

Dr. Thomas Müller

Modul 61417

Graphentheorie

LESEPROBE

Fakultät für
**Mathematik und
Informatik**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

Präliminarien	3
Vorwort	3
Literatur	7
1 Grundbegriffe der Graphentheorie	9
1.0 Einleitung	9
1.1 Graphen	11
1.2 Nummerierte Graphen und Matrizen	23
1.3 Digraphen	31
1.4 Nummerierte Digraphen und Matrizen	40
1.5 Kleiner Exkurs: Komplexitätstheorie	45
Lösungshinweise zu Kapitel 1	47
2 Zusammenhang und Bäume	59
2.0 Einleitung	59
2.1 Wege, Kreise und Zusammenhang in Graphen	61
2.2 Bäume	71
2.3 Anzahl der aufspannenden Bäume eines Graphen	80
2.4 Wege, Kreise und Zusammenhang bei Digraphen	88
2.5 Quell- und Senkenbäume	93
2.6 Anzahl aufspannender Quell- und Senkenbäume in Digraphen	100
Lösungshinweise zu Kapitel 2	105
3 Eulertouren und Hamiltonkreise	115
3.0 Einleitung	115
3.1 Eulertouren in Graphen	117
3.2 Eulertouren in Digraphen	129
3.3 Hamiltonkreise in Graphen	142
3.4 Hamiltonkreise in Digraphen	157
Lösungshinweise zu Kapitel 3	163
4 Zyklenraum und Schnittraum	169
4.0 Einleitung	169
4.1 Binärer Zyklenraum und binärer Schnittraum	171
4.2 Zyklenraum und Schnittraum in Digraphen (und Graphen)	188
4.3 Analyse einfacher elektrischer Netzwerke	205
4.4 Kleiner Exkurs: Matroide	213

Lösungshinweise zu Kapitel 4	217
5 Flüsse in Netzwerken und die Mengerschen Sätze	227
5.0 Einleitung	227
5.1 Flüsse in Netzwerken	229
5.2 Algorithmische Bestimmung von Maximumflüssen	241
5.3 Die Mengerschen Sätze	251
Lösungshinweise zu Kapitel 5	267
6 Unabhängige Mengen und Überdeckungen	279
6.0 Einleitung	279
6.1 Grundlegendes über unabhängige und bedeckende Mengen	281
6.2 Unabhängige und bedeckende Mengen in bipartiten Graphen	297
6.3 Maximum-Matchings in allgemeinen Graphen	310
Lösungshinweise zu Kapitel 6	323
7 Färbung von Graphen	335
7.0 Einleitung	335
7.1 Knotenfärbungen	337
7.2 Das chromatische Polynom	351
7.3 Kantenfärbungen	361
Lösungshinweise zu Kapitel 7	371
Anhang	381
Verzeichnis allgemeiner mathematischer Symbole	381
Symbolverzeichnis zur Graphentheorie	385
Stichwortverzeichnis zur Graphentheorie	389

Vorwort

Graphen und Digraphen stellen einerseits eine elementare und anschauliche, andererseits eine im Bezug auf die Modellierung anwendungsbezogener Fragestellungen vielseitige Struktur dar. Sie beschreibt – unabhängig von der ursprünglichen praktischen Problemstellung – ein System von Objekten, dargestellt als Punkte, und deren Beziehungen untereinander, gegebenenfalls dargestellt als (orientierte) Linien zwischen solchen Objekten. Die Objekte nennen wir *Knoten*, die Linien *Kanten* und die orientierten Linien *Bögen*. Graphen sind dann solche Strukturen, in denen nur Kanten auftreten, Digraphen solche, in denen nur Bögen vorkommen können.

Durch diese Reduktion können gemeinsame Probleme aus gänzlich verschiedenen Anwendungen simultan angegriffen und in nicht allzu komplizierten Fällen z.T. recht reizvoll anschaulich als „Netzwerk“ aus Punkten und diese verbindenden Linien bzw. Pfeilen dargestellt werden, was ihre Behandlung häufig erleichtert.

„Elementar“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Begriffe und Aussagen ohne tiefere mathematische Vorkenntnisse verstanden werden können. Damit behaupten wir allerdings nicht, die Probleme wären stets einfachen Lösungen zugänglich. Wie in der *Elementaren Zahlentheorie* ist nicht selten das Gegenteil der Fall.

Die frühesten Arbeiten über Graphen entstanden aus Rundreiseproblemen (Königsberger Brückenproblem – Euler, um 1740; Städtetourenspiel – Hamilton, um 1860), Netzwerkanalysen (elektrische Netzwerke – Kirchhoff, um 1845), Strukturfragen (Verbindungen der organischen Chemie – Cayley, um 1875), Färbungsprobleme (Vierfarbenvermutung – Guthrie, Cayley u.a. seit 1852) etc.

Als erstes Lehrbuch der Graphentheorie kann *Dénes Kőnig, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936* gelten. Nach Kőnig geht die Bezeichnung *Graph* auf Sylvester (1878) zurück.

Nach verhaltenem Beginn entwickelte sich die Graphentheorie seit den 1960er Jahren parallel zur Informatik mit einer enormen Dynamik, die bis heute ungebrochen ist. Das populäre, 1976 von K. Appel und W. Haken mit massivem Computereinsatz gelöste Vierfarbenproblem spielte dabei eine erhebliche Rolle.

Damit einher geht eine starke wechselseitige Einflussnahme zwischen der Graphentheorie und Gebieten wie Informatik, Kombinatorische Optimierung, Komplexitätstheorie, Operations Research und anderen Bereichen der angewandten Wissenschaften.

In Anbetracht der heutigen Themenvielfalt in der Graphentheorie sind der Stoffauswahl des vorliegenden, einführenden Kurses recht enge Grenzen gesetzt. So gehen wir z.B. nicht auf planare Graphen ein, Minoren werden ebenso wenig diskutiert wie Zufallsgraphen usw.

Die dargebotenen Themen werden vom strukturellen Standpunkt her entwickelt, weni-

ger vom algorithmischen. Wichtige Algorithmen werden lediglich informell präsentiert. Fragen einer möglichst effizienten Implementierung der Algorithmen und der Analyse ihrer Komplexität (Rechenaufwand in Abhängigkeit vom Umfang der Eingabedaten) werden allenfalls vereinzelt aufgegriffen. Der Leser wird hierfür – neben einem kleinen Exkurs über Komplexitätstheorie am Ende von Kapitel 1 – auf die einschlägige Literatur, Fernstudierende auf den FernUni-Kurs 01216 Kombinatorische Optimierung - Effiziente Graphenalgorithmen verwiesen, dem das Buch von Hochstättler und Schliep ([11]) zugrunde liegt.

Für das Fernstudium und damit auch für das Selbststudium geschrieben ist der Stoff sehr ausführlich dargestellt und dergestalt in sich abgeschlossen, dass er ohne Rückgriff auf die Literatur studiert werden kann. Wer dennoch eine **Begleitlektüre** wünscht, greift am besten zu Bondy und Murty ([4]) oder West ([17]).

Dem Zweck entsprechend sind in den Lehrtext **Übungsaufgaben** eingestreut oder einige Beweiselemente Ihnen zur Übung überlassen. Am Ende jedes Kapitels finden Sie dazu detaillierte **Lösungsvorschläge**, auf die im Lehrtext am Rande mit einem „L“ hingewiesen wird.

Hier sind ein paar Worte zur **Lern- und Arbeitsweise** angebracht. Grundsätzlich erarbeitet man sich einen mathematischen Text im stetigen Wechsel zweier Perspektiven: dem Überblick und dem Detail. Erst wird man sich einen Überblick verschaffen wollen über die wesentlichen Fragestellungen, die zentralen Begriffe und Aussagen dazu, die Grobstruktur der Beweise, den roten Faden insgesamt und die Anwendungsmöglichkeiten. Dies wird indessen nicht ausreichen, mit den Gegenständen so vertraut zu werden, um mit ihnen auch eigenständig umgehen zu können. Hier wird man sich dann mit den kleinteiligen Argumenten in den Beweisen auseinandersetzen müssen und dann auch lernen, die Rolle der Voraussetzungen und ihre Notwendigkeit in den Sätzen (Gegenbeispiele) zu verstehen etc. Die Ausführlichkeit der Darstellung des vorliegenden Kurses mag Studierende demgegenüber in Versuchung führen, den Lehrtext nur rezeptiv zu lesen. Wie Sie vielleicht selbst schon erfahren haben, führt dies allein nicht zu einem tieferen Verständnis mathematischen Stoffs. Versuchen Sie daher zunächst, die Ihnen überlassenen Passagen, die am Rand mit „L“ markiert sind, selbstständig zu lösen. Darüber hinaus ist immer zu empfehlen, sich zuerst *eigene* Gedanken zur Begründung einer Aussage des Lehrtextes zu machen. Auf diese Weise kann Ihnen der Lehrtext selbst zum Übungsmaterial werden. Auch wenn Ihnen dabei vielfach ein Erfolg versagt sein sollte, wird dieser eigenständige Umgang mit den Begriffen und Methoden des Kurses Sie nach und nach immer besser mit seinen Begriffen, Fragestellungen und den Hintergründen der gewonnenen Antworten vertraut machen. Beim Durcharbeiten des Lehrtextes sollten Sie sich wenigstens selektiv die Mühe machen, sich mit „Bleistift und Papier“ durch die Details zu kämpfen. Die dabei erforderliche Skepsis gegenüber dem Text ist eine Grundhaltung

des Mathematikers, der nach einer Begründung verlangt, und nicht so sehr darauf vertraut, es wird schon alles richtig sein, was da steht, und statt dessen lediglich auf die Fähigkeit erpicht ist, vorgefertigte Rezepte sicher durchführen zu können.

Wie schon angedeutet, eignet sich die Graphentheorie in besonderer Weise dazu, sich von den Begriffen und Resultaten über die formale Darstellung hinaus eine anschauliche Vorstellung zu verschaffen. Das Zeichnen von Figuren ist gerade hier eine stetige Quelle von Einsichten, die Sie nutzen sollten.

Nicht zuletzt durch die **Einsendeaufgaben** wird Ihnen ein 14-tägiger Bearbeitungstakt vorgegeben. Es ist ratsam, diesen Takt einzuhalten und lieber (vorübergehend) ein paar Lücken zu lassen, als im Stoff zurückzubleiben. Es gibt gelegentlich schwierigere Passagen, die man zunächst durchaus zurückstellen kann, um sie bei späterer Gelegenheit wieder anzugreifen. In den Kapiteleinleitungen werden Sie zu den Prioritäten, die Sie setzen sollen, einige Hinweise finden. Generell darf man hier, bei aller Frustrationstoleranz, die ein Mathematikstudium erfordert, Mut zur Lücke haben, der Umfang des Kurses wird Sie dazu zwingen.

Die erfolgreiche Bearbeitung dieses Kurses wird regelmäßig mit dem Bestehen einer **mündlichen Prüfung** (als Prüfungsleistung, im Master- oder Diplomstudiengang auch als Leistungsnachweis) nachgewiesen. Um diesem Prüfungstyp gerecht zu werden, ist zu empfehlen, sich einen Überblick über die Methoden und die Zusammenhänge der Begriffe und Ergebnisse zu verschaffen. Versuchen Sie, die im Kurs erarbeiteten Kenntnisse mit eigenen Worten themenweise in der Art eines Leitfadens zusammenzufassen und diesen mit dem Wachsen Ihrer Kenntnisse auszubauen und zu präzisieren. Während der unmittelbaren Prüfungsvorbereitung sollten Sie versuchen, den (vermeintlich) gelernten Stoff frei sprechend sich selbst oder einer anderen Person (die nicht notwendig viel davon verstehen muss) vorzutragen. Sie werden dabei feststellen, wie sicher Sie den Stoff tatsächlich beherrschen und wo Sie unsicher sind oder noch größere Lücken haben.

