Prof. Dr. Otto Moeschlin et al.

Kurs 01358

Schätztheorie

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

0.0 Einleitung

An die Spitze stellen wir in Abschnitt 0.1 eine Darlegung der grundsätzlichen Fragestellung der Mathematischen Statistik, die dann in Abschnitt 0.3 „Das Schätzproblem“ eine Präzisierung mit Blick auf die Schätztheorie erfährt.

Abschnitt 0.2 mit den Unterabschnitten 0.2.1 „Abriß über Bedingte Erwartungswerte“ bzw. „Abriß über Statistische Räume“ versteht sich als Synopse der wichtigsten die Schätztheorie vorbereitenden Begriffsbildungen

Abschnitt 0.4 handelt von der **Reduktion der Streuung von Schätzern**. In diesem Zusammenhang liefern der **Satz von Rao–Blackwell** sowie der **von Bahadur** ein erstes Indiz für die Bedeutung der suffizienten Statistiken für die Schätztheorie.

Abschnitt 0.5 behandelt die „Erwartungstreuen Schätzer“. Die Erwartungstreue ist ein wichtiges Qualitätserfordernis, das an Schätzer gestellt wird.

In Abschnitt 0.8 koppeln wir das Optimalitätskriterium aus Abschnitt 0.4 mit der (Zusatz–) Forderung der Erwartungstreue und sind so zum Begriff des **(erwartungstreuen)**
Schätzers mit Minimalvarianz geführt. Die spezielle Rolle der suffizienten Statistiken in der Schätztheorie wird in Aussagen deutlich, die **notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für Schätzer mit Minimalvarianz** liefern.

Auf dem Begriff der **vollständigen Statistik** aufbauend kommen wir schließlich zu dem für die Schätztheorie grundlegenden **Satz von Lehmann–Scheffé**; in diesem erhalten wir — ausgehend von einer vollständigen und suffizienten Statistik sowie einem erwartungstreuen Schätzer — einen Schätzer mit Minimalvarianz.

0.1 Die grundsätzliche Fragestellung der Mathematischen Statistik

Zur Erläuterung der grundsätzlichen Fragestellung der Mathematischen Statistik sei $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ ein vorgegebener Messaum mit $\mathbb{H}$ als sogenanntem Stichprobenraum sowie $\mathcal{W} := \{P_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ ein durch eine nichtleere Menge Γ (Parameterraum) bijektiv parametrisierte Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen (auch Stichprobenverteilungen) auf $\mathcal{H}$. Von $\mathcal{W}$ sprechen wir auch als von einer Kollektion von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Um nun einen Zugang zur Problemsicht der Mathematischen Statistik zu finden, sei dem Statistiker konkret ein Element $\bar{x} = (\bar{x}_1 , \ldots \bar{x}_n) \in \mathbb{H}$, die sogenannte (Stichproben–) Realisation, vorgelegt, von der er weiß, dass sie unter genau einer, der sogenannt **wahren** — ihm, dem Statistiker, allerdings unbekannten — **Stichprobenverteilung** zustandegekommen ist.

Aufgabe des Statistikers ist es nun aufgrund der vorgelegten Stichprobenrealisation $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n)$ die wahre Stichprobenverteilung bzw. den ihr zugeordneten sogenannten wahren Parameter zu mutmaßen.
Diese Mutmaßung ist je nach den Zielsetzungen (Schätzen, Testen etc.) an gewisse vordefinierte Formen gebunden. In der Schätztheorie beispielsweise soll genau eine Verteilung als die gemutmaßt wahre Verteilung benannt werden.

In der Testtheorie wird die durch die Aufgabenstellung vorgegebene Kollektion $\mathcal{W}$ in zwei Teilkollektionen $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ mit $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ zerlegt. Hier hat sich der Statistiker — nun einmal losgelöst von Standardterminologien — dahingehend zu äußern, ob die wahre Verteilung in $\mathcal{W}_1$ oder $\mathcal{W}_2$ liegt.

Dem methodisch arbeitenden Statistiker wird es natürlich nicht nur darum gehen zu einer konkret vorgelegten Stichprobenrealisation eine Mutmaßung zur wahren Verteilung abzugeben, vielmehr wird er alle Elemente von $\mathbb{H}$ als potentielle Stichprobenrealisationen im Auge haben; ihnen allen gilt es eine Mutmaßung zuzuordnen.

