, in denen die empirischen In- und Outputdaten aller DMUs bezüglich aller individuellen Optimalgewichte ausgewertet werden, zeigen Rödder und Reucher zunächst, wie durch radiale Inputreduktion ineffiziente Einheiten ihre Effizienz steigern können. Daraus entsteht dann eine neue Matrix, die so genannten Matrix verbesserter Effizienzen. In einem zweiten Schritt zeigen die Autoren auf, dass ineffiziente DMUs sogar noch über weitere Effizienzverbesserungspotentiale verfügen, wenn sie nicht nur radial ihre Inputs reduzieren, sondern sogar frei in der Variation ihrer Inputmengen sind. Das Ergebnis ist dann die Matrix maximaler Effizienzen.

Rödder und Reucher beschränken sich in ihren Analysen auf die rein inputorientierte Sicht unter der Annahme konstanter Skalenerträge. Da die DEA bekanntermaßen neben der inputorientierten auch eine outputorientierte Sicht gestattet, ist es nur allzu konsequent, sämtliche Überlegungen nun auch mit outputorientierter Sicht zu diskutieren und zu untersuchen, ob ähnliche Effekte zur Effizienzverbesserung ineffizienter DMUs aus Sicht eines Peers auch bei freier Outputvariation möglich sind. Bewusst zeichnen wir die Ausführungen von Rödder und Reucher (2009) teilweise wörtlich nach, damit der Leser sowohl Ähnlichkeiten als auch Unterschiede zwischen der input- und der outputorientierten Sicht besser erkennen kann.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Im zweiten Kapitel werden die verwendeten DEA-Grundmodelle, die Envelopment- und die Multiplierform, und ihre Beziehungen analog zu Rödder und Reucher (2009), nun allerdings aus

outputorientierter Sicht, vorgestellt. In Abschnitt 3.1 wird das aus dem zitierten Beitrag bekannte vierdimensionale Beispiel, bestehend aus 5 DMUs mit jeweils 2 Inputs und 2 Outputs, wieder herangezogen und zunächst die Kreuzeffizienzmatrix, jetzt aber aus outputorientierter Sicht bestimmt. Mit einem Hinweis auf die bereits weiter oben erwähnten Auswertungsmöglichkeiten dieser Matrix schließt der Abschnitt ab. In 3.2 wird kritisch diskutiert, wie denn nun eine ineffiziente DMU outputorientiert verfahren solle, um ihre Effizienz zu verbessern. Das ist Gegenstand von Kapitel 4. Dazu wird in 4.1 ein auf radialer Outputerhöhung basierendes Modell vorgestellt, welches eine Effizienzverbesserung einer Wirtschaftseinheit – jedoch aus Sicht des Peers – liefert. Bei genauerer Betrachtung besteht eine große Ähnlichkeit zu dem Grundmodell in der Envelopmentform aus Kapitel 2. Aus diesem Grunde wird in 4.2 ein beliebige Outputvariationen erlaubendes Modell entwickelt, welches erfolgreich die Idee eines Peers mit dem berechtigten Interesse der Effizienzverbesserung jeder einzelnen DMU verknüpft. Die Vorgehensweise wird an dem bereits in Abschnitt 3.1 beschriebenen vierdimensionalen Beispiel exemplifiziert. Ergebnisse sind dann die maximalen Effizienzen unter jedem potentiellen Peer, sowie die dazu gehörigen optimalen Outputs. Bei den gewählten 5 DMUs sind das $5 \cdot 5$ Effizienzen mit den dazugehörigen optimalen Outputs – die Inputs bleiben jeweils konstant. In Kapitel 5 werden die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 4 interpretiert, und es erhebt sich erneut die Frage nach der vernünftigen Wahl eines Peers. Wurde diese Frage bisher lediglich aus der Kreuzeffizienzmatrix abgeleitet, kann sie jetzt vor dem Hintergrund der Matrix maximaler Effizienzen beantwortet werden. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen die Arbeit ab.

2 Präliminarien

Gegeben seien $j = 1, \dots, J$ Wirtschaftseinheiten (DMUs) mit jeweils M Inputfaktoren und S Outputgrößen, deren zeitraumbezogene empirische Aus-

prägungen $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jm}, \dots, x_{jM})$ bzw. $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{js}, \dots, y_{jS})$ sind. Aus diesen Aktivitäten $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j), j = 1, \dots, J$ lässt sich unter Einhaltung gewisser Axiome der Technologieraum T aufspannen, was Banker, Charnes und Cooper in (Banker et al., 1984), Kapitel 3 und 4 zeigen. In Anlehnung an Shephards Vorüberlegungen (Shephard, 1970) können nun folgende Optimierungsaufgaben formuliert werden, siehe wiederum (Banker et al., 1984). Für jedes $k \in \{1, \dots, J\}$ löse

$$\begin{aligned} g_k^* &= \max g_k \\ \text{u.d.N.:} \quad g_k \mathbf{y}_k &\leq \beta_k \sum_j \tau_{kj} \mathbf{y}_j \end{aligned} \quad (\text{E})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\geq \beta_k \sum_j \tau_{kj} \mathbf{x}_j \\ \beta_k &> 0, \tau_{kj} \geq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe (E) heißt **Envelopmentform**. $(g_k^*)^{-1}$ ist die Effizienz der DMU k unter der Annahme konstanter Skalenerträge.

g_k^* bezeichnet in (E) den Faktor, mit dem DMU k sämtliche ihrer Outputs \mathbf{x}_k gleichmäßig, also radial, erhöhen muss (bei unverändertem Input \mathbf{x}_k), um effizient zu werden, und dabei in dem von allen Aktivitäten aller DMUs aufgespannten Technologieraum T bleibt. Gilt $g_k^* = 1$, so ist DMU k schon effizient. Für $g_k^* > 1$ ist sie noch ineffizient und kann erst durch die Outputerhöhung von \mathbf{y}_k zu \mathbf{y}'_k mit $\mathbf{y}'_k = g_k^* \mathbf{y}_k$ effizient werden. Das entsprechende inputputorientierte Modell unter konstanten Skalenerträgen sowie die jeweiligen Varianten bei variablen Skalenerträgen findet der Leser beispielsweise in (Rödder und Reucher, 2009), (Banker et al., 1984), (Cooper et al., 2006). (E) ist nicht linear, mittels der Variablentransformation $\nu_{kj} = \beta_k \tau_{kj}$ ergibt sich die lineare Aufgabe (P).

$$\begin{aligned} g_k^* &= \max g_k \\ \text{u.d.N.:} \quad g_k \mathbf{y}_k - \sum_j \nu_{kj} \mathbf{y}_j &\leq 0 \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} \sum_j \nu_{kj} \mathbf{x}_j &\leq \mathbf{x}_k \\ \nu_{kj} &\geq 0 \end{aligned}$$

Durch Dualisierung von (P) erhält man (D), welches lautet:

$$\begin{aligned} \text{eff}_k^{*-1} &= \min \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k \\ \text{u.d.N.: } \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k &= 1 \\ -\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j + \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j &\geq 0 \quad \forall j \\ \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Die Forderungen der Nichtnegativität der entsprechend dimensionierten Gewichtungsvektoren \mathbf{V}_k und \mathbf{U}_k für die Inputs und Outputs sind dabei komponentenweise zu verstehen. Aufgabe (D) heißt auch **Multiplierform**, die nach erneuter Variablentransformation mit einem beliebig positiven $r_k > 0$ und $\mathbf{v}_k = r_k^{-1} \mathbf{V}_k$ sowie $\mathbf{u}_k = r_k^{-1} \mathbf{U}_k$ – wegen $\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_k = r_k^{-1}$ und $-\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_j + \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_j \geq 0$ – zu der Aufgabe (Q) führt

$$\begin{aligned} \text{eff}_k^{*-1} &= \min \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_k} \\ \text{u.d.N.: } \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_j}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_j} &\geq 1 \quad \forall j \\ \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{Q})$$

Die Vermeidung partieller Ineffizienzen in (E) bzw. (P) durch Wahl strikt positiver Variabler ($\geq \epsilon > 0$) in (D) bzw. (Q) ist Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen wie beispielsweise (Ali und Seiford, 1993), (Banker et al., 1984); die Überlegungen hierzu werden als bekannt vorausgesetzt. In dieser Arbeit werden – wo nötig – partielle Ineffizienzen vermieden. Auch die Rücktransformationen von (Q) zu (D) zu (P) zu (E) hält die entsprechende Literatur bereit, so dass alle vier Modelle äquivalent sind und den gleichen optimalen Zielfunktionswert aufweisen (Seiford und Thrall, 1990).