Dem elementaren Gegenstand entsprechend kann man die **Eingangsvoraussetzungen** für diesen Kurs im Großen und Ganzen auf mathematisches Grundlagenwissen beschränken. Dazu gehört der sichere Umgang mit Mengen und Abbildungen sowie gute Kenntnisse der Linearen Algebra, wie sie in den FernUni-Kursen *01141 Mathematische Grundlagen* und *01143 Lineare Algebra* bereitgestellt werden. Das schließt nicht aus, dass an wenigen Stellen dieses Kurses etwas tiefere Ergebnisse aus der Algebra erforderlich sind, die aber ad hoc zur Verfügung gestellt werden.

An den genannten beiden Kursen orientiert sich auch die für die mathematischen Grundbegriffe gewählte Schreibweise. Das Ende eines Beweises wird mit dem Symbol \square gekennzeichnet.

Zur einfacheren Handhabung ist der Kurs mit einem **Index** und einem **Symbolverzeichnis**

versehen.

Die **Stoffauswahl des Kurses** (das Wesentliche hierzu ist dem Inhaltsverzeichnis zu entnehmen) orientiert sich an dem gleichnamigen FernUni-Kurs von *Ulrich Seip*, als dessen Aktualisierung der vorliegende Kurs ursprünglich geplant war, sich aber im Verlauf der Erstellung zusehens emanzipiert und erweitert hat. Die Terminologie und die Notation wurden dem mittlerweile sich verstetigenden internationalen Standard angepasst. Bei Graphen und Digraphen werden jetzt, sofern keine diesbezüglichen Einschränkungen erforderlich sind, Schlingen und Parallelitäten zugelassen. Die zahlreichen Pseudocode-Implementierungen von Algorithmen wurden entfernt und durch einschlägige Algorithmen, die sich aus den strukturellen Betrachtungen bzw. Beweisen ergaben, ersetzt, wobei allerdings nur noch eine informelle Darstellung gewählt wurde.

Zu den **neu hinzugekommenen Themen** gehören u.a. die de Bruijn-Graphen und de Bruijn-Zyklen, der Algorithmus Breitensuche, eine Analyse einfacher elektrischer Netzwerke, ein kleiner Exkurs über Matroide, Flüsse in Netzwerken mit der Edmonds-Karp-Implementierung des Algorithmus von Ford und Fulkerson (der Zugang zu den Mengerschen Sätzen wurde entsprechend abgeändert), der Blüten-Algorithmus von Edmonds für das Maximum-Matching-Problem in allgemeinen Graphen, ein effizienter algorithmischer Beweis des Satzes von Szekeres und Wilf, der Satz von Brooks über die Abschätzung der chromatischen Knotenzahl und eine Verallgemeinerung des Satzes von Vizing.

Sicher wird der vorliegende Kurs nicht ohne Fehler sein. Für Ihre Hinweise darauf sowie für Kommentare zur Darstellung, insbesondere für Anregungen, die dem besseren Verständnis dienen, ist Ihnen der Autor (E-Mail: thomas.mueller@fernuni-hagen.de) sehr dankbar.

Literatur

In der folgenden **Literaturliste** sind diejenigen Lehrbücher aufgeführt, die, abgesehen vom Vorgängerkurs von U. Seip, Einfluss auf die Präsentation des Kursinhalts genommen haben. Hier sind, über den ganzen Kurs gesehen, vor allem Bondy-Murty ([4]) und West ([17]) hervorzuheben. Der Einfluss der übrigen ist mehr oder weniger auf bestimmte Abschnitte oder Themen beschränkt. Interessierte können die angegebene Literatur, die inhaltlich teilweise weit über den vorliegenden Kurs hinausgeht, auch zum weiterführenden Studium zu Rate ziehen.

- [1] Bang-Jensen, J. und Gutin, G., *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, 2nd ed., Springer 2009.
- [2] Biggs, N., *Algebraic Graph Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1993.
- [3] Bollobás, B., *Modern Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 184, Springer, 1998.
- [4] Bondy, J.A. und Murty, U.S.R., *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008.
- [5] Cook, W.J., Cunningham, W.H., Pulleyblank, W.R. und Schrijver, A., *Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [6] Diestel, R., *Graphentheorie*, 4. Aufl., Springer, 2010.
- [7] Even, S., *Graph Algorithms*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2012.
- [8] Fleischner, H., *Eulerian Graphs and Related Topics*, Part 1, Vol. 1 und 2, Annals of Discrete Mathematics 45 bzw. 50, North-Holland, 1990/91.
- [9] Gordon, G. und McNulty, J., *Matroids: A Geometric Introduction*, Cambridge University Press, 2012.
- [10] Gross, J. und Yellen, J., *Graph Theory and Its Applications*, CRC Press, 1999.
- [11] Hochstättler, W. und Schliep, A., *CATBox: An Interactive Course in Combinatorial Optimization*, Springer, 2010.
- [12] Jungnickel, D., *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*, 3. Aufl., BI-Wissenschaftsverlag 1994.
- [13] Oxley, J.G., *Matroid Theory*, Oxford University Press, 1992.

- [14] Stanley, R.P., *Enumerative Combinatorics*, Vol. II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 62, Cambridge University Press, 1999.
- [15] Turau, V., *Algorithmische Graphentheorie*, 2. Aufl., Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004.
- [16] Volkmann, L., *Fundamente der Graphentheorie*, Springer, 1996.
- [17] West, D.B., *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, 2001.

1 Grundbegriffe der Graphentheorie

1.0 Einleitung

Dieses Kapitel dient der Festlegung und Diskussion der elementaren Grundbegriffe für die Darstellung und die Strukturanalyse von Graphen und Digraphen.

Obwohl wir uns auf die Untersuchung von *endlichen* Graphen bzw. Digraphen beschränken werden, liegt es doch auf der Hand, dass die im Vorwort angedeutete grafische Darstellung dieser Objekte durch Punkte und diese verbindenden (orientierten) Linien in der Ebene nur für relativ „kleine“ Graphen bzw. Digraphen eine adäquate Form ihrer Darstellung sein kann. Dies leistet dagegen auf effiziente Weise die formale Beschreibung durch eine *Inzidenzabbildung*. Sie ist auch insofern unverzichtbar, als wir stets neben Schlingen auch parallele Kanten bzw. Bögen zulassen, sofern wir dies nicht ausdrücklich ausschließen. (Der Leser möge beachten, dass in der Literatur unter einem „Graphen“ häufig nur ein *schlichter* Graph ohne Schlingen und ohne parallele Kanten (Mehrfachkanten) verstanden wird.)

Daneben betrachten wir auch Matrixdarstellungen von Graphen bzw. Digraphen, die Adjazenz- und die Inzidenzmatrix. Sie setzen eine Nummerierung der Knotenmenge und für die Inzidenzmatrix auch eine Nummerierung der Kanten- bzw. Bogenmenge voraus. Diese Matrizen können möglicherweise zahlreiche Nullen als Einträge enthalten und werden daher heutzutage wegen ihrer Redundanz beim Computereinsatz durch Inzidenz- oder Adjazenzlisten bzw. andere speicherplatzsparende Darstellungen ersetzt. Unser Interesse an diesen Matrizen ist mathematischer Natur. Sie ermöglichen vor allem eine Verbindung zur Linearen Algebra, die wir dadurch zur Lösung graphentheoretischer Probleme einspannen können.

Im Verlauf dieses ersten Kapitels werden nach und nach die zur konkreten Beschreibung der Struktur eines Graphen bzw. Digraphen und ihrer Analyse notwendige Terminologie eingeführt.

Hierzu gehören wichtige Grundbegriffe der *lokalen* Struktur wie die beiden verschiedenen Typen von Nachbarschaft (Adjazenz und Inzidenz) und der Knotengrad. Der Leser verfolge aufmerksam die Unterschiede, die sich bereits hier zwischen Graphen und Digraphen auftun. Als immer wieder nützlich erweist sich auch die Möglichkeit, die verschiedenen Grade aus der Adjazenz- bzw. Inzidenzmatrix als Zeile- oder Spaltensummen zu berechnen.

Größere Teilstrukturen sind die (induzierten bzw. aufspannenden) Teil(di)graphen, die in allen Untersuchungen über Graphen bzw. Digraphen ausdrücklich oder implizit vorkommen. Sie dienen z.B. der Beschreibung erster, in der Graphentheorie notorisch auftretender Konstruktionen wie das Entfernen oder Hinzufügen von Knoten, Kanten oder

Bögen. Weitere Konstruktionen, die Ihnen bereits in diesem Kapitel begegnen, sind das Komplement eines schlichten Graphen und der Kantengraph.

Ferner lernen Sie die ersten wichtigen Klassen von Graphen kennen: die vollständigen Graphen und die (vollständig) bipartiten Graphen.

Schon verhältnismäßig „kleine“ Graphen lassen sich grafisch auf solch unterschiedliche Weise darstellen, dass es auf den ersten Blick unmöglich erscheint zu entscheiden, ob es sich dabei strukturell um ein und denselben Graphen handelt. Dahinter verbirgt sich die Frage nach der *Isomorphie* von Graphen, d.h. der Entscheidung, wann zwei Graphen strukturell gleich sind oder nicht. Durch den Begriff des Graphen- bzw. Digraphenisomorphismus wird die strukturelle Übereinstimmung zweier Graphen bzw. Digraphen formal beschrieben. Während in manchen mathematischen Bereichen wie z.B. der Theorie der endlichdimensionalen Vektorräume die Isomorphiefrage leicht zu entscheiden ist, konnte in der Graphentheorie hierfür bislang noch kein effizienter Algorithmus gefunden werden. Die hier angegebenen Propositionen zu Isomorphie von Graphen bzw. Digraphen sind im Grunde nur Umformulierungen des Problems und keine effizienten Charakterisierungen. Sie sind nur von technischem Interesse.

Eigenschaften von Graphen bzw. Digraphen oder mit ihnen auftretende numerische Größen nennt man *Invarianten*, wenn sie unter Isomorphismen erhalten bleiben. So ist z.B. der Knotengrad bzw. die Gradfolge eine lokale numerische Invariante, die Komplementbildung bei schlichten Graphen oder die Vollständigkeit eine globale Invariante. Solche Invarianten kann man sich zunutze machen, um wenigstens die Nichtisomorphie zweier Graphen zu testen: zwei Graphen können nicht isomorph sein, wenn sie sich in einer Invarianten unterscheiden. Allerdings können z.B. die Gradfolgen zweier nichtisomorpher Graphen übereinstimmen.

Ergebnisse über Graphen können bisweilen für Digraphen genutzt werden und umgekehrt. Den Wechsel zwischen diesen beiden Typen beschreiben die Operationen „unterliegender Graph“ eines Digraphen, der einem Graphen „zugeordnete symmetrische Digraph“ bzw. die „Orientierung“ eines Graphen. Im Verlauf des Kurses wird davon gelegentlich Gebrauch gemacht.

Ein etwas komplizierteres, für gewisse Anwendungen interessantes Beispiel für einen Digraphen ist der *de Bruijn-Graph*, den wir in den nächsten beiden Kapiteln weiter verfolgen werden.

Ein kleiner Exkurs über Komplexitätstheorie beschließt das erste Kapitel.

Naturgemäß ist ein erstes Kapitel voll mit zahlreichen Festlegungen bzgl. Terminologie und ihrer Notation, mit denen Sie sich nach und nach vertraut machen müssen. Dies dürfte keine größeren Schwierigkeiten bereiten, da die Sprache der Graphentheorie i.A. sehr anschaulich ist. Zahlreiche interessante Sätze sind demgegenüber hier noch nicht zu erwarten.

1.1 Graphen

Die Mächtigkeit einer Menge A bezeichnen wir mit $|A|$.

Im endlichen Fall, den wir hier betrachten, ist das die Anzahl ihrer Elemente.