Die von einem methodisch arbeitenden Statistiker zu erwartende Antwort wird also in einer Abbildung (z.B. Schätz– oder Testabbildung):

$$\text{‚Stichprobenraum'} \quad \longrightarrow \quad \text{‚Raum der Mutmaßungen zur wahren Verteilung'}$$

gegeben werden.

Die spezielle Wahl dieser Abbildung wird — in Abhängigkeit der speziellen Zielsetzungen — aufgrund zu formulierender Qualitätsvorstellungen erfolgen. Dabei kommt natürlich jedes Wahrscheinlichkeitsmaß aus $\mathcal{W}$ als denkbare wahre Stichprobenverteilung in Frage. Da diese wahre Stichprobenverteilung aber unbekannt ist, wird man in der Schätz– und Testtheorie entsprechende Qualitätsmerkmale bzw. Optimalitätsansprüche für Schätz– oder Testabbildungen jeweils für alle Parameter aus Γ einrichten, womit dann diese Forderung auch für die potentiell wahre Verteilung erfüllt ist. Freilich muss die Existenz dieser genau einer wahren Verteilung in $\mathcal{W}$ postuliert werden.

0.1.1 Definition *1. Sei* $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ *ein Messraum und* $\mathcal{W} := \{P_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ *eine nichtleere, durch die Menge* Γ *bijektiv parametrisierte Menge von W–Maßen* P_γ, $\gamma \in \Gamma$, *auf* $\mathcal{H}$.

Dann heißt das Tripel $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *ein* **statistischer Raum**. $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ *heißt* **Stichprobenraum**, $\mathcal{W}$ *eine* **Kollektion von W–Maßen** *bzw.* **eine Kollektion möglicher Stichprobenverteilungen** *sowie* Γ *der* **Parameterraum** *von* $\mathcal{W}$. *Die Elemente von* Γ *heißen* **Parameter**.

2. *Der statistische Raum* $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *heißt speziell ein* **statistisches Experiment**, *wenn unter den W–Maßen von* $\mathcal{W}$ *genau ein, allerdings unbekanntes W–Maß als zutreffendes oder* **wahres** *ausgezeichnet ist, das sich durch ein Element* $x \in \mathbb{H}$, *die sogenannte (Stichproben–) Realisation offenbart. Der der unbekannten* **wahren Verteilung** *zugeordnete Parameter heißt der* **wahre Parameter**.

0.1.2 Bemerkungen 1. Dem statistischen Raum steht in gewisser Analogie zum Wahrscheinlichkeitsraum. Der statistische Raum bildet den Hintergrund zu zunächst „technischen“ Untersuchungen im Sinne der Vorbereitung auf die Formulierung und Lösung statistischer Problemstellungen.

2. Das statistische Experiment präzisiert den Hintergrund von noch zu definierenden statistischen Problemstellungen, vgl. den Kurs Testtheorie.

3. Homöomorphie oder stetige Parametrisierungen beispielsweise haben durchaus ihre Rechtfertigung. Hier allerdings ist lediglich eine bijektive Parametrisierung gefordert. Solche bijektive Parametrisierungen existieren stets — man denke etwa an die Parametrisierung einer Menge durch sich selbst; freilich ist eine solche Parametrisierung nicht eindeutig. Im Kurs Testtheorie werden spezielle Klassen von Stichprobenverteilungen behandelt, in denen die Parametrisierung mit angesprochen ist.

In Definition 0.1.1 ist der sogenannte Stichprobenraum als ein nicht weiter spezifizierter Messraum $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ eingeführt worden. In vielen Fällen bietet sich in naheliegender Weise der $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ als Stichprobenraum an. Oft allerdings können Stichprobenrealisationen außerhalb einer gewissen Teilmenge $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^n$ ausgeschlossen werden, wobei wir aus technischen Gründen $\mathbb{H} \in \mathcal{B}^n$ annehmen. Als σ–Algebra $\mathcal{H}$ über $\mathbb{H}$ bietet sich die Spur $\mathbb{H} \cap \mathcal{B}^n$ (vgl. WI (4)) von $\mathcal{B}^n$ in $\mathbb{H}$ an. Dies veranlaßt uns zur folgenden Definition:

0.1.3 Definition

Ein Stichprobenraum bzw. Messraum $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ *mit*

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\in \mathcal{B}^n && (1) \\ \mathcal{H} &:= \mathbb{H} \cap \mathcal{B}^n && (2) \end{aligned}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ *heißt* **reeller** $(n-)$ **Stichprobenraum bzw. reeller** n**–Messraum**.