Bei der in diesem Abschnitt vorgestellten Philosophie lobt sich die jeweilige DMU k durch Lösen einer der Aufgaben (E), (P), (D), (Q) selbst. Die Literatur hält die Überlegungen bereit, dass – falls k dennoch ineffizient ist –

eine radiale Outputerhöhung ihre Effizienz zu 1 verbessern kann. Dabei orientiert sie sich an sogenannten best-practise-DMUs. Dieser Denkansatz mag in gewissen Fälle richtig sein, in anderen ist er es nicht. Nämlich immer dann, wenn die Effizienzbewertung aller DMUs unter einer einheitlichen Sicht zu erfolgen hat; will heißen: mit einem einheitlichen Gewichtungssystem erfolgen soll. Für eine tiefere Diskussion vergleiche (Rödder und Reucher, 2009).

3 Vom Selbstlob zur Kreuzeffizienzmatrix

3.1 Die Kreuzeffizienzmatrix – ein Ausweg?

Bekanntermaßen werden für jedes k nach Lösung der Aufgabe (Q) jeweils nur die bindenden Restriktionen, d.h. die Restriktionen mit Produktivität = 1, für die weiteren Betrachtungen genutzt. Die entsprechenden Gleichungen bestimmen nämlich so genannte best-practise- Unternehmen. Alle anderen Quotienten – der so genannten other-practise- Unternehmen – bleiben unberücksichtigt. Eingang finden diese in die Kreuzeffizienzmatrix, die das gesamte Datenmaterial *aller* verfügbaren (reziproken) Quotienten zur Verfügung stellt (Sexton et al., 1986). Eine Kreuzeffizienz eff_{kl} ist nämlich der Quotient für den konkreten gewichteten Output/Input der DMU l unter der optimalen Gewichtung von k . Der mit diesen Überlegungen weniger vertraute Leser sei verwiesen auf Doyle und Green (1994), Green et al. (1996), Liang et al. (2008), Reucher et al. (2008), Wu et al. (2009).

Oftmals sind die optimalen Gewichte $(\mathbf{V}_k^*, \mathbf{U}_k^*)$ als Lösungen der Envelopment-Form (Q) bzw. (D) für eine DMU k nicht eindeutig, was i. A. auch zu unterschiedliche Kreuzeffizienzen eff_{kl} , $k \neq l$, führt (Baker und Talluri, 1997), (Doyle und Green, 1994). Zur Bestimmung einer Kreuzeffizienzmatrix schlagen Doyle und Green (1994) oder Liang et al. (2008) daher vor, noch weitere Optimierungsaufgaben zu lösen, bei der eine bestimmte Philosophie zur Bestimmung einer optimalen Gewichtung von k verfolgt wird.

Da in diesem Beitrag die Forderung nach einer konsensualen Bewertung für alle DMUs im Fokus des Interesses steht, ist folgende Forderung für den Aufbau einer Kreuzeffizienzmatrix offenbar sinnvoll: Bestimme die Gewichte $(\mathbf{V}_k^*, \mathbf{U}_k^*)$ für eine DMU k so, dass sie damit jede DMU l 'möglichst' hoch bewertet. Dieser Forderung wird folgende lineare Optimierungsaufgabe (D^*) gerecht.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_j s_j \\
 \text{u.d.N.:} \quad & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k = 1 \\
 & -\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j + \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j \geq 0 \quad \forall j \quad (D^*) \\
 & \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k = (\text{eff}_k^*)^{-1} \\
 & -\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j + \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j - s_j \leq 0 \quad \forall j \\
 & \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \geq \mathbf{0}, s_j \geq 0.
 \end{aligned}$$

$(\text{eff}_k^*)^{-1}$ bezeichnet den Zielfunktionswert von (D) und eff_k^* ist die Effizienz von DMU k gemäß Selbstbewertung. Auch die Lösung von (D^*) wollen wir mit $(\mathbf{V}_k^*, \mathbf{U}_k^*)$ bezeichnen, schließlich ist sie lediglich eines der alternativen Optima der Aufgabe (D) .

Für ein Beispiel mit zwei Inputs und zwei Outputs haben wir die entsprechenden Berechnungen durchgeführt.

Beispiel 1

Gegeben seien fünf DMUs ($j = 1, \dots, 5$) mit jeweils zwei In- und Outputs $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2})$, $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, y_{j2})$, die in Tabelle 1 aufgelistet sind.

Nach Lösen der Aufgabe (D^*) ergeben sich für jede DMU $k = 1, \dots, 5$ optimale Gewichte $\mathbf{V}_k^* = (V_{k1}^*, V_{k2}^*)$ und $\mathbf{U}_k^* = (U_{k1}^*, U_{k2}^*)$ wie in Tabelle 2.

DMU j	x_{j1}	x_{j2}	y_{j1}	y_{j2}
1	2.00	5.00	1.00	2.00
2	2.00	4.00	2.00	3.00
3	8.00	5.00	2.00	2.00
4	3.00	4.00	1.00	2.00
5	6.00	2.00	2.00	1.00

Tabelle 1: In- und Outputs von fünf DMUs.

DMU k	V_{k1}^*	V_{k2}^*	U_{k1}^*	U_{k2}^*
1	0.75	ϵ	ϵ	0.5
2	ϵ	0.25	ϵ	0.33
3	ϵ	0.33	0.17	0.33
4	ϵ	0.38	ϵ	0.50
5	ϵ	0.50	0.50	ϵ

Tabelle 2: Gewichte der einzelnen DMUs, outputorientiert mit $\epsilon = 10^{-5}$

Schließlich errechnet man für eine konkrete DMU l die Kreuzeffizienz eff_{kl} zu $eff_{kl} = \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}$. Die Matrix aller Kreuzeffizienzen $(eff_{kl})_{JJ}$ findet sich in Tabelle 3.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	0.67	1.00	0.17	0.44	0.11
$k = 2$	0.53	1.00	0.53	0.67	0.67
$k = 3$	0.50	1.00	0.60	0.63	1.00
$k = 4$	0.53	1.00	0.53	0.67	0.67
$k = 5$	0.20	0.50	0.40	0.25	1.00

Tabelle 3: Kreuzeffizienzmatrix, outputorientiert

Zum Vergleich haben wir die entsprechende Kreuzeffizienzmatrix bei Inputorientierung aus Rödder und Reucher (2009) entnommen und in Tabelle 4 angegeben.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	0.67	1.00	0.17	0.44	0.11
$k = 2$	0.50	1.00	0.60	0.63	1.00
$k = 3$	0.50	1.00	0.60	0.63	1.00
$k = 4$	0.53	1.00	0.53	0.67	0.67
$k = 5$	0.42	1.00	0.56	0.45	1.00

Tabelle 4: Kreuzeffizienzmatrix, inputorientiert

Studiert man die beiden Kreuzeffizienzmatrizen 3 und 4 etwas genauer, so stellt man fest:

- Die Selbstbewertung jeder DMU ist unabhängig von der input- oder outputorientierten Sicht (Diagonalelemente).
- Die Peers $k = 1$, $k = 3$ und $k = 4$ bewerten die anderen DMUs bei Input- und Outputorientierung gleich (Zeilenelemente).
- Keine DMU l wird bei Inputorientierung von allen Peers k genau so bewertet wie bei Outputorientierung (Spaltenelemente). So wird beispielsweise DMU 2 bei inputorientierter Sicht von DMU 5 als effizient (1.00) bewertet, bei outputorientierter Sicht aber nicht (0.50).