Für $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ sei $\binom{V}{k} := \{V' \mid V' \subseteq V \text{ und } |V'| = k\}$ die Menge der k -elementigen Teilmengen von V , so dass $\binom{V}{2} \cup \binom{V}{1} = \{\{v, w\} \mid v, w \in V\}$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von V mit höchstens zwei Elementen bezeichnet.

Die Notation ist den Binomialkoeffizienten entlehnt, da $|\binom{V}{k}| = \binom{|V|}{k}$ für endliches V gilt.

1.1.1 Definition

Ein **Graph** G besteht aus zwei disjunkten endlichen Mengen V und E sowie einer Abbildung $\partial : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1} = \{\{v, w\} \mid v, w \in V\}$.

1.1.2 Bemerkungen und Bezeichnungen

Nach Definition ist ein Graph G ein Tripel $G = (V, E, \partial : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1})$.

Die Elemente von V heißen **Knoten** (engl. vertices) von G , V selbst nennt man die **Knotenmenge** von G .

Die Elemente von E heißen **Kanten** (engl. edges) von G , E selbst nennt man die **Kantenmenge** von G .

Die Abbildung $\partial : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$ heißt **Inzidenzabbildung** von G .

Falls erforderlich schreiben wir auch V_G für V , E_G für E und ∂_G für ∂ , um beim Auftreten mehrerer Graphen Missverständnisse zu vermeiden.

Für $\{v, w\} \in \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$ schreiben wir meist kürzer vw , solange dies nicht zu Missverständnissen führt. Damit ist keine Anordnung unterstellt. Es gilt vielmehr $vw = wv$.

Ist $\partial(e) = vw$ für eine Kante e , so heißen v und w die **Randknoten** von e .

Gibt es Kanten e und e' mit $e \neq e'$ und $\partial(e) = \partial(e')$, so sprechen wir von **parallelen Kanten** oder **Mehrfachkanten**.

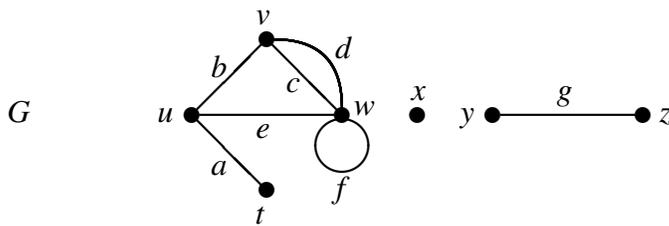
Gilt $\partial(e) = vw$ mit $v = w$ für eine Kante e , so nennen wir e eine **Schlinge**.

1.1.3 Beispiel

Zur Veranschaulichung des Graphenbegriffs betrachten wir den folgenden Graphen G :

Die Knotenmenge von G sei $V := \{t, u, v, w, x, y, z\}$, die Kantenmenge von G sei $E := \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und die Inzidenzabbildung $\partial : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$ sei definiert durch $\partial(a) = ut$, $\partial(b) = uv$, $\partial(c) = vw$, $\partial(d) = vw$, $\partial(e) = uw$, $\partial(f) = ww$, $\partial(g) = yz$.

Der Graph G wird dann beispielsweise durch folgende Figur repräsentiert:



1.1.4 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

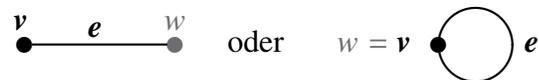
Eine Kante $e \in E$ und ein Knoten $v \in V$ heißen **inzident**, wenn $v \in \partial(e)$ gilt.

Zwei Knoten $v, w \in V$ heißen **benachbart** oder **adjazent**, wenn ein $e \in E$ existiert mit $\partial(e) = \{v, w\}$; andernfalls heißen v und w **unabhängig**.

Zwei Kanten $e, e' \in E$, $e \neq e'$ heißen **benachbart** oder **adjazent**, wenn $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset$ gilt, d.h. wenn ein $v \in V$ existiert mit $v \in \partial(e)$ und $v \in \partial(e')$; andernfalls heißen e und e' **unabhängig**. Eine Schlinge betrachten wir als zu sich selbst benachbart.

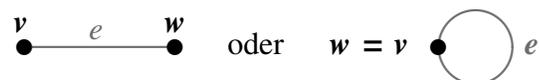
1.1.5 Bemerkungen und Bezeichnungen

Sind $e \in E$ und $v \in V$ inzident, so existiert ein $w \in V$ mit $\partial(e) = \{v, w\}$:

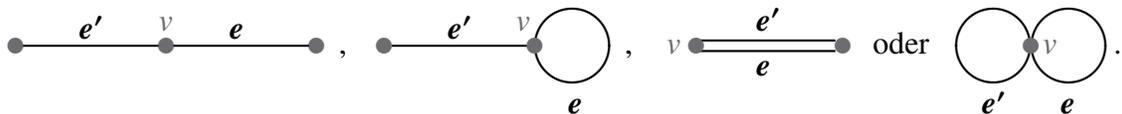


Je nach Standpunkt sagen wir dann auch: v **bedeckt** e bzw. e **bedeckt** v .

Sind $v \in V$ und $w \in V$ benachbart, so nennen wir w einen **Nachbarn** von v (und umgekehrt). Gilt $\partial(e) = vw$ für ein $e \in E$, so stellen wir das folgendermaßen dar:



Sind $e, e' \in E$ mit $e \neq e'$ benachbart, so nennen wir e einen **Nachbarn** von e' (und umgekehrt). Gilt $v \in \partial(e) \cap \partial(e')$ für ein $v \in V$, so haben wir eine der Konstellationen



1.1.6 Definition

Zwei Graphen $G = (V, E, \partial)$ und $G' = (V', E', \partial')$ heißen **isomorph**, wenn es bijektive Abbildungen $\alpha_V : V \rightarrow V'$ und $\alpha_E : E \rightarrow E'$ gibt, so dass für jedes $e \in E$ mit $\partial(e) = \{v, w\}$ gilt: $\partial'(\alpha_E(e)) = \{\alpha_V(v), \alpha_V(w)\}$.

Ist dies der Fall, so nennen wir $(\alpha_V, \alpha_E) : G \rightarrow G'$ einen **Graphenisomorphismus**.

Hier fehlen die Seiten 13 bis 58

2 Zusammenhang und Bäume

2.0 Einleitung

Wir können Graphen wie eine Straßenkarte auffassen, wobei die Knoten Stationen sind und die Kanten zwei Stationen verbindende Straßen. Von einem Knoten v nach einem Knoten w kann man nur dann auf direktem Wege gelangen, wenn v und w durch eine Kante verbunden sind. Gibt es keine solche Kante, hat man evtl. noch die Möglichkeit, einen Umweg über andere Knoten und Kanten zu machen, um doch noch von v nach w zu gelangen. Solche Verbindungen zweier Knoten v und w werden formal durch v, w -*Kantenfolgen* beschrieben. Das sind alternierende Folgen von Knoten und Kanten der Form $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$, wo jede Kante e_i die beiden Knoten v_{i-1} und v_i verbindet. Gibt es für jedes Knotenpaar eine solche Kantenfolge, nennen wir den Graphen *zusammenhängend*. Graphen die nicht zusammenhängend sind, zerfallen in mehrere maximale, zusammenhängende, nichtleere Teilgraphen, die *Komponenten*.

Kantenfolgen unterliegen bzgl. Wiederholungen von Knoten und Kanten keinen Beschränkungen. Schließt man Wiederholungen von Kanten aus, erhält man den Begriff *Kantenzug*. Ist er geschlossen, kehrt er also zum Ausgangspunkt zurück, spricht man von einer *Tour*. Geht man noch weiter und lässt nicht einmal Wiederholungen von Knoten zu, so hat man den noch spezielleren Begriff des *Kantenwegs* oder, im geschlossenen Fall, des *Kreises*.

Kreise spielen schon in diesem Kapitel eine große Rolle. Mit ihnen bzw. ihrem Fehlen werden wir so wichtige Graphentypen wie bipartite Graphen, *Bäume* oder *Wälder* charakterisieren. Bäume sind die maximal kreislosen, zugleich auch die minimal zusammenhängenden Graphen und erlauben nur einen einzigen Kantenweg zwischen zwei Knoten, sind daher insbesondere schlicht. Als Teilgraphen eines Graphen G sind sie von Bedeutung, wenn sie *aufspannende Bäume* sind, d.h. jeden Knoten von G enthalten.

Der *Algorithmus Breitensuche* findet zu jeder Komponente eines Graphen und einem ihrer (frei wählbaren) Knoten, der *Wurzel*, einen diese Komponente aufspannenden Baum, so dass für jeden Knoten v der Kantenweg innerhalb des aufspannenden Baumes von der Wurzel zu diesem Knoten v ein kürzester Weg ist, d.h. ein Weg von minimaler Länge.

Aufspannende Bäume können nur in zusammenhängenden Graphen auftreten, dann aber durchaus zahlreich: im K_n gibt es nach dem *Satz von Cayley* immerhin n^{n-2} aufspannende Bäume. Dieser Satz ist ein Spezialfall des *Matrix-Tree-Theorems*, das auf *Gustav Robert Kirchhoff* zurückgeht, und die Bestimmung der Anzahl $\tau(G)$ der aufspannenden Bäume eines Graphen G auf rein algebraischem Wege ermöglicht. Die im Beweis verwendete Konstruktion von Kontraktionsgraphen modulo einer Kante, die uns auch an anderer Stelle des Kurses begegnen wird, ermöglicht eine Rekursionsformel (2.3.14) für

die Anzahl der aufspannenden Bäume, die der Rekursionsformel für das chromatische Polynom im Kapitel 7 über Färbung von Graphen ähnelt.

Dieses Programm kann man auch in entsprechender Weise für Digraphen aufziehen. Dabei sind jedoch einige Unterschiede zu beachten. Ein Bogen ist wie eine Einbahnstraße, er darf nicht in Gegenrichtung durchlaufen werden. Dies gilt auch für jede nichttriviale *Bogenfolge* und führt zu einer Unterscheidung zwischen dem *Zusammenhang* (das ist der Zusammenhang des unterliegenden Graphen) und dem *starken Zusammenhang*, der für die Verbindung zweier Knoten Bogenfolgen in jeder der beiden möglichen Richtungen fordert. Definiert man entsprechend eine starke Komponente eines Digraphen als maximalen, stark zusammenhängenden, nichtleeren Teilgraphen, so ist zu beachten, dass hier Digraphen nicht in ihre starken Komponenten zerfallen wie die Graphen in ihre Komponenten, sondern Bögen existieren können, die zu keiner starken Komponente gehören. Während bei Bäumen eine Wurzel frei wählbar ist, sorgt die Orientierung bei Digraphen dafür, dass hier der Begriff in *Quell-* bzw. *Senkenbäume* zerfällt und die Rolle einer Wurzel nur je einem einzigen Knoten zukommt, der Quelle bzw. Senke.

Dank des *Dualitätsprinzips der Richtungsumkehr* brauchen wir deswegen nicht die doppelte Arbeit zu leisten, sondern können Aussagen über Quellbäume auf Aussagen über Senkenbäume zurückführen und umgekehrt.

Entsprechend den aufspannenden Bäumen in Graphen definieren wir aufspannende Quell- bzw. Senkenbäume in Digraphen und gelangen schließlich auch hier zu einem Analogon des Matrix-Tree-Theorems, dem *Directed Matrix-Tree Theorem*, das auf *W.T. Tutte* zurückgeht. Abgesehen von den natürlich entsprechend verschiedenen Matrizen liegt ein wesentlicher Unterschied beim Matrix-Tree-Theorem in der freien Wahl des zur Berechnung heranzuziehenden algebraischen Komplements, während beim Directed Matrix-Tree Theorem dieses durch die Quelle bzw. Senke festgelegt ist.

Das Kapitel schließt mit dem Beispiel der Berechnung der Anzahl der aufspannenden Senkenbäume des de Bruijn-Graphen $D_n(S)$ zu einer festen Senke s . Besteht S aus b Symbolen, so sind das immerhin $b^{b^{n-1}-n}$ solcher Senkenbäume.