Die Begriffe des Produktes von statistischen Räumen bzw. der der Potenz eines statistischen Raumes werden speziellen statistischen Räumen gerecht.

0.1.4 Definition

1. *Seien* $(\mathbb{H}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{W}_i)$ *statistische Räume mit* $\mathcal{W}_i = \{P_{i,\gamma_i} \mid \gamma_i \in \Gamma_i\}$ $(i \in \mathbb{N}_n)$.
   Dann heißt der statistische Raum $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *mit* $\mathbb{H} = \times_1^n \mathbb{H}_i$, $\mathcal{H} = \bigotimes_1^n \mathcal{H}_i$ *und* $\mathcal{W} = \left\{ \bigotimes_1^n P_{i,\gamma_i} \,|\, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \times_1^n \Gamma_i \right\}$ *das* **Produkt der statistischen Räume** $(\mathbb{H}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{W}_i)$ $(i \in \mathbb{N}_n)$.

2. *Sei* $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ *ein statistischer Raum mit*

   $$\mathcal{W}_0 = \{P_{0,\gamma} \,|\, \gamma \in \Gamma\} ,$$

   so heißt der statistische Raum $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *die* n**–te Potenz** *von* $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$, *wenn*

   $$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \times_{1}^{n} \mathbb{H}_0 , \\ \mathcal{H} &= \bigotimes_{1}^{n} \mathcal{H}_0 \quad \textit{und} \\ \mathcal{W} &= \left\{ P_\gamma = \bigotimes_{1}^{n} P_{0,\gamma} \mid \gamma \in \Gamma \right\} \end{aligned}$$

   gilt.

0.1.5 Bemerkung

Das Produkt statistischer Räume (mit Parameterräumen Γ_i $(i \in \mathbb{N}_n)$) besitzt als Parameterrraum offenbar das kartesische Produkt $\times_1^n \Gamma_i$; während der Parameterraum der n–ten Potenz eines statistischen Raumes mit Parameterraum Γ wiederum der Parameterraum Γ ist.

Oft wird als Ausgangsraum des stochastischen Geschehens ein abstrakter, wegen der möglicherweise waltenden Komplexität nicht näher spezifizierter W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ unterstellt. Die Zufallsentscheidungen $\omega \in \Omega$, die in Übereinstimmung mit Q zustandekommen, sind einer direkten Beobachtung nicht zugänglich, sondern werden vermöge einer Zufallsvariablen

$$X \,:\, (\Omega, \mathcal{A}, Q) \longrightarrow (\mathbb{H}, \mathcal{H})$$

in einen Stichprobenraum $\mathbb{H}$ abgebildet, wo die (Stichproben–) Realisationen $x := X(\omega)$ beobachtet werden können.

Das Bild Q_X von Q unter X entspricht dann der wahren (Stichproben–) Verteilung auf $\mathcal{H}$.

0.1.6 Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ ein W–Raum, $(\mathbb{H}_i, \mathcal{H}_i)$ für $i \in \mathbb{N}_n$ Stichprobenräume und $(X_i \mid i \in \mathbb{N}_n)$ eine Familie von Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, Q) \to (\mathbb{H}_i, \mathcal{H}_i)$.

1. *Dann heißt die Abbildung*

   $$X \,:=\, (X_1, \ldots, X_n) \,:\, (\Omega, \mathcal{A}, Q) \to (\mathop{\times}_{1}^{n} \mathbb{H}_i, \bigotimes_{1}^{n} \mathcal{H}_i)$$

   Stichprobe vom (Stichproben–) Umfang *n, und X_i* **(i–te) Stichprobenvariable** *($i \in \mathbb{N}_n$).*

2. *Ist die Familie $(X_i \mid i \in \mathbb{N}_n)$ unabhängig, so heißt X* **eine unabhängige Stichprobe** *(vom Umfang n).*

3. *Gilt für alle $i \in \mathbb{N}_n \,:\, (\mathbb{H}_i, \mathcal{H}_i) = (\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0)$ und ist X eine unabhängige Stichprobe derart, dass alle Stichprobenvariablen dieselbe Verteilung besitzen, so heißt X* **eine einfache Stichprobe** *(vom Umfang n).*

   (In Anlehnung ans Englische: Die X_i sind i.i.d. (sprich: ai, ai, di) (independent, identically, distributed)).