Doyle und Green (1994) sowie Reucher et al. (2008) diskutieren nun ausgiebig, wie aus einer solchen Kreuzeffizienzmatrix mittels gewisser Prinzipien ein Peer bestimmt werden kann, der im weitesten Sinne die Interessen aller DMUs abdeckt. Sein Gewichtungssystem soll die Outputs zu Inputs aller DMUs bewerten und somit – weg vom Selbstlob – zu einer vereinheitlichten Betrachtung führen. Es werden u.a. das Prinzip des fairsten Peers und das Prinzip des rücksichtsvollsten Peers diskutiert. Das erste wählt den Peer k , bei dem das Zeilenminimum in der Kreuzeffizienzmatrix maximal ist. Das zweite ist eine Anwendung der Minimum-Regret-Regel auf die Kreuzeffizienzmatrix. Hat man einen Peer, dient dessen Effizienzeinschätzung aller DMUs für ihre Reihung. Nicht Peer-orientierte Reihungen werden ebenfalls diskutiert, und dann beschränkt sich die Diskussion der letztgenannten Autoren

auf die Frage der Stabilität der einzelnen Reihungen, das heißt auf ihre Unabhängigkeit von dem jeweils gewählten Prinzip. Völlig offen bleibt hingegen die Frage, ob und wie eine ineffiziente DMU l ihre Effizienz aus Sicht eines Peers k verbessern kann. Das ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

3.2 Effizienzverbesserungspotentiale aus Sicht eines Peers

Der Leser mag für die folgenden Überlegungen die Kreuzeffizienzmatrix aus Tabelle 3 heranziehen und folgende Beobachtungen überprüfen:

- DMU 5 schätzt sich selbst als effizient ein und wird auch von DMU 3 als effizient gesehen. DMU 5 würde also auch unter dem Peer 3 keine Veranlassung sehen, ihre Effizienz zu verbessern.
- DMU 5 wird hingegen von DMU 1, DMU 2 und DMU 4 nicht als effizient angesehen. Es stellt sich somit die Frage, ob DMU 5 ihre Effizienz aus Sicht dieser drei DMUs noch verbessern kann. Diese Frage ist aus der Kreuzeffizienzmatrix nicht beantwortbar.
- Eine DMU, die sich selbst als ineffizient einschätzt, kann niemals von einem Peer als effizient bewertet werden, da die eigenen Gewichte optimal sind.
- DMU 1, DMU 3 und DMU 4 schätzen sich selbst als nicht effizient ein, und sie werden von allen übrigen potentiellen Peers natürlich ebenfalls als ineffizient eingeschätzt. Zwar wissen DMU 1 und 4, dass sie ihren Output mit dem Faktor 1,5 ($= (0,67)^{-1}$) erhöhen müssen, und kennt DMU 3 den entsprechenden Faktor 1,67 ($= (0,60)^{-1}$), um effizient zu werden. Welche Effizienz sich dann jedoch unter einem der potentiellen Peers einstellt, ist aus der Kreuzeffizienzmatrix wiederum nicht ersichtlich.

Entsprechende Aussagen lassen sich für die Auswertung der Kreuzeffizienzmatrix 4 bei Inputorientierung machen, man vergleiche hierzu (Rödder und Reucher, 2009).

Die sich aus diesen Beobachtungen aufdrängende Frage ist die nach einer Effizienzverbesserung einer ineffizienten DMU – aus Sicht eines vorher gewählten Peers! Und weiterhin: Gibt es Konsens unter den DMUs bzgl. solcher Wahl eines Peers? Schließlich bewerten verschiedene Peers die Output-/Input-/verhältnisse der DMUs aufgrund ihrer optimalen Gewichte verschieden. Das folgende Kapitel versucht, Antworten auf diese Fragen zu geben.

4 Outputveränderung einer DMU l bei Gewichtung eines Peers k

4.1 Radiale Outputerhöhung

Hier wird der Frage nachgegangen, inwieweit eine DMU l ihre Effizienz aus Sicht eines Peers k mittels radialer Outputerhöhung im Rahmen des von allen DMUs aufgespannten Technologieraums möglicherweise noch verbessern kann.

Es bezeichne DMU k wiederum einen (nicht zwingend effizienten) Peer, der gemäß den Aufgaben (P) und (D*) seine optimalen Lösungen g_k^* , \mathbf{v}_k^* und \mathbf{U}_k^* , \mathbf{V}_k^* bestimmt hat. Desweiteren sei angenommen, DMU l sei aus Sicht von DMU k keine best-practise-Einheit, so dass sie im Gewichtungssystem von k ineffizient ist. Damit gilt also

$$-\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l + \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l > 0.$$

Würde man nun \mathbf{y}_l auf

$$\mathbf{y}'_l = \mathbf{y}_l \cdot \frac{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}$$

erhöhen, so hätte man

$$\frac{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}'_l} = 1.$$

Ob diese Outputerhöhung allerdings bei festen Inputs technisch realisierbar ist, ist nicht gewährleistet. Die technische Zulässigkeit erzwingt man in Anlehnung an das Envelopmentmodell (P) mit der folgenden Aufgabe (A).

$$\begin{aligned} & \max q_l \\ \text{u.d.N.:} \quad & -\mathbf{U}_k^{*T} q_l \cdot \mathbf{y}_l + \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l \geq 0 \quad (\text{A}) \\ & q_l \mathbf{y}_l - \sum_j \nu_{lj} \mathbf{y}_j \leq 0 \\ & \sum_j \nu_{lj} \mathbf{x}_j \leq \mathbf{x}_l \\ & \nu_{lj} \geq 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich garantieren die beiden letzten Gruppen der Restriktionen zusammen mit den Nichtnegativitätsbedingungen die technische Zulässigkeit, wohingegen die erste Restriktion redundant ist(!). Wir führen sie dennoch mit, da sie unmittelbar die Produktivität des l in den Gewichten des k bei Outputerhöhung um den Faktor q_l erkennen lässt: $\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l / \mathbf{U}_k^{*T} q_l \cdot \mathbf{y}_l$.

Ist nämlich (q_l^0, \mathbf{v}_l^0) optimale Lösung von (A), setzt man $\mathbf{y}'_l = q_l^0 \mathbf{y}_l$ und hat damit die optimale radiale Outputerhöhung erreicht. Es fällt jedoch auf, dass wegen der Redundanz der ersten Restriktion einfach die Aufgabe (P) der DMU l gerechnet und nach dieser klassischen radialen Outputerhöhung ihre Produktivität in den Preisen des k ausgewiesen wird.

Die Bewertungen aller DMUs l durch potentielle Peers k nach ihren gemäß Selbstlob ermittelten radialen Outputerhöhungen zeigt die Matrix der verbesserten Effizienzen in Tabelle 5.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.00	1.00	0.28	0.67	0.11
$k = 2$	0.80	1.00	0.89	1.00	0.67
$k = 3$	0.75	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 4$	0.80	1.00	0.89	1.00	0.67
$k = 5$	0.30	0.50	0.67	0.38	1.00

Tabelle 5: Matrix verbesserter Effizienzen, outputorientiert

Im Vergleich zur Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 3 haben sich einige Einträge vergrößert. Damit kann man nun zwar die im letzten Abschnitt gestellte Frage der Effizienzverbesserung einzelner DMUs l unter einem Peer k beantworten, jedoch ist deren Effizienzverbesserung aus Sicht des k noch nicht ausgeschöpft. Der Nachweis dieser Aussage erfolgt im nächsten Abschnitt.

Wollte man dennoch die Vorgehensweise in (A) umsetzen, stellt sich noch die Frage, wie sich nach Outputerhöhung eines *ineffizienten* Peers k die Situation des l ändert. Zur Vermeidung von Interessenkonflikten wäre hier natürlich eine Nichtschlechterstellung des l wünschenswert. Dass dem so ist, erschließt sich durch einen einfachen Beweis, der analog zu dem bei inputorientierter Sicht geführt wird, vgl. (Rödter und Reucher, 2009), Seite 25.

Die genannten Autoren entwickeln für den Fall der Inputorientierung eine dem (A) ähnliche Optimierungsaufgabe, die ihrerseits bei radialer Inputreduktion eines Peers k und unveränderten Output die technische Realisierbarkeit garantiert. Die entsprechende Matrix verbesserter Effizienzen zeigt Tabelle 6.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.00	1.00	0.28	0.67	0.11
$k = 2$	0.75	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 3$	0.75	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 4$	0.80	1.00	0.89	1.00	0.67
$k = 5$	0.63	1.00	0.93	0.68	1.00

Tabelle 6: Matrix verbesserter Effizienzen, inputorientiert

Vergleicht man beide Tabellen 5 und 6, so fällt auf, dass für die Peers $k = 1$, $k = 3$ und $k = 4$ die inputorientierte Effizienzverbesserung der DMUs l zu den gleichen Ergebnissen wie die outputorientierte führt. Diese Aussage gilt nicht für die Peers $k = 2$ und $k = 5$. Insofern wiederholen sich hier die Beobachtungen zu denen bei den (nicht verbesserten) Kreuzeffizienzen in den Tabellen 3 und 4.