Auch dieses Kapitel enthält noch reichlich Terminologie bzw. Notation, deren sichere Kenntnis im weiteren Verlauf des Kurses unerlässlich ist. Mit dem in 2.1.6 präzisierten Sprachgebrauch von *maximal* und *minimal* und seiner Unterscheidung zu *Maximum* und *Minimum* sollten Sie vertraut werden, da er im Verlauf des Kurses immer wieder verwendet wird. Dies gilt natürlich erst recht für das Thema Bäume bzw. aufspannende Bäume, wobei in diesem Kurs der Graphenfall gegenüber dem Digraphenfall der wichtigere ist. Der Algorithmus Breitensuche und die Matrix-Tree-Theoreme sind Ergebnisse dieses Kapitels, die Sie verstanden haben sollten. Auch viele „kleinere“ Propositionen und Sätze werden sich später als ausgesprochen nützliche Helfer erweisen.

2.1 Wege, Kreise und Zusammenhang in Graphen

Der Begriff des Zusammenhangs für Graphen basiert auf dem Begriff der Verbindbarkeit von Knoten durch Kantenfolgen.

2.1.1 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Dann heißt eine alternierende Folge $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ von Knoten $v_i \in V$ und Kanten $e_i \in E$ eine **Kantenfolge (der Länge k)** von v_0 nach v_k , wenn $\partial(e_i) = v_{i-1}v_i$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

Eine solche Kantenfolge nennen wir meist kürzer v_0, v_k -**Kantenfolge**.

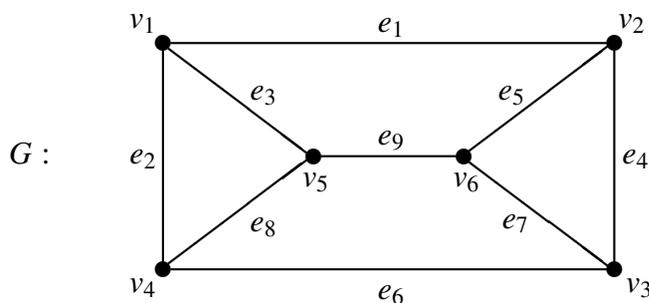
Die **Länge** einer Kantenfolge F in G bezeichnen wir mit $\ell(F)$.

Zwei Knoten v und w des Graphen G heißen (durch eine Kantenfolge) **verbindbar**, wenn es eine Kantenfolge von v nach w gibt.

G heißt **zusammenhängend**, wenn in G je zwei Knoten verbindbar sind.

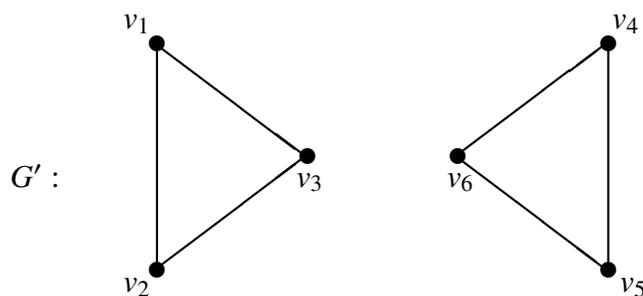
G heißt **minimal zusammenhängend**, wenn G zusammenhängend ist, aber $G - e$ für keine Kante $e \in E$ zusammenhängend ist.

2.1.2 Beispiel



Beispiel einer Kantenfolge: $v_1, e_1, v_2, e_5, v_6, e_7, v_3, e_6, v_4, e_8, v_5, e_3, v_1$.

Der Graph G ist zusammenhängend, da aus der vorstehenden Kantenfolge durch zyklische Verschiebung (vgl. 2.1.9(3)) je 2 Knoten verbunden werden können.



Der Graph G' ist nicht zusammenhängend, da es keine Kante gibt, die sowohl mit einem Knoten der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ als auch mit einem Knoten der Menge $\{v_4, v_5, v_6\}$ inzidiert.

2.1.3 Bemerkungen und Bezeichnungen

(1) Die Nummerierung der Elemente einer Kantenfolge in Definition 2.1.1 hat nichts mit einer Nummerierung des Graphen G zu tun. Insbesondere sind hier Wiederholungen von Knoten und Kanten erlaubt.

(2) Eine Kantenfolge $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ in einem *schlichten* Graphen wird bereits durch ihre **Knotenspur** $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ wohlbestimmt. Die Angabe der Kanten e_i in einer Kantenfolge ist nur in solchen Graphen wirklich von Bedeutung, die parallele Kanten enthalten.

(3) Eine Kantenfolge $F : v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ in einem Graphen G kann stets als Teilgraph $G_F = (V_F, E_F, \partial_F)$ von G interpretiert werden mit $V_F := \{v_0, \dots, v_k\}$, $E_F := \{e_1, \dots, e_k\}$ und $\partial_F(e_i) := v_{i-1}v_i$ für $i = 1, \dots, k$.

Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind und um die Schreibweise zu vereinfachen erlauben wir uns, kurz F für G_F , $v \in F$ für $v \in V_F$ und $e \in F$ für $e \in E_F$ zu schreiben.

(4) Als Extremfall betrachten wir auch einen Knoten v_0 allein als v_0, v_0 -Kantenfolge der Länge 0 und bezeichnen diese als **triviale Kantenfolge**.

(5) Ist $F : v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ eine Kantenfolge in einem Graphen G , so bezeichnet $F^- : v_k, e_k, v_{k-1}, \dots, v_1, e_1, v_0$ die zu F **inverse Kantenfolge**.

F^- hat stets die gleiche Länge wie F .

(6) Sind $F : v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ und $F' : v'_0, e'_1, v'_1, \dots, v'_{l-1}, e'_l, v'_l$ zwei Kantenfolgen in einem Graphen G mit $v_k = v'_0$, so bezeichnet

$$F \cup F' : v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k (= v'_0), e'_1, v'_1, \dots, v'_{l-1}, e'_l, v'_l$$

die **zusammengesetzte Kantenfolge**.

Die Länge von $F \cup F'$ ist die Summe der Längen von F und F' .

2.1.4 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Zeigen Sie:

(1) Auf der Knotenmenge V definiert „verbindbar“ eine Äquivalenzrelation.

(2) Ist $V \neq \emptyset$ und sind V_1, \dots, V_r die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation „verbindbar“ auf V , so gilt für die von den V_i induzierten Teilgraphen $G_i := G[V_i]$ mit den Kantenmengen $E_i := \{e \in E \mid \partial(e) \in \binom{V_i}{2} \cup \binom{V_i}{1}\}$:

- (i) $E = \bigcup_{i=1}^r E_i$ und $G = \bigcup_{i=1}^r G_i$ sind disjunkte Vereinigungen.
- (ii) Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ ist G_i ein maximaler zusammenhängender nichtleerer Teilgraph von G . Maximal heißt: es gibt keinen zusammenhängenden Teilgraphen G' von G mit $G_i \subseteq G'$ und $G_i \neq G'$.
- (3) G zerfällt in eine eindeutig bestimmte Menge \mathcal{K} zusammenhängender und paarweise disjunkter nichtleerer Teilgraphen. Ist $G \neq \emptyset$, so gilt mit den Bezeichnungen von (2) $\mathcal{K} = \{G_1, \dots, G_r\}$.

2.1.5 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Dann nennen wir einen maximalen zusammenhängenden nichtleeren Teilgraphen von G eine **Komponente** von G und bezeichnen mit $c(G)$ die nach 2.1.4(3) wohlbestimmte **Anzahl verschiedener Komponenten** von G .

2.1.6 Bemerkung zum Sprachgebrauch von „maximal“ und „minimal“

Zur Verwendung der in diesem Kurs häufiger vorkommenden Adjektive „maximal“ und „minimal“ geben wir die folgende Präzisierung:

Ist \mathcal{M} eine Menge und \sqsubseteq eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf \mathcal{M} , so nennt man $(\mathcal{M}, \sqsubseteq)$ eine **partiell geordnete Menge** (vgl. Kurs 01143 Lineare Algebra, 8.1.42).

$M \in \mathcal{M}$ heißt **maximales** (bzw. **minimales**) Element in \mathcal{M} , wenn für jedes $N \in \mathcal{M}$ mit $M \sqsubseteq N$ (bzw. $N \sqsubseteq M$) stets $N = M$ gilt (vgl. Kurs 01143, 8.1.49).

$M \in \mathcal{M}$ heißt **größtes** (bzw. **kleinstes**) Element von \mathcal{M} , wenn für jedes $N \in \mathcal{M}$ stets $N \sqsubseteq M$ (bzw. $M \sqsubseteq N$) gilt.

Ein größtes (bzw. kleinstes) Element von \mathcal{M} – wenn es denn existiert – ist eindeutig bestimmt und ein maximales (bzw. minimales) Element in \mathcal{M} .

Die Umkehrung dieser Aussage gilt i.A. nicht, da „maximal“ (bzw. „minimal“) nur relativ zu den mit einem bestimmten M vergleichbaren Elementen von \mathcal{M} gilt und nicht absolut für alle Elemente von \mathcal{M} .

In \mathcal{M} kann es durchaus mehrere maximale (bzw. minimale) Elemente geben.

Ist $(\mathcal{M}, \sqsubseteq)$ sogar **total geordnet**, d.h. gilt für alle $M, N \in \mathcal{M}$ stets $M \sqsubseteq N$ oder $N \sqsubseteq M$ (vgl. Kurs 01143, 8.1.43), kann es höchstens ein maximales (bzw. minimales) Element in \mathcal{M} geben, das größtes (bzw. kleinstes) Element von \mathcal{M} ist, wenn es existiert.

In vielen Fällen ist eine „Anzahlfunktion“ $a : (\mathcal{M}, \sqsubseteq) \rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ gegeben, die bezüglich der „Kleiner-gleich“-Relation \leq auf \mathbb{N} streng monoton ist.

Ein $M \in \mathcal{M}$, so dass $a(M)$ größtes (bzw. kleinstes) Element von $(a(\mathcal{M}), \leq)$ ist, nennen

wir **Maximum** (bzw. **Minimum**) von \mathcal{M} bzgl. a .

Da wir nur endliche Graphen betrachten, wird \mathcal{M} meist endlich sein, und da mit (\mathbb{N}, \leq) auch $(a(\mathcal{M}), \leq)$ total geordnet ist, existiert stets ein solches Maximum (bzw. Minimum) von \mathcal{M} bzgl. a , möglicherweise aber auch mehrere.

Jedes Maximum (bzw. Minimum) M von \mathcal{M} bzgl. a ist ein maximales (bzw. minimales) Element in \mathcal{M} , denn aus $N \in \mathcal{M}$ und $M \subseteq N$ (bzw. $N \subseteq M$) folgt $M = N$ oder wegen der strengen Monotonie $a(M) < a(N) \leq a(M)$ (bzw. $a(M) \leq a(N) < a(M)$), so dass nur $M = N$ möglich ist.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt i.A. nicht.

Beispiele: Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $V \neq \emptyset$.

(1) Ist $\mathcal{M}_1 := \{G[E'] \mid E' \subseteq E \text{ und } G[E'] \text{ zusammenhängend}\}$, so ist G genau dann minimal zusammenhängend, wenn G minimales Element von $(\mathcal{M}_1, \subseteq)$ ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{M}_1 = \{G\}$ gilt.

(2) Ist $\mathcal{M}_2 := \{H \mid H \text{ zusammenhängender Teilgraph von } G\}$, so sind die maximalen Elemente von $(\mathcal{M}_2, \subseteq)$ gerade die Komponenten von G .

(3) Ist $\mathcal{M}_3 := \{V' \subseteq V \mid G[V'] \text{ knotentrivial}\}$ und G vollständig bipartit mit Bipartition (V_1, V_2) , so sind die Partitions Mengen V_1 und V_2 die beiden einzigen maximalen Elemente von $(\mathcal{M}_3, \subseteq)$.