   In diesem Falle heißt $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0)$ **Merkmalraum (von X)***.*

0.1.7 Bemerkung

Der Begriff der unabhängigen Stichprobe findet seine Entsprechung im Produkt statistischer Räume, während die einfache Stichprobe im Zusammenhang mit der Potenz eines Stichprobenraumes gesehen werden muss.

0.1.8 Definition

Sei $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ ein Stichprobenraum und $(\mathbb{D}, \mathcal{D})$ ein Messraum.

Eine $\mathcal{H}$–$\mathcal{D}$–messbare Abbildung $T : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ heißt eine **Statistik***.*

0.1.9 (Schreibweisen) 1. Eine Statistik T induziert für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein W–Maß auf $\mathcal{D}$, nämlich das Bild $P_{\gamma,T} := (P_\gamma)_T$ von P_γ unter T.

Die Gesamtheit dieser durch T auf $\mathcal{D}$ induzierten Verteilungen bezeichnen wir mit $\mathcal{W}_T$:

$$\mathcal{W}_T := \{P_{\gamma,T} \,|\, \gamma \in \Gamma\} .$$

2. Im folgenden wird für $\gamma \in \Gamma$ der unter der Verteilung P_γ gebildete Erwartungswert mit $E_\gamma(T)$, die Varianz von T mit $V_\gamma(T)$ und die Kovarianz zweier Statistiken T und S mit $\mathrm{Kov}_\gamma(T,S)$ bezeichnet.

Man beachte, dass zwar die Verteilungen P_γ, $(\gamma \in \Gamma)$ i.a. als voneinander verschieden angenommen werden; dies muss für $P_{\gamma,T}$ allerdings nicht mehr notwendig zutreffen.

Die folgenden beiden Beispiele dienen dazu, Ihnen die eingeführten Schreibweisen zu veranschaulichen.

0.1.10 Beispiel

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine einfache Stichprobe mit nach $B(1,p)$ verteilten X_i. Obwohl für die Anwendungen die Fälle $p = 0$ bzw. $p = 1$ meist uninteressant sind, wählen wir als Menge der möglichen Stichprobenverteilungen die Menge $\mathcal{W} = \{\bigotimes_1^n B(1,p) \,|\, p \in [0,1]\}$ mit dem Parameterraum $\Gamma = [0,1]$.

L Überlegen Sie sich nun bitte, dass mit der durch

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n)$$

definierten Statistik

$$T : (\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n)) \longrightarrow \left(\mathbb{N}_n^0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_n^0)\right)$$

die Beziehung

$$\mathcal{W}_T = \{B(n,p) \,|\, p \in [0,1]\}$$

und daher $E_p(T) = np$ sowie $V_p(T) = np(1-p)$ $(p \in [0,1])$ gilt.

0.1.11 Beispiel

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine einfache Stichprobe mit nach $N(a,\sigma^2)$ verteilten X_i, wobei a und σ^2 unbekannt seien. Dann bekommen wir den Stichprobenraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ sowie die Menge $\mathcal{W} := \left\{\bigotimes_1^n N(a,\sigma^2) \,|\, a \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+ - \{0\}\right\}$ von möglichen Stichprobenverteilungen mit dem Parameterraum $\Gamma = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ - \{0\})$. Ist dagegen z.B. σ^2 bekannt, so erhalten wir die Menge $\mathcal{W}_{\sigma^2} := \left\{\bigotimes_1^n N(a,\sigma^2) \,|\, a \in \mathbb{R}\right\}$ mit dem Parameterraum $\Gamma = \mathbb{R}$.

Selbstbeurteilung

Dieser Abschnitt dürfte Ihnen keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereiten. Sollte dies dennoch entweder bei Passagen zur Motivation oder bei der Einführung neuer Begriffe der Fall sein, so versuchen Sie, diese Schwierigkeiten **jetzt** auszuräumen, da dieser Abschnitt fundamental für die weiteren Ausführungen dieses Kurses ist.

Sind Ihnen die Begriffe „einfache Stichprobe", „Stichprobenraum", „Stichprobenverteilung", „Statistik" und „Parameterraum" geläufig?