4.2 Variable Outputveränderungen

Bisher waren Effizienzverbesserungen ausschließlich durch radiale Outputerhöhungen möglich. Diese strikte Forderung lässt sich jedoch durch Lösen folgender Aufgabe lockern, bei der der gesamte Outputvektor \mathbf{z}_l variabel gehalten wird. Diese Verallgemeinerung wird dadurch möglich, dass feste Input- und Outputpreise \mathbf{V}_k^* , \mathbf{U}_k^* des Peers k bekannt sind. Die Aufgabe (V) heißt nun

$$\begin{aligned}
 & \max \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l \\
 \text{u.d.N.:} \quad & -\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l + \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l \geq 0 \\
 & \mathbf{z}_l - \sum_j \nu_{lj} \mathbf{y}_j \leq 0 \\
 & \sum_j \nu_{lj} \mathbf{x}_j \leq \mathbf{x}_l \\
 & \nu_{lj} \geq 0
 \end{aligned} \tag{V}$$

Wiederum garantieren die beiden unteren Gruppen der Restriktionen zusammen mit den Nichtnegativitätsbedingungen die technische Zulässigkeit von $(\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_l)$ gemäß der modifizierten Envelopmentform (P). Auch hier lässt sich aus der ersten Restriktion die Produktivität des l in den Preisen von k darstellen, wobei diese Restriktion – wie schon in (A) – redundant ist. Zur weiteren Interpretation von (V) bedenke man, dass sowohl \mathbf{V}_k^* als auch \mathbf{x}_l – und damit auch $\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l$ – fest sind. Durch die Maximierung der Zielfunktion wird also ein optimaler (nicht notwendigerweise maximaler!) Output

bestimmt, der unter den Gewichten des Peers k die Effizienzverbesserung bestmöglich ausschöpft. Damit sind dann zwei Mängel behoben, die in dieser Arbeit bereits weiter oben benannt wurden: Die Effizienzen der DMUs l unter dem Peer k sind berechenbar und sie sind sogar optimal ausgeschöpft. Das Ergebnis wird eine Matrix maximaler Effizienzen sein, in der jedes Element größer oder gleich als dem der Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 3 auf Seite 7 und sogar als dem der verbesserten Effizienzen in Tabelle 5 auf Seite 12 ist. Um diese Anmerkungen zu verdeutlichen, wenden wir uns wieder dem vierdimensionalen Beispiel 1 zu.

Beispiel 2

In Fortführung des Beispiels 1 sind in der folgenden Tabelle 7 für die potentiellen Peers k die Lösungen von (V) für alle DMUs l dargestellt. In den jeweiligen Spalten stehen die (unveränderten) Inputs x_l und die optimierten Outputs z_l^* , in der letzten Zeile die damit unter den Gewichten von Peer k sich ergebenden Effizienzen $eff_{k,l}^*$. Sämtliche Lösungen wurden mit der Software Lingo (Lingo, 2010) ermittelt.

	DMU l				
Peer $k = 1$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
x_{l1}	2.00	2.00	8.00	3.00	6.00
x_{l2}	5.00	4.00	5.00	4.00	2.00
z_{l1}^*	2.00	2.00	2.50	2.00	1.00
z_{l2}^*	3.00	3.00	3.75	3.00	2.00
$eff_{k,l}^*$	1.00	1.00	0.31	0.67	0.22
Peer $k = 2$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
x_{l1}	2.00	2.00	8.00	3.00	6.00
x_{l2}	5.00	4.00	5.00	4.00	2.00
z_{l1}^*	2.20	2.00	2.50	2.00	0.00
z_{l2}^*	3.40	3.00	3.75	3.00	1.50
$eff_{k,l}^*$	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00

	DMU l				
Peer $k = 3$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
x_{l1}	2.00	2.00	8.00	3.00	6.00
x_{l2}	5.00	4.00	5.00	4.00	2.00
z_{l1}^*	2.20	2.00	2.50	2.00	1.00
z_{l2}^*	3.40	3.00	3.75	3.00	1.50
$eff_{k,l}^*$	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00
Peer $k = 4$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
x_{l1}	2.00	2.00	8.00	3.00	6.00
x_{l2}	5.00	4.00	5.00	4.00	2.00
z_{l1}^*	2.20	2.00	2.50	2.00	0.00
z_{l2}^*	3.40	3.00	3.75	3.00	1.50
$eff_{k,l}^*$	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00
Peer $k = 5$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
x_{l1}	2.00	2.00	8.00	3.00	6.00
x_{l2}	5.00	4.00	5.00	4.00	2.00
z_{l1}^*	2.20	2.00	3.60	2.20	2.00
z_{l2}^*	3.40	3.00	3.20	2.90	1.00
$eff_{k,l}^*$	0.44	0.50	0.72	0.55	1.00

Tabelle 7: Lösungen von (V) für alle Peers k und alle DMUs l

Wie sich bei konstanten Inputs die Outputs gegenüber der Ausgangssituation verändern, zeigt der Vergleich von Tabelle 7 und Tabelle 1 auf Seite 7. Wahlweise greifen wir Peer $k = 3$ heraus; unter seinen Gewichten verändert DMU $l = 1$ die Outputs von (1.00, 2.00) auf (2.20, 3.40), DMU $l = 3$ von (2.00, 2.00) auf (2.50, 3.75), DMU $l = 4$ von (1.00, 2.00) auf (2.00, 3.00) und DMU $l = 5$ von (2.00, 1.00) auf (1.00, 1.50); bei DMU $l = 2$ bleiben die Outputs unverändert. Die DMUs l wählen also, je nach Lage, Outputerhöhung, -beibehaltung,- oder sogar -reduktion.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.00	1.00	0.31	0.67	0.22
$k = 2$	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00
$k = 3$	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00
$k = 4$	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00
$k = 5$	0.44	0.50	0.72	0.55	1.00

Tabelle 8: Matrix maximaler Effizienzen, outputorientiert

Aus den Ergebnissen der Tabelle 7 resultiert die Matrix maximaler Effizienzen in Tabelle 8, die wir nun genauer studieren. Ihre Einträge sind – natürlich – alle größer oder gleich denen der Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 3 auf Seite 7 und auch denen der Matrix verbesserter Effizienzen in Tabelle 5 auf Seite 12. Letzterer Tatbestand soll zweifach kommentiert werden: spaltenweise und zeilenweise.

Zunächst betrachte man beispielsweise Spalte $l = 3$. Obwohl es DMU $l = 3$ bereits unter radialer Outputerhöhung in Tabelle 5 gelungen war (self-appraisal), sich effizient zu machen, führte diese Outputerhöhung aus Sicht aller Peers $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$ und $k = 5$ noch zu unbefriedigenden Bewertungen 0.28, 0.89, 0.89 bzw. 0.67. Erst die freie Variationsmöglichkeit der Outputs in Aufgabe (V) lässt DMU $l = 3$ nunmehr auch im Licht dieser Peers mit 0.31, 1.00, 1.00 und 0.72 besser dastehen; andere Spalten zeigen ähnliche Effekte. Nun zur zeilenweisen Betrachtung: Zeile k in den Tabellen 3, 5 und 8 zeigt jeweils die Effizienzen aller DMUs l unter optimalen Gewichten des Peers k ; in Tabelle 3 bei originalen Outputs der DMUs l , in Tabelle 5 bei (radial) erhöhten Outputs gemäß Aufgabe (A) und in Tabelle 8 bei optimierten Outputs gemäß (V). Das Hauptaugenmerk liegt auf Tabelle 8: Offensichtlich zeigen die Zeilen $k = 2$, $k = 3$ und $k = 4$ durchgehend hohe Effizienzen nahe 1, im Gegensatz zu den übrigen Zeilen. Kann daraus ein Schluss auf die Wahl eines oder mehrerer besten Peers gezogen werden? Mehr dazu in Kapitel 5.