Ist $|V_1| = |V_2|$, so sind sowohl V_1 als auch V_2 Maxima in $(\mathcal{M}_3, \subseteq)$ bzgl. der Anzahlfunktion $|\cdot| : \mathcal{M}_3 \rightarrow \mathbb{N}$.

Gilt jedoch $|V_1| < |V_2|$, so ist nur V_2 ein solches Maximum, V_1 hingegen nicht.

2.1.7 Proposition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein zusammenhängender Graph mit $V \neq \emptyset$.

Dann gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $|V|$.

Für $|V| = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig: $|E| \geq 0 = |V| - 1$.

Angenommen, die Behauptung sei richtig für alle nichtleeren zusammenhängenden Graphen mit höchstens k Knoten, $k \geq 1$.

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein zusammenhängender Graph mit $|V| = k + 1$.

Wir wählen ein $v \in V$. $G - v$ habe die Komponenten $G_i = (V_i, E_i, \partial_i)$, $i = 1, \dots, r$. Dann hat v in jeder Komponente G_i mindestens einen Nachbarn. Denn andernfalls gäbe es ein $j \in \{1, \dots, r\}$, so dass v in G_j keinen Nachbarn hätte. Dann wäre G_j eine Komponente in G , da kein $w \in V_j$ einen Nachbarn in einer der Knotenteilmengen V_i mit $i \neq j$ hat. Da G zusammenhängend ist, würde $G_j = G$ folgen, was $v \notin V_j$ widerspricht.

Da v nun in jeder Komponente G_i einen Nachbarn hat, gilt $d_G(v) \geq r$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|E_i| \geq |V_i| - 1$ für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ und damit

Hier fehlen die Seiten 65 bis 114

3 Eulertouren und Hamiltonkreise

3.0 Einleitung

Durchlaufungsfragen gehören zu den ältesten Problemstellungen der Graphentheorie, voran das berühmte *Königsberger Brückenproblem*, in dem vielfach der historische Auftakt der Graphentheorie gesehen wird. Nach *Leonhard Euler*, der mit diesem Problem einen bis dahin nahezu unbekanntem Zweig der Mathematik, die *geometria situs* oder, nach *Gottfried Wilhelm Leibniz*, die *analysis situs* bekannt machte, werden denn auch die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse bei den Untersuchungen zur Existenz überdeckender Touren in Graphen bzw. Digraphen benannt.

Die Existenz solcher *Eulertouren* kann sowohl in Graphen als auch in Digraphen bemerkenswert einfach getestet werden (*Satz von Euler*). Aus der erstaunlichen Fülle von effizienten Algorithmen zur Bestimmung von Eulertouren, wie sie z.B. in den Bänden von *H. Fleischner* ([8]) studiert werden können, haben wir uns hier im Fall von Graphen für die ausführliche Darstellung eines Algorithmus entschieden, der zugleich auch eine Lösung des *Labyrinth-Problems* liefert in Form einer Kantenfolge, die jede Kante in jeder Richtung genau einmal durchläuft. Dieser Algorithmus zieht bei jedem Verfahrensschritt nur *lokale* Informationen über den Graphen heran und nicht globale, die einen Überblick über den ganzen Graphen erfordern wie z.B. die Überprüfung des Zusammenhangs. Er erlaubt zudem eine reizvolle Darstellung in Anlehnung an die griechische Mythologie. Eine verwandte Fragestellung ist die nach der Existenz überdeckender Kantenfolgen kürzester Länge. Sie ist unter dem Namen *Chinesisches Postbotenproblem* populär und richtet sich an zusammenhängende Graphen mit Gewichtsfunktion, wobei die Gewichte als Weglänge gedeutet werden können. Mit den Resultaten des ersten Abschnitts lässt sich dieses Problem prinzipiell lösen, die Präsentation eines effizienten Algorithmus ist hingegen zu anspruchsvoll, um hier noch Aufnahme zu finden.

Im Fall von Digraphen gehen wir anders vor und beschreiben einen effizienten Algorithmus, der Eulertouren nach Wahl aufspannender Senkenbäume erzeugt. Er ermöglicht zusätzlich die Berechnung der Anzahl der verschiedenen Eulertouren in Digraphen (*Satz von van Aardenne-Ehrenfest und de Bruijn*). Als Anwendung entwickeln wir diesen Algorithmus im Spezialfall der de Bruijn-Graphen weiter zu einem Algorithmus zur Erzeugung von *de Bruijn-Zyklen*, die in verschiedenen wissenschaftlichen und technischen Bereichen eine Rolle spielen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wenden wir uns der Frage nach der Existenz und der algorithmischen Bestimmung von aufspannenden Kreisen, den *Hamiltonkreisen* zu. Auf den ersten Blick scheint es sich dabei um eine ganz ähnliche Problematik zu handeln. Sie wird sich jedoch als sehr viel schwieriger herausstellen. Bisher ist weder eine einfache

Charakterisierung der *hamiltonschen Graphen*, d.h. solcher Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten, gelungen noch ein effizienter Algorithmus zur Überprüfung dieser Eigenschaft gefunden worden. Es wird allgemein vermutet, dass dies auch nicht gelingen wird. Demzufolge werden wir hier mit bescheideneren Ergebnissen in der Art notwendiger oder hinreichender Bedingungen zufrieden sein müssen. Hauptergebnis ist der *Satz von Bondy und Chvátal*, der im Wesentlichen eine wiederholte Anwendung des *Lemmas von Ore* darstellt, das seinerseits auf der *Knotengradbedingung von Ore* für ein Paar nicht benachbarter Knoten fußt: die Summe ihrer Knotengrade entspricht mindestens der Anzahl der Knoten insgesamt. Dabei wird das Problem aber nur verlagert auf einen anderen Graphen, den *Hamiltonabschluss*, von dem man hofft, dass er der Lösung des Problems zugänglicher ist, weil er über zusätzliche Kanten verfügt. Eine Abschwächung in Kauf nehmend liefert der *Satz von Chvátal* eine unmittelbare hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises über die *Chvátal-Bedingung* für die Gradfolge.

Die algorithmische Behandlung des Hamilton-Problems muss unbefriedigend bleiben, da wir keinen effizienten Algorithmus angeben können. Der Beweis des Satzes von Bondy-Chvátal ist jedoch konstruktiv, so dass unser darauf aufbauender Algorithmus Bondy-Chvátal bei vollständigem Hamiltonabschluss eines Graphen G einen Hamiltonkreis in G erzeugt.

In Zusammenhang mit dem Hamilton-Problem stellen wir auch das bekannte *Problem des Handelsreisenden (Traveling Salesman Problem)* kurz vor.

Ebenfalls knapp werden wir den Digraphenfall des Hamilton-Problems behandeln, wo wir nur Turniere untersuchen. Diese Digraphen, deren unterliegender Graph vollständig ist, sind nicht notwendig hamiltonsch, enthalten aber nach dem *Satz von Rédei* stets einen aufspannenden Weg, d.h. einen *Hamiltonweg*. Nach dem *Satz von Moon* sind die hamiltonschen Turniere genau die stark zusammenhängenden Turniere.

Nach dem Studium dieses Kapitels sollten Sie die zentralen Begriffe und Ergebnisse wie die Sätze von Euler für Graphen und Digraphen und den Satz von Bondy-Chvátal sowie ihre Beweismethoden gründlich verstanden haben. Dies gilt ebenso für den Algorithmus von Euler-Tarry und den Algorithmus zur Bestimmung von Eulertouren in Digraphen. Den Satz von van Aardenne-Ehrenfest und de Bruijn sollten Sie in diesem Zusammenhang ebenfalls kennen. Zurückgestellt werden kann die nicht ganz einfache Anwendung auf die de Bruijn-Zyklen. Dies gilt auch für die Algorithmen im Abschnitt über Hamiltonkreise. Die theoretische Grundlage des Algorithmus Bondy-Chvátal ist ja nichts anderes als der Beweis des Lemmas von Ore, das den Beweis des Satzes von Bondy-Chvátal i.W. ausmacht. Informell Auskunft geben können sollten Sie auf jeden Fall über den Satz von Chvátal und die Sätze von Rédei und Moon über Turniere sowie über die populären Probleme des Chinesischen Postboten und des Handelsreisenden.

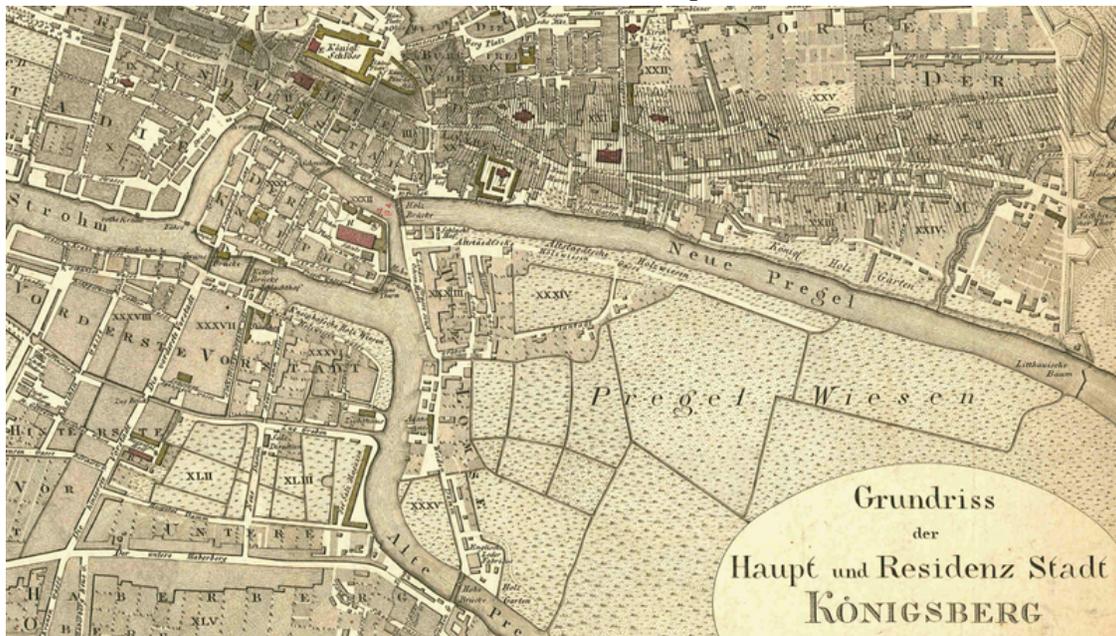
3.1 Eulertouren in Graphen

Warum Euler?

In seiner 1741 erschienenen Arbeit *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128 - 140*, die als eine der ersten Arbeiten auf dem Gebiet der Graphentheorie gilt, beschäftigte sich der Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler* mit dem

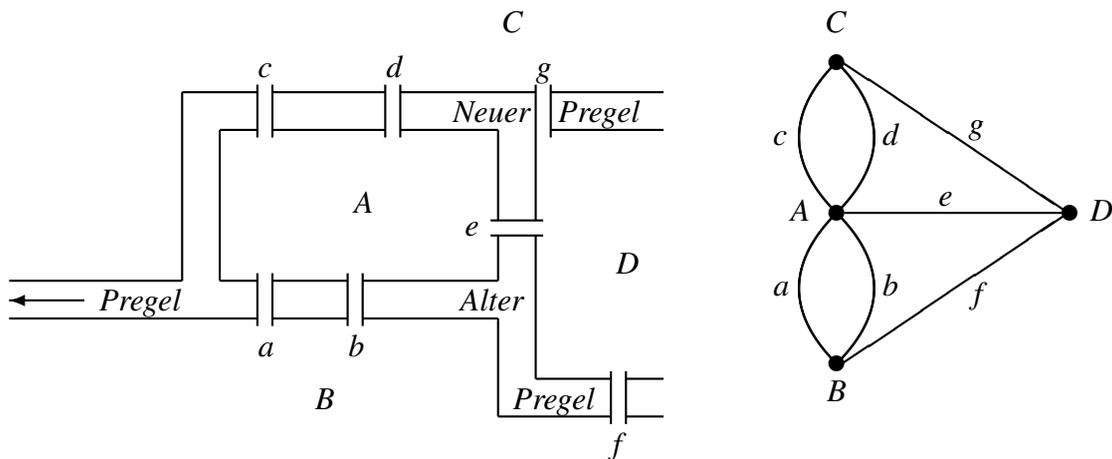
3.1.1 Königsberger Brückenproblem.