Nun wollen wir die Matrix maximaler Effizienzen in Tabelle 8 noch mit der bei Inputorientierung in Tabelle 9 vergleichen, die aus (Rödter und Reucher,

2009) entnommen ist.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.00	1.00	0.67	1.00	0.33
$k = 2$	0.94	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 3$	0.94	1.00	1.00	0.90	1.00
$k = 4$	1.00	1.00	0.89	1.00	0.67
$k = 5$	0.75	1.00	1.00	0.75	1.00

Tabelle 9: Matrix maximaler Effizienzen, inputorientiert

Beim Vergleich beider Matrizen in den Tabellen 8 und 9 ist festzustellen, dass es nun keinen Peer k mehr gibt, der bei variabler Outputveränderung (und konstanten Inputs) die anderen DMUs genau so bewertet wie bei variabler Inputveränderung (und konstanten Outputs). Output- und inputorientierte Sichten führen also hier zu anderen Effizienzbewertungen!

Nachdem Aufgabe (V) vorgestellt und anhand konkreter Daten exemplifiziert wurde, folgen nun einige wichtige Ergänzungen. So wollen wir wiederum – wie schon zum Ende von Abschnitt 4.1 – die Frage stellen, ob die Outputerhöhung eines ineffizienten Peers seine Produktivitätsschätzungen der übrigen DMUs negativ beeinflusst.

Das ist also die Frage nach der Stabilität der Produktivitätseinschätzungen der DMU l unter Gewichten des Peers k , falls Letzterer eine effizienzverbessernde Outputerhöhung vornimmt.

Es sei also $g_k^* > 1$ optimaler Zielfunktionswert von (P) auf Seite 3. Man ersetzt $\mathbf{y}'_k = g_k^* \mathbf{y}_k$ und $\mathbf{y}'_l = \mathbf{y}_l$, $l \neq k$ und berechnet die abgewandelte Aufgabe

$$\begin{aligned}
 & \max \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l \\
 \text{u.d.N.:} \quad & -\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l + \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l \geq 0 \quad (\mathbf{V}') \\
 & \mathbf{y}_l - \sum_j \nu_{lj} \mathbf{y}'_j \leq 0 \\
 & \sum_j \nu_{lj} \mathbf{x}_j \leq \mathbf{x}_l \\
 & \nu_{lj} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Es gilt dann folgender Satz.

Satz 1 *Ist \mathbf{z}_l^0 optimale Lösung von (V) und \mathbf{z}_l' optimale Lösung von (V'), so gilt*

$$\frac{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l'} \leq \frac{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l^0}.$$

Zum Beweis dieses Satzes überlegt man, dass jede zulässige Lösung von (V) auch zulässig ist für (V'), da $\mathbf{y}'_k \geq \mathbf{y}_k$ und $\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}_j$ für $j \neq k$. Daraus folgt $\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l' \geq \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{z}_l^0$ und wegen konstantem $\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l$ die Behauptung.

Die Hoffnung, dass sich durch Effizienzverbesserung des Peers keine Effizienzverschlechterung der von ihm bewerteten DMUs einstellt, hat sich mit Satz 1 bestätigt. Die Wahl eines Peers muss also nicht davon abhängen, ob er bereits effizient ist oder nicht.

Wir haben die Aufgabe (V') für alle Peers k und alle DMUs l gerechnet und sind zu identischen Effizienzen wie bei der Lösung von (V) gekommen. Es ist jedoch kaum anzunehmen, dass diese Übereinstimmung immer gilt.

5 Auswahl eines Peers

Ausgegangen waren wir von den Arbeiten der Autoren Doyle und Green (1994) sowie Reucher et al. (2008). Dort wurden jeweils Auswahlkriterien für kompromissfähige Peers diskutiert, deren Rankings nebst weiteren Rangordnungen der DMUs vorgestellt und schließlich von Reucher et al. (2008) einer vergleichenden Analyse unterzogen. Vor dem Hintergrund der in den Kapiteln 3 und 4 dargestellten Ergebnisse stellt sich nun erneut die Frage nach der Auswahl eines 'guten' Peers: Dazu soll in Abweichung von den oben zitierten Arbeiten die Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 3, weiterhin aber auch die die Matrix verbesserter Effizienzen in Tabelle 5 sowie die maximaler Effizienzen in Tabelle 8 zu Rate gezogen werden.

Die Auswertung der Kreuzeffizienzmatrix ist schnell skizziert. Bei Wahl des Peers k mit maximaler schlechtester Effizienzbewertung aller DMUs bieten sich $k = 2$ und $k = 4$ an; mit schlechtester Kreuzeffizienz von 0.53. Der Leser überprüfe das Ergebnis anhand von Tabelle 3 auf Seite 7. Die Wahl des Peers, der das maximale Bedauern aller DMUs minimiert – rücksichtsvollster Peer – fällt auf $k = 3$; die Angaben sind schnell nachvollzogen. Anzumerken ist, dass bei Wahl der rücksichtsvollsten Peers die DMUs keine Chance haben, sich im Sinne des Peers durch Outputveränderung zu verbessern. Das ist bei der Auswertung der Matrix verbesserter Effizienzen bereits durch radiale Outputerhöhung geschehen. Wie man leicht anhand von Tabelle 5 nachvollzieht, fällt das Ergebnis zu den beiden Kriterien – fairster und rücksichtsvollster Peer – auf die Wahl von $k = 3$. Interessanterweise ändert sich das Ergebnis bei Auswertung der Matrix maximaler Effizienzen aus Tabelle 8, hier sind $k = 2$ und $k = 4$ fairste und zugleich auch rücksichtsvollste Peers.

Die Auswertung der Kreuzeffizienzmatrix, der Matrix verbesserter Effizienzen und der Matrix maximaler Effizienzen führen zu unterschiedlichen Ergebnissen. War vor und nach radialer Effizienzverbesserung Peer $k = 3$ fairste DMU, so sind es nach optimierter Effizienzverbesserung $k = 2$ und $k = 4$. Ihre Einschätzungen empfinden alle DMUs nahezu gleichermaßen als fair und als rücksichtsvoll. Nach Lektüre des Beitrags dürfte klar sein, dass die Matrix maximaler Effizienzen in sofern Priorität gegenüber den beiden anderen Matrizen hat, als in ihr optimale Outputvariationen bereits stattgefunden haben, was dem konsensualen Gedanken stark entgegenkommt.

Bisher wurden die Überlegungen an Effizienzen ausgerichtet, jetzt sollen auch die sie bewirkenden Outputs zur Analyse hinzugezogen werden. Auf Seite 7 zeigten wir in Tabelle 1 die originalen Outputs (und Inputs), sowie die Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 3. Die DMUs $l = 1$, $l = 3$ und $l = 4$ sind selbst nach ihrer eigenen Einschätzung – self-appraisal – ineffizient, die übrigen effizient. $l = 1$, $l = 3$ und $l = 4$ werden nach radialer Outputerhöhung effizient.

Dazu müssen sie ihre originalen Outputs um den Faktor $1.5 = (0.67)^{-1}$ bzw. $1.67 = (0.60)^{-1}$ erweitern. Die Effizienzbewertungen in den Gewichten aller potentiellen Peers k nach dieser Prozedur liefert dann Tabelle 5: Die Spalten 1, 3 und 4 haben sich verändert, die übrigen nicht. Trotz dieser Veränderungen bleibt $k = 3$ der fairste als auch der rücksichtsvollste Peer.

Auf der Seite 15 in Tabelle 7 sind die optimalen Outputveränderungen und die dazugehörigen Effizienzen aus Sicht aller Peers k dargestellt: DMU $l = 4$ müsste unter dem Peer $k = 3$ zwar noch stärker als radial (Faktor $1.5 = (0.67)^{-1}$) ihre Outputs von (1,2) auf (2,3) erhöhen, Peer $k = 5$ eröffnet jedoch eine interessante andere Möglichkeit, nämlich die einer geringeren als radial erforderlichen Erweiterung des Outputs 2 von 2.00 auf 2.90 bei einer gleichzeitig stärker als radial erforderlichen Outputerhöhung des Outputs 1 von 1.00 auf 2.20. Es ist noch ein weiterer Effekt beobachtbar. Erst durch die freie Wahl von Outputänderungen gelingt es DMU $l = 4$, nicht nur selber maximal effizient zu werden (von (1,2) auf (2,3)), sondern sie wird damit auch zugleich aus Sicht des Peers $k = 3$ als effizient eingestuft. Auch DMU $l = 5$ war bereits nach radialer Outputerhöhung effizient. Die freie Wahl der Outputänderungen führt hier jedoch zur Empfehlung, sogar Output 1 zu erhöhen. Dieser Substitutionseffekt von Outputs ist typisch für die neue Methode.

Zur Verdeutlichung werden die Outputveränderung bei Wahl des Peers $k = 3$ nochmal dargestellt:

	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
von originalen					
Outputs y_{l1}, y_{l2}	1.00, 2.00	2.00, 3.00	2.00, 2.00	1.00, 2.00	2.00, 1.00
	↓	↓	↓	↓	↓
zu optimalen					
Outputs z_{l1}, z_{l2}	2.20, 3.40	2.00, 3.00	2.50, 3.75	2.00, 3.00	1.00, 1.50

Rödder und Reucher (2009) weisen auch für den inputorientierten Fall ähnliche (Substitutions-)Effekte nach.

Unter Peer $k = 3$ ist darüberhinaus eine Vereinheitlichungstendenz erkennbar: Alle DMUs streben ein Outputverhältnis von etwa 1:1.5 an. Im Outputraum liegen die entsprechenden Punkte also fast auf einer Geraden – und das bei stark variierenden Input, vgl. Tabelle 1 auf Seite 7. Ob solch eine Vereinheitlichung bei konsensualer Wahl eines Peers eine erwünschte Begleiterscheinung ist, bleibt an dieser Stelle offen. Die Frage hängt natürlich stark davon ab, inwieweit eine übergeordnete Instanz aller DMUs sowohl hinsichtlich eines gemeinsamen Bewertungssystems als auch bezüglich der Ausbringungsstruktur nach solchen Vereinheitlichungstendenzen strebt.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Anders als in zahlreichen Publikationen zur DEA, in denen jede Wirtschaftseinheit ihre Effizienz aus eigener Sicht bestmöglich bewertet, verfolgt der vorliegende Beitrag das Ziel einer 'konsensualen Bewertung' der Effizienzen *aller* DMUs aus Sicht eines oder mehrerer Peers. Zur Überwindung der inhärenten Schwäche im Prinzip 'Selbstbewertung' geht man auf die von Doyle und Green und Reucher et al. übernommene Idee der Effizienzbewertung mittels der Kreuzeffizienzmatrix über. Vom Anspruch geleitet, über Auswertungsmöglichkeiten der Matrix hinaus auch Handlungsempfehlungen zur Effizienzsteigerung ineffizienter Einheiten abzuleiten, werden mathematische Modelle entwickelt, mit deren Lösungen die Matrix verbesserter und die Matrix maximaler Effizienzen aufgebaut werden. Mit der Matrix maximaler Effizienzen gelingt es, Wirtschaftseinheiten 'so gut wie möglich' durch einen Peer zu bewerten, was durch die Flexibilität in der Effizienzsteigerung von Wirtschaftseinheiten durch Outputerhöhung, konstante Outputs als auch Outputreduktion möglich wird. Damit ist der Grundstein für die Umsetzung einer konsensualen Entscheidungsfindung geschaffen. Das Ganze wird ausführlich für fünf DMUs mit jeweils zwei In- und Outputs exemplifiziert.

Mit der vorliegenden und der Arbeit von (Rödder und Reucher, 2009) sind nunmehr für den Fall konstanter Skalenerträge sämtliche input- und outputorientierten Modelle und deren Zusammenhänge bekannt, die zur Berechnung der Matrix der Kreuzeffizienzen, der verbesserter Effizienzen und der maximaler Effizienzen benötigt werden. Ziel weiterer Forschungsaufgaben wird die Suche nach praxisrelevanten Kriterien zur Peerauswahl sein, an denen sich sämtliche DMUs auszurichten haben. Darüberhinaus sind Modelle unter der Annahme konstanter Skalenerträge auf den Fall variabler Skalenerträge zu übertragen und zu studieren. Ebenso wird selbstverständlich die in Kapitel angesprochene Vereinheitlichungstendenz auf ihre Praxistauglichkeit zu überprüfen sein.

Literatur

- Ali, A. I. und Seiford, L. M. Computational accuracy and infinitesimals in data envelopment analysis. *Infor*, 31:290–297, 1993.
- Baker, P. C. und Talluri, S. A closer look at the use of data envelopment analysis for technology selection. *Computers & Industrial Engineering*, 32:101–108, 1997.
- Banker, R. D., Charnes, A. und Cooper, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30:1078–1091, 1984.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. und Tone, K. *Introduction to Data Envelopment Analysis and its Uses with DEA-Solver Software and References*. Springer, New York, 2006.
- Doyle, J. und Green, R. Efficiency and cross-efficiency in dea: Derivations, meanings and uses. *Journal of Operations Research*, 45:567–578, 1994.
- Green, R. H., Doyle, J. R. und Cook, W. D. Preference voting and project ranking using dea and cross-evaluation. *European Journal of Operational Research*, 90:461–472, 1996.
- Liang, L., Wu, J., Cook, W. D. und Zhu, J. The dea game cross-efficiency model and its nash equilibrium. *Operations Research*, 56:1278–1288, 2008.
- Lingo. www.lingo.com. 2010.
- Rödder, W. und Reucher, E. Konsensuale Effizienzbewertung und -verbesserung - Untersuchungen mittels der Data Envelopment Analysis. *Diskussionsbeitrag der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft der FernUniversität in Hagen*, 443, 2009.

Reucher, E., Rödder, W., Lo, M.-C. und Kopittke, H. Unternehmensranking mittels Kreuzeffizienzen - eine Anwendung für einen Halbleiterkonzern. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB)*, 78:289–306, 2008.

Seiford, L. M. und Thrall, R. M. Recent developments in dea - the mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Econometrics*, 46:7–38, 1990.

Sexton, T. R., Silkman, R. H. und Hogan, A. J. Data envelopment analysis: Critique and extensions. In Silkman, R. H., editor, *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*, pages 71–89. Jossey-bass, San Francisco, 1986.

Shephard, D. *The Theory of Cost and Production Functions*. Princeton University Press, N.J., 1970.

Wu, J., Liang, L. und Chen, Y. Dea game cross-efficiency approach to olympic rankings. *Omega*, 37:909–918, 2009.

Die Diskussionspapiere ab Nr. 183 (1992) bis heute, können Sie im Internet unter <http://www.fernuni-hagen.de/FBWIWI/> einsehen und zum Teil downloaden.

Die **Titel** der Diskussionspapiere von Nr 1 (1975) bis 182 (1991) können bei Bedarf in der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft angefordert werden:

FernUniversität, z. Hd. Frau Huber oder Frau Mette, Postfach 940, 58084 Hagen

Die Diskussionspapiere selber erhalten Sie nur in den Bibliotheken.

Nr	Jahr	Titel	Autor/en
322	2001	Spreading Currency Crises: The Role of Economic Interdependence	Berger, Wolfram Wagner, Helmut
323	2002	Planung des Fahrzeugumschlags in einem Seehafen-Automobilterminal mittels eines Multi-Agenten-Systems	Fischer, Torsten Gehring, Hermann
324	2002	A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem	Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann Mack, Daniel
325	2002	Die Wahrheit entscheidungstheoretischer Maximen zur Lösung von Individualkonflikten - Unsicherheitssituationen -	Mus, Gerold
326	2002	Zur Abbildungsgenauigkeit des Gini-Koeffizienten bei relativer wirtschaftlicher Konzentration	Steinrücke, Martin
327	2002	Entscheidungsunterstützung bilateraler Verhandlungen über Auftragsproduktionen - eine Analyse aus Anbietersicht	Steinrücke, Martin
328	2002	Die Relevanz von Marktzinssätzen für die Investitionsbeurteilung – zugleich eine Einordnung der Diskussion um die Marktzinsmethode	Terstege, Udo
329	2002	Evaluating representatives, parliament-like, and cabinet-like representative bodies with application to German parliament elections 2002	Tangian, Andranik S.
330	2002	Konzernabschluss und Ausschüttungsregelung im Konzern. Ein Beitrag zur Frage der Eignung des Konzernabschlusses als Ausschüttungsbemessungsinstrument	Hinz, Michael
331	2002	Theoretische Grundlagen der Gründungsfinanzierung	Bitz, Michael
332	2003	Historical background of the mathematical theory of democracy	Tangian, Andranik S.
333	2003	MCDM-applications of the mathematical theory of democracy: choosing travel destinations, preventing traffic jams, and predicting stock exchange trends	Tangian, Andranik S.