Im 18. Jahrhundert führten in der ostpreußischen Stadt Königsberg 7 Brücken über den Fluss Pregel und seine Seitenarme, den Alten Pregel und den Neuen Pregel, die die einzelnen Stadtteile und die zentrale Dominsel, den Kneiphof, untereinander verbanden.



Die Bürger von Königsberg fragten sich nun, ob man einen Rundgang durch ihre Stadt so einrichten könne, dass dabei jede dieser 7 Brücken einmal und nicht mehr als einmal überquert wird.

Euler sah natürlich, dass eine Lösung dieses Problems durch genaues Aufzählen aller möglichen Gänge wegen der großen Zahl der Kombinationen sehr mühsam und für gleichartige, aber kompliziertere Situationen nicht mehr praktikabel wäre, und suchte nach einer sehr viel einfacheren Methode. Sie beruhte darauf, die durch den Fluss Pregel mit seinen beiden Seitenarmen abgetrennten Stadtteile mit Buchstaben A, B, C, D zu bezeichnen und ebenso die verbindenden Brücken mit a, b, c, \dots und führte so implizit den diesem Problem zugrunde liegenden Graphen ein:



Euler zeigte nun in seiner Arbeit, dass es in Königsberg keinen Rundgang der gewünschten Art geben kann, da der zugrunde liegende Graph Knoten ungeraden Grades besitzt.

Im Folgenden werden wir die Fragestellung in der mathematisch gebotenen Allgemeinheit behandeln.

3.1.2 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und F eine Kantenfolge in G .

F heißt **eulerscher Kantenzug** in G , falls F jede Kante von G genau einmal enthält.

F heißt **Eulertour**, falls F ein geschlossener eulerscher Kantenzug ist.

Der Graph G heißt **eulersch**, wenn er eine Eulertour enthält.

Der Graph G heißt **gerade**, wenn jeder Knoten $v \in V$ geraden Knotengrad hat.

3.1.3 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Zeigen Sie:

- (1) Jede Tour ist, aufgefasst als Teilgraph in G , ein gerader Graph.
- (2) Ist G gerade, F eine Tour in G mit Kantenmenge E_F und $G' := G - E_F$, so ist auch G' gerade.
- (3) Ist G gerade, so ist jeder nicht über sein Ende hinaus verlängerbare Kantenzug in G eine Tour.
- (4) Ist G nichttrivial, zusammenhängend und gerade, so gilt $d_G(v) \geq 2$ für alle $v \in V$.
- (5) Gilt $d_G(v) \geq 2$ für alle $v \in V$, so enthält G einen Kreis.

3.1.4 Satz (Euler)

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph mit $V \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

- (1) G ist eulersch.
- (2) G hat höchstens eine nichttriviale Komponente und diese Komponente ist gegebenenfalls Vereinigung paarweise kantendisjunkter Kreise.
- (3) G ist gerade und hat höchstens eine nichttriviale Komponente.

Beweis: (3) \Rightarrow (1): Falls G trivial ist, ist jede triviale Tour eine Eulertour in G und (1) offensichtlich richtig.

Ist G nicht trivial, so sei K die einzige nichttriviale Komponente von G . In K sei F ein Kantenzug maximaler Länge $\ell(F)$. G ist nach Voraussetzung gerade, also auch K und somit F nach 3.1.3(3) eine Tour in K .

Angenommen, $F \neq K$. Da K zusammenhängend ist, gibt es eine Kante e in K mit $\partial(e) = vu$ und $v \in F$, die nicht in F liegt. Durchlaufen wir F , beginnend und endend bei v und gehen dann über e nach u , so erhalten wir einen Kantenzug F' in K mit $\ell(F') > \ell(F)$, was der Maximalität der Länge $\ell(F)$ von Kantenzügen in K widerspricht. Folglich ist $F = K$ und F somit eine Eulertour in K und damit in G .

(1) \Rightarrow (2): Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach der Anzahl der Kanten $|E|$. Für $|E| = 0$ ist G trivial, also hat G offensichtlich die Eigenschaft (2).

Angenommen, (2) sei richtig für $0 \leq |E| \leq k$, und es sei $|E| = k + 1$.

Dann hat G mindestens eine Kante und enthält nach Voraussetzung eine Eulertour F . Da F alle Kanten von G enthält, ist F ein maximaler zusammenhängender nichtleerer Teilgraph von G und somit eine nichttriviale Komponente von G . Da evtl. vorhandene weitere Komponenten von G keine Kanten enthalten können, sind diese trivial.

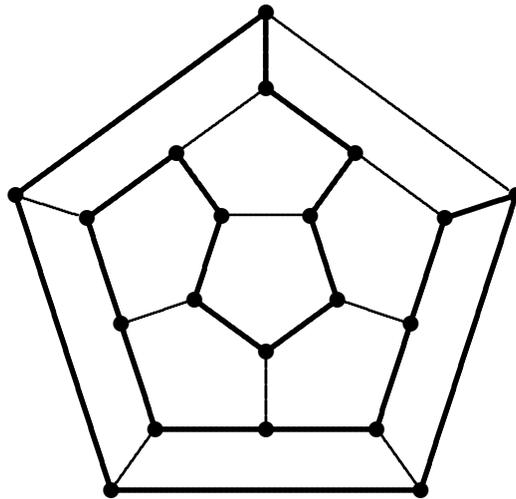
Nach 3.1.3(1) ist F gerade, nach 3.1.3(4) gilt $d_F(v) \geq 2$ für alle $v \in V$, und nach 3.1.3(5) enthält F einen Kreis $C = (V', E', \partial')$. Da C eine Tour ist und F gerade, ist nach 3.1.3(2) auch $F' := F - E'$ gerade und damit auch alle nichttrivialen Komponenten von F' , die wegen (3) \Rightarrow (1) eulersch sind und somit nach Induktionsvoraussetzung Vereinigungen paarweise kantendisjunkter Kreise. $F = F' \cup C$ ist folglich eine Vereinigung paarweise kantendisjunkter Kreise.

(2) \Rightarrow (3): Sei $v \in V$. Ist $d_G(v) \neq 0$, so liegt v nach Voraussetzung in der einzigen nichttrivialen Komponente K von G , die Vereinigung von paarweise kantendisjunkten Kreisen ist. v liege in maximal l von diesen Kreisen. Da diese Kreise kantendisjunkt sind, inzidiert v pro Kreis mit genau zwei Kanten oder einer Schlinge, und diese kommen in anderen Kreisen nicht vor, so dass $d_G(v) = d_K(v) = 2l$ und damit G gerade ist. □

Hier fehlen die Seiten 120 bis 142

3.3 Hamiltonkreise in Graphen

Hamiltonkreise sind benannt nach dem irischen Mathematiker, Astronomen und Physiker *Sir William Rowan Hamilton*. Hamilton brachte im Jahre 1859 unter dem Namen „Traveller’s Dodecahedron or A Voyage Round The World“ ein Spiel heraus, bei dem es im Wesentlichen darum ging, aufspannende Kreise im Graphen des Dodekaeders zu finden:



Die fetten Kanten bilden einen aufspannenden Kreis.

3.3.1 Definition

Sei G ein Graph und F eine Kantenfolge in G .

F heißt **Hamiltonweg** in G , falls F ein aufspannender Weg in G ist.

F heißt **Hamiltonkreis** in G , falls F ein aufspannender Kreis in G ist.

Der Graph G heißt **hamiltonsch**, wenn er einen Hamiltonkreis enthält.

3.3.2 Bemerkungen und Beispiele

(1) Die Eigenschaft „aufspannend“ bedeutet, jeder Knoten des Graphen wird erreicht (vgl. 1.1.23(2)).

(2) Jeder vollständige Graph $G = (V, E)$ mit mehr als zwei Knoten ist hamiltonsch:

Sei $n := |V| \geq 3$; man wähle eine Knotennummerierung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und folge den Kanten $e_i := v_{i-1}v_i$, $i \in \{2, \dots, n\}$ und schließlich $e := v_nv_1$.

(3) Hingegen sind alle vollständigen Graphen mit gerader Knotenanzahl nicht eulersch, da ihre Knotengrade ungerade sind.

Umgekehrt gibt es eulersche Graphen, die nicht hamiltonsch sind: z.B. Graphen, die aus zwei Kreisen der Länge mindestens 2 bestehen, die genau einen Knoten gemeinsam

haben.

(4) Ist G ein Graph und C ein Hamiltonkreis in G , so ist $C - e$ für jede Kante $e \in C$ ein Hamiltonweg in G .

Umgekehrt gibt es allerdings Graphen, die einen Hamiltonweg enthalten, aber keinen Hamiltonkreis. Jeder Weg ist ein solcher Graph.

(5) Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph, $x \notin V$ und $\{e_v \mid v \in V\} \cap E = \emptyset$.

Wir definieren $G^* := (V^*, E^*, \partial^*)$ durch $V^* := V \cup \{x\}$, $E^* := E \cup \{e_v \mid v \in V\}$ und $\partial^*(e) := \partial(e)$ für $e \in E$, $\partial^*(e_v) := vx$ für alle $v \in V$.

G enthält genau dann einen Hamiltonweg, wenn G^* einen Hamiltonkreis enthält.

Beweis: Ist W ein v, w -Hamiltonweg in G , so ist $C := x, e_v, W, e_w, x$ ein Hamiltonkreis in G^* . Ist C ein Hamiltonkreis in G^* , so ist $C - x$ ein Hamiltonweg in G . \square

Damit lassen sich Ergebnisse über die Existenz von Hamiltonkreisen in solche über die Existenz von Hamiltonwegen umdeuten.

3.3.3 Aufgabe

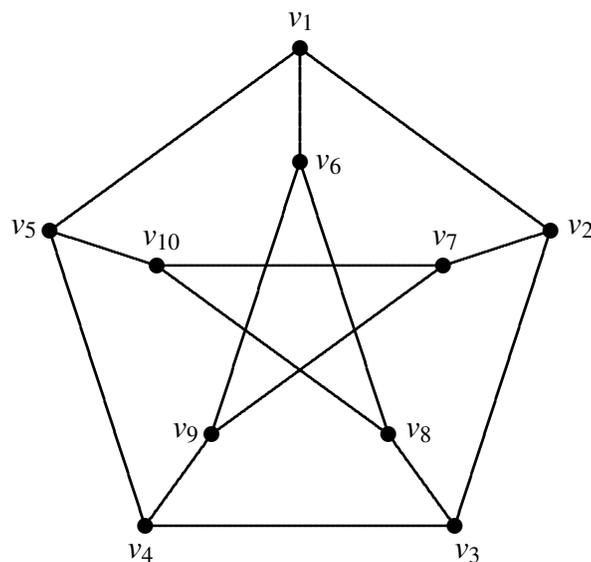
L Zeigen Sie:

- (1) Ist G hamiltonsch und v ein Knoten von G , so ist $G - v$ zusammenhängend.
- (2) Ist G ein bipartiter hamiltonscher Graph, so gilt $|V_1| = |V_2|$ für jede Bipartition (V_1, V_2) von G .

3.3.4 Aufgabe

L Der folgende Graph G heißt **Petersen-Graph**.

Untersuchen Sie, ob der Petersen-Graph G einen Hamiltonkreis enthält.