334	2003	Sprachregelungen für Kundenkontaktmitarbeiter – Möglichkeiten und Grenzen	Fließ, Sabine Möller, Sabine Momma, Sabine Beate
335	2003	A Non-cooperative Foundation of Core-Stability in Positive Externality NTU-Coalition Games	Finus, Michael Rundshagen, Bianca
336	2003	Combinatorial and Probabilistic Investigation of Arrow's dictator	Tangian, Andranik
337	2003	A Grouping Genetic Algorithm for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows	Pankratz, Giselher
338	2003	Planen, Lernen, Optimieren: Beiträge zu Logistik und E-Learning. Festschrift zum 60 Geburtstag von Hermann Gehring	Bortfeldt, Andreas Fischer, Torsten Homberger, Jörg Pankratz, Giselher Strangmeier, Reinhard
339a	2003	Erinnerung und Abruf aus dem Gedächtnis Ein informationstheoretisches Modell kognitiver Prozesse	Rödder, Wilhelm Kuhlmann, Friedhelm
339b	2003	Zweck und Inhalt des Jahresabschlusses nach HGB, IAS/IFRS und US-GAAP	Hinz, Michael
340	2003	Voraussetzungen, Alternativen und Interpretationen einer zielkonformen Transformation von Periodenerfolgsrechnungen – ein Diskussionsbeitrag zum LÜCKE-Theorem	Terstege, Udo
341	2003	Equalizing regional unemployment indices in West and East Germany	Tangian, Andranik
342	2003	Coalition Formation in a Global Warming Game: How the Design of Protocols Affects the Success of Environmental Treaty-Making	Eyckmans, Johan Finus, Michael
343	2003	Stability of Climate Coalitions in a Cartel Formation Game	Finus, Michael van Ierland, Ekko Dellink, Rob
344	2003	The Effect of Membership Rules and Voting Schemes on the Success of International Climate Agreements	Finus, Michael J.-C., Altamirano-Cabrera van Ierland, Ekko
345	2003	Equalizing structural disproportions between East and West German labour market regions	Tangian, Andranik
346	2003	Auf dem Prüfstand: Die geldpolitische Strategie der EZB	Kißmer, Friedrich Wagner, Helmut

347	2003	Globalization and Financial Instability: Challenges for Exchange Rate and Monetary Policy	Wagner, Helmut
348	2003	Anreizsystem Frauenförderung – Informationssystem Gleichstellung am Fachbereich Wirtschaftswissenschaft der FernUniversität in Hagen	Fließ, Sabine Nonnenmacher, Dirk
349	2003	Legitimation und Controller	Pietsch, Gotthard Scherer, Ewald
350	2003	Controlling im Stadtmarketing – Ergebnisse einer Primärerhebung zum Hagener Schaufenster-Wettbewerb	Fließ, Sabine Nonnenmacher, Dirk
351	2003	Zweiseitige kombinatorische Auktionen in elektronischen Transportmärkten – Potenziale und Probleme	Pankratz, Giselher
352	2003	Methodisierung und E-Learning	Strangmeier, Reinhard Bankwitz, Johannes
353 a	2003	A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem	Mack, Daniel Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
353 b	2004	Übernahmeangebote und sonstige öffentliche Angebote zum Erwerb von Aktien – Ausgestaltungsmöglichkeiten und deren Beschränkung durch das Wertpapiererwerbs- und Übernahmegesetz	Wirtz, Harald
354	2004	Open Source, Netzeffekte und Standardisierung	Maaß, Christian Scherer, Ewald
355	2004	Modesty Pays: Sometimes!	Finus, Michael
356	2004	Nachhaltigkeit und Biodiversität	Endres, Alfred Bertram, Regina
357	2004	Eine Heuristik für das dreidimensionale Strip-Packing-Problem	Bortfeldt, Andreas Mack, Daniel
358	2004	Netzwerkökonomik	Martiensen, Jörn
359	2004	Competitive versus cooperative Federalism: Is a fiscal equalization scheme necessary from an allocative point of view?	Arnold, Volker
360	2004	Gefangenendilemma bei Übernahmeangeboten? Eine entscheidungs- und spieltheoretische Analyse unter Einbeziehung der verlängerten Annahmefrist gem. § 16 Abs. 2 WpÜG	Wirtz, Harald

361	2004	Dynamic Planning of Pickup and Delivery Operations by means of Genetic Algorithms	Pankratz, Giselher
362	2004	Möglichkeiten der Integration eines Zeitmanagements in das Blueprinting von Dienstleistungsprozessen	Fließ, Sabine Lasshof, Britta Meckel, Monika
363	2004	Controlling im Stadtmarketing - Eine Analyse des Hagener Schaufensterwettbewerbs 2003	Fließ, Sabine Wittko, Ole
364	2004	Ein Tabu Search-Verfahren zur Lösung des Timetabling-Problems an deutschen Grundschulen	Desef, Thorsten Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
365	2004	Die Bedeutung von Informationen, Garantien und Reputation bei integrativer Leistungserstellung	Prechtel, Anja Völker-Albert, Jan-Hendrik
366	2004	The Influence of Control Systems on Innovation: An empirical Investigation	Littkemann, Jörn Derfuß, Klaus
367	2004	Permit Trading and Stability of International Climate Agreements	Altamirano-Cabrera, Juan-Carlos Finus, Michael
368	2004	Zeitdiskrete vs. zeitstetige Modellierung von Preismechanismen zur Regulierung von Angebots- und Nachfragemengen	Mazzoni, Thomas
369	2004	Marktversagen auf dem Softwaremarkt? Zur Förderung der quelloffenen Softwareentwicklung	Christian Maaß Ewald Scherm
370	2004	Die Konzentration der Forschung als Weg in die Sackgasse? Neo-Institutionalistische Überlegungen zu 10 Jahren Anreizsystemforschung in der deutschsprachigen Betriebswirtschaftslehre	Süß, Stefan Muth, Insa
371	2004	Economic Analysis of Cross-Border Legal Uncertainty: the Example of the European Union	Wagner, Helmut
372	2004	Pension Reforms in the New EU Member States	Wagner, Helmut
373	2005	Die Bundestrainer-Scorecard Zur Anwendbarkeit des Balanced Scorecard Konzepts in nicht-ökonomischen Fragestellungen	Eisenberg, David Schulte, Klaus

374	2005	Monetary Policy and Asset Prices: More Bad News for „Benign Neglect“	Berger, Wolfram Kißner, Friedrich Wagner, Helmut
375	2005	Zeitstetige Modellbildung am Beispiel einer volkswirtschaftlichen Produktionsstruktur	Mazzoni, Thomas
376	2005	Economic Valuation of the Environment	Endres, Alfred
377	2005	Netzwerkökonomik – Eine vernachlässigte theoretische Perspektive in der Strategie-/Marketingforschung?	Maaß, Christian Scher, Ewald
378	2005	Diversity management`s diffusion and design: a study of German DAX-companies and Top-50-U.S.-companies in Germany	Süß, Stefan Kleiner, Markus
379	2005	Fiscal Issues in the New EU Member Countries – Prospects and Challenges	Wagner, Helmut
380	2005	Mobile Learning – Modetrend oder wesentlicher Bestandteil lebenslangen Lernens?	Kuszpa, Maciej Scher, Ewald
381	2005	Zur Berücksichtigung von Unsicherheit in der Theorie der Zentralbankpolitik	Wagner, Helmut
382	2006	Effort, Trade, and Unemployment	Altenburg, Lutz Brenken, Anke
383	2006	Do Abatement Quotas Lead to More Successful Climate Coalitions?	Altamirano-Cabrera, Juan-Carlos Finus, Michael Dellink, Rob
384	2006	Continuous-Discrete Unscented Kalman Filtering	Singer, Hermann
385	2006	Informationsbewertung im Spannungsfeld zwischen der Informationstheorie und der Betriebswirtschaftslehre	Reucher, Elmar
386	2006	The Rate Structure Pattern: An Analysis Pattern for the Flexible Parameterization of Charges, Fees and Prices	Pleiß, Volker Pankratz, Giselher Bortfeldt, Andreas
387a	2006	On the Relevance of Technical Inefficiencies	Fandel, Günter Lorth, Michael
387b	2006	Open Source und Wettbewerbsstrategie - Theoretische Fundierung und Gestaltung	Maaß, Christian
388	2006	Induktives Lernen bei unvollständigen Daten unter Wahrung des Entropieprinzips	Rödter, Wilhelm

389	2006	Banken als Einrichtungen zur Risikotransformation	Bitz, Michael
390	2006	Kapitalerhöhungen börsennotierter Gesellschaften ohne börslichen Bezugsrechtshandel	Terstege, Udo Stark, Gunnar
391	2006	Generalized Gauss-Hermite Filtering	Singer, Hermann
392	2006	Das Göteborg Protokoll zur Bekämpfung grenzüberschreitender Luftschadstoffe in Europa: Eine ökonomische und spieltheoretische Evaluierung	Ansel, Wolfgang Finus, Michael
393	2006	Why do monetary policymakers lean with the wind during asset price booms?	Berger, Wolfram Kißner, Friedrich
394	2006	On Supply Functions of Multi-product Firms with Linear Technologies	Steinrücke, Martin
395	2006	Ein Überblick zur Theorie der Produktionsplanung	Steinrücke, Martin
396	2006	Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle	Timo Kubach, Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
397	2006	C&P Software for a cutting problem of a German wood panel manufacturer – a case study	Papke, Tracy Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
398	2006	Nonlinear Continuous Time Modeling Approaches in Panel Research	Singer, Hermann
399	2006	Auftragsterminierung und Materialflussplanung bei Werkstattfertigung	Steinrücke, Martin
400	2006	Import-Penetration und der Kollaps der Phillips-Kurve	Mazzoni, Thomas
401	2006	Bayesian Estimation of Volatility with Moment-Based Nonlinear Stochastic Filters	Grothe, Oliver Singer, Hermann
402	2006	Generalized Gauss-Hermite Filtering for Multivariate Diffusion Processes	Singer, Hermann
403	2007	A Note on Nash Equilibrium in Soccer	Sonnabend, Hendrik Schlepütz, Volker
404	2007	Der Einfluss von Schaufenstern auf die Erwartungen der Konsumenten - eine explorative Studie	Fließ, Sabine Kudermann, Sarah Trell, Esther
405	2007	Die psychologische Beziehung zwischen Unternehmen und freien Mitarbeitern: Eine empirische Untersuchung des Commitments und der arbeitsbezogenen Erwartungen von IT-Freelancern	Süß, Stefan
406	2007	An Alternative Derivation of the Black-Scholes Formula	Zucker, Max Singer, Hermann

407	2007	Computational Aspects of Continuous-Discrete Extended Kalman-Filtering	Mazzoni, Thomas
408	2007	Web 2.0 als Mythos, Symbol und Erwartung	Maaß, Christian Pietsch, Gotthard
409	2007	„Beyond Balanced Growth“: Some Further Results	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
410	2007	Herausforderungen der Globalisierung für die Entwicklungsländer: Unsicherheit und geldpolitisches Risikomanagement	Wagner, Helmut
411	2007	Graphical Analysis in the New Neoclassical Synthesis	Giese, Guido Wagner, Helmut
412	2007	Monetary Policy and Asset Prices: The Impact of Globalization on Monetary Policy Trade-Offs	Berger, Wolfram Kißmer, Friedrich Knütter, Rolf
413	2007	Entropiebasiertes Data Mining im Produktdesign	Rudolph, Sandra Rödter, Wilhelm
414	2007	Game Theoretic Research on the Design of International Environmental Agreements: Insights, Critical Remarks and Future Challenges	Finus, Michael
415	2007	Qualitätsmanagement in Unternehmenskooperationen - Steuerungsmöglichkeiten und Datenintegrationsprobleme	Meschke, Martina
416	2007	Modernisierung im Bund: Akteursanalyse hat Vorrang	Pietsch, Gotthard Jamin, Leander
417	2007	Inducing Technical Change by Standard Oriented Environmental Policy: The Role of Information	Endres, Alfred Bertram, Regina Rundshagen, Bianca
418	2007	Der Einfluss des Kontextes auf die Phasen einer SAP-Systemimplementierung	Littkemann, Jörn Eisenberg, David Kuboth, Meike
419	2007	Endogenous in Uncertainty and optimal Monetary Policy	Giese, Guido Wagner, Helmut
420	2008	Stockkeeping and controlling under game theoretic aspects	Fandel, Günter Trockel, Jan
421	2008	On Overdissipation of Rents in Contests with Endogenous Intrinsic Motivation	Schlepütz, Volker
422	2008	Maximum Entropy Inference for Mixed Continuous-Discrete Variables	Singer, Hermann
423	2008	Eine Heuristik für das mehrdimensionale Bin Packing Problem	Mack, Daniel Bortfeldt, Andreas
424	2008	Expected A Posteriori Estimation in Financial Applications	Mazzoni, Thomas
425	2008	A Genetic Algorithm for the Two-Dimensional Knapsack Problem with Rectangular Pieces	Bortfeldt, Andreas Winter, Tobias
426	2008	A Tree Search Algorithm for Solving the Container Loading Problem	Fanslau, Tobias Bortfeldt, Andreas
427	2008	Dynamic Effects of Offshoring	Stijepic, Denis Wagner, Helmut

428	2008	Der Einfluss von Kostenabweichungen auf das Nash-Gleichgewicht in einem nicht-kooperativen Disponenten-Controller-Spiel	Fandel, Günter Trockel, Jan
429	2008	Fast Analytic Option Valuation with GARCH	Mazzoni, Thomas
430	2008	Conditional Gauss-Hermite Filtering with Application to Volatility Estimation	Singer, Hermann
431	2008	Web 2.0 auf dem Prüfstand: Zur Bewertung von Internet-Unternehmen	Christian Maaß Gotthard Pietsch
432	2008	Zentralbank-Kommunikation und Finanzstabilität – Eine Bestandsaufnahme	Knütter, Rolf Mohr, Benjamin
433	2008	Globalization and Asset Prices: Which Trade-Offs Do Central Banks Face in Small Open Economies?	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
434	2008	International Policy Coordination and Simple Monetary Policy Rules	Berger, Wolfram Wagner, Helmut
435	2009	Matchingprozesse auf beruflichen Teilarbeitsmärkten	Stops, Michael Mazzoni, Thomas
436	2009	Wayfindingprozesse in Parksituationen - eine empirische Analyse	Fließ, Sabine Tetzner, Stefan
437	2009	ENTROPY-DRIVEN PORTFOLIO SELECTION a downside and upside risk framework	Rödder, Wilhelm Gartner, Ivan Ricardo Rudolph, Sandra
438	2009	Consulting Incentives in Contests	Schlepütz, Volker
439	2009	A Genetic Algorithm for a Bi-Objective Winner-Determination Problem in a Transportation-Procurement Auction"	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
440	2009	Parallel greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid	Kubach, Timo Bortfeldt, Andreas Tilli, Thomas Gehring, Hermann
441	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part I: ML-Estimation of time series	Singer, Hermann
442	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part II: ML-Estimation of sampled stochastic differential equations	Singer, Hermann
443	2009	Konsensuale Effizienzbewertung und -verbesserung – Untersuchungen mittels der Data Envelopment Analysis (DEA)	Rödder, Wilhelm Reucher, Elmar
444	2009	Legal Uncertainty – Is Harmonization of Law the Right Answer? A Short Overview	Wagner, Helmut
445	2009	Fast Continuous-Discrete DAF-Filters	Mazzoni, Thomas
446	2010	Quantitative Evaluierung von Multi-Level Marketingsystemen	Lorenz, Marina Mazzoni, Thomas

447	2010	Quasi-Continuous Maximum Entropy Distribution Approximation with Kernel Density	Mazzoni, Thomas Reucher, Elmar
448	2010	Solving a Bi-Objective Winner Determination Problem in a Transportation Procurement Auction	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
449	2010	Are Short Term Stock Asset Returns Predictable? An Extended Empirical Analysis	Mazzoni, Thomas
450	2010	Europäische Gesundheitssysteme im Vergleich – Effizienzmessungen von Akutkrankenhäusern mit DEA –	Reucher, Elmar Sartorius, Frank
451	2010	Patterns in Object-Oriented Analysis	Blaimer, Nicolas Bortfeldt, Andreas Pankratz, Giselher
452	2010	The Kuznets-Kaldor-Puzzle and Neutral Cross-Capital-Intensity Structural Change	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
453	2010	Monetary Policy and Boom-Bust Cycles: The Role of Communication	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
454	2010	Konsensuale Effizienzbewertung und –verbesserung mittels DEA – Output- vs. Inputorientierung –	Reucher, Elmar Rödder, Wilhelm