Die Frage nach der Existenz eines Hamiltonkreises in einem Graphen G ist zwar in gewisser Weise analog zur Frage nach einer Eulertour in G – es handelt sich in beiden Fällen um Durchlaufungsprobleme –, jedoch ist diese Ähnlichkeit nur vordergründig. Wir haben mit dem Satz von Euler 3.1.4 eine sehr einfache vollständige Charakterisierung für eulersche Graphen und mit dem Algorithmus Euler-Tarry einen sehr effizienten (weil linearen) Algorithmus zum Auffinden einer Eulertour in einem eulerschen Graphen angegeben. Entsprechende Ergebnisse für hamiltonsche Graphen werden uns hier nicht möglich sein. Es handelt sich um schwierige, derzeit noch ungelöste Probleme. Allgemein wird angenommen, dass sich für die Lösung des **Hamilton-Problems** der Entscheidung, ob ein Graph hamiltonsch ist oder nicht, kein effizienter (d.h. polynomialer) Algorithmus finden lässt. Im Folgenden werden Sie einige notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für hamiltonsche Graphen kennen lernen.

3.3.5 Bemerkung

Offensichtlich ist ein Graph G mit mehr als zwei Knoten genau dann hamiltonsch, wenn sein unterliegender schlichter Graph $S(G)$ (vgl. 1.1.9) hamiltonsch ist.

Hamiltonsche Graphen mit höchstens zwei Knoten sind ein Graph mit einem Knoten und mindestens einer Schlinge und ein Graph mit zwei Knoten und mindestens zwei parallelen Kanten; die jeweiligen unterliegenden schlichten Graphen sind indes nicht hamiltonsch. Bis auf diese ziemlich uninteressanten Typen können wir uns daher in diesem Abschnitt des Kurses auf die Untersuchung schlichter Graphen beschränken.

3.3.6 Proposition

Ist $G = (V, E, \partial)$ ein hamiltonscher Graph und $U \subseteq V$ mit $U \neq \emptyset$, so hat $G - U$ höchstens $|U|$ Komponenten.

Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für hamiltonsche Graphen mit höchstens zwei Knoten.

Sei $n := |V| \geq 3$, C ein Hamiltonkreis in G mit Knotenspur v_1, \dots, v_n, v_1 , $\emptyset \neq U \subseteq V$ und C_1, \dots, C_r , $r \geq 2$ die Komponenten von $G - U$ (der Fall $r < 2$ ist trivial).

Wir definieren nun $v_{n+1} := v_1$, $i_k := \max\{i \in \{1, \dots, n\} \mid v_i \in C_k \text{ und } v_{i+1} \notin C_k\}$ für $k \in \{1, \dots, r\}$ und $\bar{U} := \{u \in U \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } u = v_{i+1} \text{ und } v_i \notin U\}$.

Für jedes $k \in \{1, \dots, r\}$ gilt $v_{i_k} \in C_k \subset G - U$ und $v_{i_k+1} \notin C_k$, also $v_{i_k+1} \in U$, da andernfalls v_{i_k} und v_{i_k+1} in $G - U$ benachbart wären, was $v_{i_k+1} \notin C_k$ widerspricht.

Wegen $v_{i_k} \notin U$ gilt sogar $v_{i_k+1} \in \bar{U}$.

Für $1 \leq k < l \leq r$ gilt $i_k \neq i_l$, da C_k und C_l als Komponenten von $G - U$ disjunkt sind. Die v_{i_k+1} , $k \in \{1, \dots, r\}$ sind daher paarweise verschieden und somit $c(G - U) = r \leq |\bar{U}| \leq |U|$. \square

Hier fehlen die Seiten 145 bis 168

4 Zyklenraum und Schnittraum

4.0 Einleitung

Die *Algebraische Graphentheorie* behandelt graphentheoretische Probleme mit algebraischen Methoden. Kam die (Lineare) Algebra in den ersten drei Kapiteln bereits sporadisch als Hilfsmittel zum Einsatz, soll dieses vierte Kapitel dem Leser eine erste, stringenteren Einführung in diesen Zweig der Graphentheorie geben.

Im ersten Abschnitt „entdecken“ wir nach und nach die in einem Graphen verborgene algebraische Struktur durch die Untersuchung gewisser Objekte: *Zykeln*, *Minimalzyklen* (= Kreise), *Schnitte* (= Kozyklen) und *Minimalschnitte* (= Kokreise). Dabei handelt es sich zunächst um Kantenteilmengen des betrachteten Graphen.

Mit der Mengenoperation der *symmetrischen Differenz* $M + N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ für Teilmengen M, N einer festen Obermenge X wird die Potenzmenge 2^X zu einer abelschen Gruppe, also auch zu einem \mathbb{F}_2 -Vektorraum 2^X .

Für einen Graphen $G = (V, E, \partial)$ haben wir so zunächst den *binären Knotenvektorraum* 2^V und den *binären Kantenvektorraum* 2^E . In 2^E bilden nun die Menge der Zykeln in G einen Teilraum, den *binären Zyklenraum* $\mathcal{Z}_2(G)$, und die Menge der Schnitte in G den *binären Schnittraum* $\mathcal{S}_2(G)$. Das Adjektiv „binär“ bezieht sich dabei auf den Grundkörper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Als erstes stellen wir fest, dass $\mathcal{Z}_2(G)$ und $\mathcal{S}_2(G)$ zueinander orthogonale Teilräume sind. Im nächsten Schritt wird dargestellt, wie nach Wahl eines G aufspannenden Waldes T mit graphentheoretischen Methoden Basen von $\mathcal{Z}_2(G)$ und $\mathcal{S}_2(G)$ konstruiert werden können, die nur aus Kreisen bzw. Kokreisen bestehen. Wir nennen Sie daher *Kreisfundamentalsystem* bzw. *Kokreisfundamentalsystem* in G bzgl. T .

Mit der Einführung der *binären Randabbildung* $b : 2^E \longrightarrow 2^V$ bzw. *binären Korandabbildung* $b^t : 2^V \longrightarrow 2^E$ machen wir einen weiteren wichtigen Schritt zur Algebraisierung. Die binäre Randabbildung b kann i.W. als lineare Erweiterung der Inzidenzabbildung ∂ angesehen werden, und ihre darstellende Matrix bezüglich der kanonischen Basen E von 2^E und V von 2^V ist gerade die Inzidenzmatrix $B \bmod 2$, wodurch die Randabbildung die gesamte Information des Graphen (bis auf die Randknoten von Schlingen) beinhaltet. Letzteres gilt auch für die Korandabbildung b^t , deren darstellende Matrix bzgl. V und E gerade $(B \bmod 2)^t$ ist.

Ein erstes zentrales Ergebnis ist hier die Übereinstimmung des Zyklenraumes mit dem Kern der Randabbildung bzw. des Schnittraumes mit dem Bild der Korandabbildung.

Bis dahin war es möglich, dank der Festlegung auf den Grundkörper \mathbb{F}_2 die algebraische Interpretation gewisser struktureller Eigenschaften von Graphen auf die den Graphen angemessene Weise anschaulich mengentheoretisch zu realisieren. Diese Festlegung ist

nicht mehr haltbar, wenn wir z.B. Digraphen mit algebraischen Methoden behandeln wollen, da mit der Charakteristik 2 des Grundkörpers die Orientierung der Bögen unterdrückt wird. Wir kommen schon deswegen nicht umhin, \mathbb{F}_2 zu ersetzen, und entwickeln die Theorie für einen beliebigen Grundkörper \mathbb{K} . Das geht jetzt im zweiten Abschnitt nicht mehr mit graphentheoretischen Methoden wie im ersten Abschnitt, die Resultate wären sonst zu denen des ersten Abschnitt teilweise unverträglich. Vielmehr werden die Konflikte dadurch gelöst, dass wir mit Digraphen statt mit Graphen arbeiten und die Lineare Algebra von vorn herein mit voller Stärke zum Einsatz bringen. Den Graphenfall erhält man einfach durch die Wahl einer beliebigen Orientierung. Die Ergebnisse des ersten Abschnitt sind dabei Grundlage und Orientierung, so dass wir sie für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ bestätigt sehen, im Übrigen analoge Resultate auf allgemeinerer Basis erhalten.

Ist die Charakteristik von \mathbb{K} gleich 0, erhalten wir sogar weitergehende Aussagen, wie z.B. dass Zyklenraum und Schnittraum zueinander orthogonale Komplemente sind.

Wir treiben die Lineare Algebra dabei soweit, bis wir in der Lage sind, die Basen der fraglichen Teilräume des Knoten- bzw. Bogenvektorraums mit elementaren algebraischen Mitteln (Gauß-Algorithmus) zu bestimmen.

Dieser recht abstrakte Ansatz schließt Anwendungen keineswegs aus, im Gegenteil. Im dritten Abschnitt beschränken wir uns allerdings auf einen Einblick in die Theorie elektrischer Netzwerke, die auf *Gustav Robert Kirchhoff* (Mitte des 19. Jhs.) zurückgeht.

Der letzte Abschnitt ist lediglich ein kleiner Exkurs über Matroide, aus Platzgründen ohne Beweise, in dem der Leser auf eine den Begriff „Abhängigkeit“ bzw. „Unabhängigkeit“ bei Matrizen und Graphen vereinheitlichende Theorie aufmerksam gemacht werden soll. Insbesondere für die wiederholt angesprochene „Dualität“ erhält man hier einen befriedigenden abstrakten Rahmen und hoffentlich ein vertieftes Verständnis.

Ogleich sich die wichtigsten Ergebnisse dieser Kurseinheit im Abschnitt 4.2 befinden, werden diese ohne gründliches Studium des Abschnitts 4.1 nicht leicht verdaulich sein. Sie haben in 4.1 die Gelegenheit, Ihre Anschauung zu entwickeln, bevor Sie eine höhere Abstraktionsstufe in Angriff nehmen. Beide Abschnitte stehen in einem engen Zusammenhang, der zweite verallgemeinert und erweitert die Resultate des ersten. Wer mit der Linearen Algebra über beliebigen Körpern noch wenig vertraut ist, kann in 4.2 getrost erst einmal $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ setzen und auf seine Kenntnisse aus dem Kurs 01143 Lineare Algebra zurückgreifen.

Der Abschnitt über die Analyse einfacher elektrischer Netzwerke hat vor allem das Ziel, Sie exemplarisch von der fruchtbaren Wechselbeziehung zwischen Theorie und Anwendung zu überzeugen.

Den kleinen Exkurs über Matroide können Sie als Anhang betrachten und ohne weiteres zurückstellen. Die Rolle, die Matroide für die Graphentheorie spielen können, geht allerdings weit über das hier Angedeutete hinaus.

4.1 Binärer Zyklusraum und binärer Schnittraum

4.1.1 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $Z, S \subseteq E$.

- (1) Z heißt **Zyklus** in G , wenn ein (und damit jeder) Teilgraph von G mit der Kantenmenge Z gerade ist.
- (2) S heißt **Schnitt** in G (vgl. 1.1.16), wenn es eine Partition (V_1, V_2) von V gibt mit $S = G[V_1, V_2]$.
- (3) Ein nichtleerer Schnitt S in G heißt **Minimalschnitt** in G , wenn er minimal ist (vgl. 2.1.6) unter den nichtleeren Schnitten in G .
- (4) S heißt **trennend** oder **trennende Kantenmenge** in G , wenn $c(G - S) > c(G)$.

4.1.2 Bemerkungen

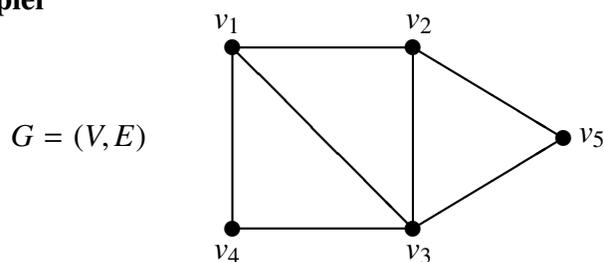
Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $Z \subseteq E$.

- (1) Die Teilgraphen von G mit Kantenmenge Z unterscheiden sich höchstens durch isolierte Knoten (also Knoten, die in G nicht inzident zu Kanten aus Z sind).
- (2) Ein Teilgraph von G ist nach 3.1.6 genau dann gerade, wenn jede seiner Komponenten eulersch bzw. eine endliche (möglicherweise leere) Vereinigung paarweise kantendisjunkter Kreise in G ist.
 Z ist daher genau dann ein Zyklus in G , wenn Z eine endliche (möglicherweise leere) Vereinigung paarweise disjunkter Kantenmengen von Kreisen in G ist.
Insbesondere ist die Kantenmenge eines Kreises in G ein Zyklus in G .
- (3) Die Kantenmenge eines Kreises enthält keine echte nichtleere Kantenteilmenge eines Kreises. Folglich ist ein nichtleerer Zyklus in G genau dann minimal unter den nichtleeren Zyklen in G , wenn er die Kantenmenge eines Kreises ist.

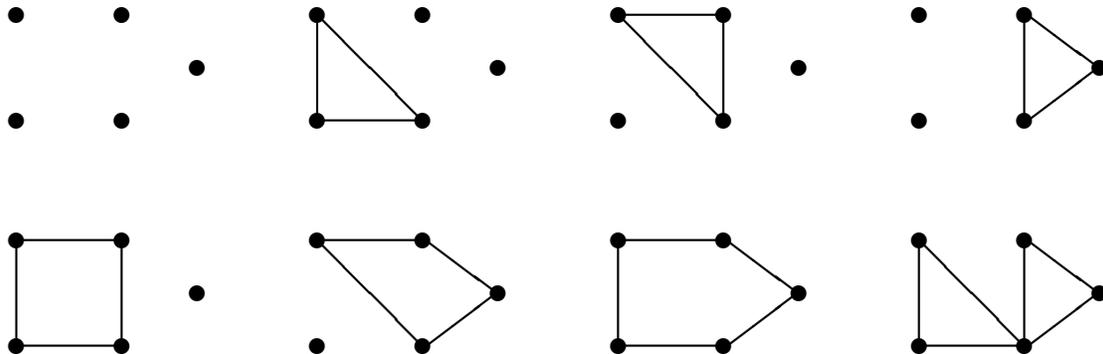
Die Kantenmengen von Kreisen in G sind also die „Minimalzyklen“ in G .

- (4) In der Theorie der Matroide (vgl. 4.4) sind Schnitte die zu den Zyklen dualen Objekte. Man nennt sie daher auch **Kozyklen** und entsprechend die Minimalschnitte **Kokreise**.

4.1.3 Beispiel

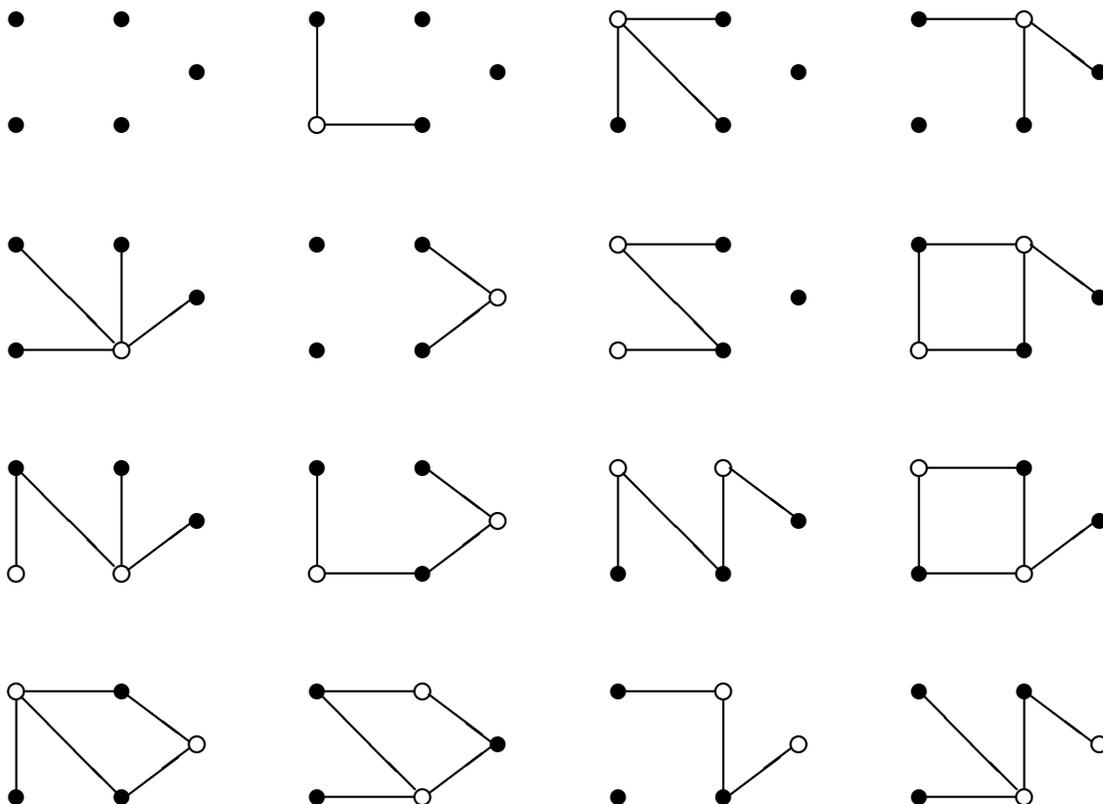


Die 8 Zyklen in G sind (als aufspannende Teilgraphen dargestellt):



Bis auf den ersten und den letzten Zyklus handelt es sich um Kreise („Minimalzyklen“).

Die 16 Schnitte in G sind (als aufspannende Teilgraphen und mit optisch hervorgehobenen Partitionen dargestellt):



Von den Schnitten sind die letzten drei in der ersten Reihe, die ersten drei in der zweiten Reihe, der erste und der dritte in der dritten Reihe sowie die beiden letzten in der letzten Reihe Minimalschnitte in G .

4.1.4 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $S \subseteq E$.

Zeigen Sie:

- (1) Ein nichtleerer Schnitt S in G ist trennend (i.A. gilt $c(G - S) = c(G) + 1$ aber nicht).
- (2) Die Umkehrung von (1) ist jedoch falsch (selbst im Falle $c(G - S) = c(G) + 1$).
- (3) Jede trennende Kantenmenge S in G enthält einen nichtleeren Schnitt in G .
- (4) S ist genau dann minimal trennend, wenn S ein Minimalschnitt in G ist.

4.1.5 Satz

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $S \subseteq E$.

(1) Sei G zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- (a) S ist ein Minimalschnitt in G .
- (b) Es gibt eine Partition (V_1, V_2) von V mit $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ und $S = G[V_1, V_2]$, und für jede solche Partition sind $G[V_1]$ und $G[V_2]$ zusammenhängend.
- (c) Es gibt eine Partition (V_1, V_2) von V mit $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ und $S = G[V_1, V_2]$ derart, dass $G[V_1]$ und $G[V_2]$ zusammenhängend sind.

(2) Sei G nicht zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- (a) S ist ein Minimalschnitt in G .
- (b) S ist ein Minimalschnitt einer Komponente von G .

Beweis: (1) (a) \Rightarrow (b): Sei S ein Minimalschnitt in G und (V_1, V_2) eine Partition von V mit $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ und $S = G[V_1, V_2] \neq \emptyset$ (eine solche Partition existiert stets, da S insbesondere ein nichtleerer Schnitt in G ist).

Angenommen, $G[V_1]$ sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es wegen $V_1 \neq \emptyset$ eine Partition (V_{11}, V_{12}) von V_1 mit $V_{11} \neq \emptyset \neq V_{12}$ und $G[V_{11}, V_{12}] = \emptyset$.

Folglich sind $S_1 := G[V_{11}, V_2 \cup V_{12}] = G[V_{11}, V_2]$, $S_2 := G[V_{12}, V_2 \cup V_{11}] = G[V_{12}, V_2]$ Schnitte in G mit $S_1, S_2 \subseteq S$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Da $V_{11} \neq \emptyset \neq V_{12}$, $V_2 \neq \emptyset$ und G zusammenhängend ist, gilt $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$ und daher z.B. $S_1 \neq S$.

S wäre demzufolge kein Minimalschnitt in G , was der Voraussetzung widerspricht.

Folglich ist $G[V_1]$ zusammenhängend und entsprechendes gilt analog für $G[V_2]$.

(b) \Rightarrow (c) ist klar.

(c) \Rightarrow (a): $S \neq \emptyset$, da $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ und G zusammenhängend ist. S ist also ein nichtleerer Schnitt in G . Sei $\emptyset \neq S' \subset S$.

Dann gibt es ein $e \in S \setminus S'$ mit $\partial(e) = v_1 v_2$ und $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Seien $v, w \in V$. Falls $\{v, w\} \subseteq V_i$ für ein $i \in \{1, 2\}$, dann gibt es, da $G[V_i]$ zusammenhängend ist, einen Weg in $G[V_i]$ und damit in $G - S'$ von v nach w .

Falls $v \in V_1$ und $w \in V_2$ gilt, dann gibt es, da $G[V_1]$ und $G[V_2]$ zusammenhängend sind, einen Weg W_1 in $G[V_1]$ und damit in $G - S'$ von v nach v_1 und einen Weg W_2 in $G[V_2]$ und damit in $G - S'$ von v_2 nach w . Zusammen mit e erhält man einen Weg $W := W_1 \cup v_1, e, v_2 \cup W_2$ in $G - S'$ von v nach w .

$G - S'$ ist also zusammenhängend und wegen $S' \neq \emptyset$ ist S' kein Schnitt in G . Folglich ist S ein Minimalschnitt in G .

(2) (a) \Rightarrow (b): Sei $S = G[V_1, V_2]$ ein Minimalschnitt in G . Da $S \neq \emptyset$, gibt es in G eine Komponente $G[\bar{V}]$, so dass $\bar{S} = G[\bar{V} \cap V_1, \bar{V} \cap V_2] \subseteq S$ ein nichtleerer Schnitt in $G[\bar{V}]$ ist. Jeder Schnitt $\bar{S}_1 = G[\bar{V}_1, \bar{V}_2]$ in $G[\bar{V}]$ mit $\emptyset \neq \bar{S}_1 \subseteq \bar{S}$ ist wegen $G[\bar{V}_1, \bar{V}_2] = G[\bar{V}_1, \bar{V}_2 \cup (V \setminus \bar{V})]$ ein Schnitt in G mit $\emptyset \neq \bar{S}_1 \subseteq \bar{S} \subseteq S$, also $\bar{S}_1 = S$, da S minimal ist. Es folgt $\bar{S} = S$, d.h. S ist ein Minimalschnitt in $G[\bar{V}]$.

(b) \Rightarrow (a): Sei $\bar{S} = G[\bar{V}_1, \bar{V}_2]$ ein Minimalschnitt in der Komponente $G[\bar{V}]$ von G . Dann ist $S = G[\bar{V}_1, \bar{V}_2 \cup (V \setminus \bar{V})]$ ein Schnitt in G mit $\emptyset \neq \bar{S} = S$. Jeder Schnitt S_1 in G mit $\emptyset \neq S_1 \subseteq S$ ist wegen $S_1 \subseteq S = \bar{S}$ auch ein Schnitt in $G[\bar{V}]$. Da \bar{S} minimal ist, folgt $S_1 = \bar{S} = S$ und somit ist S ein Minimalschnitt in G . \square

4.1.6 Satz

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $S \subseteq E$.

S ist genau dann ein Schnitt in G , wenn S eine endliche (möglicherweise leere) Vereinigung paarweise disjunkter Minimalschnitte in G ist.

Wir vertagen den Beweis dieses Satzes bis zur Nr. 4.1.11.

4.1.7 Definition

Sind M_1, M_2 Mengen, so heißt

$$M_1 + M_2 := (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2) = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$$

die **symmetrische Differenz** von M_1 und M_2 .

Für Mengen M_1, \dots, M_l setzen wir $\sum_{i=1}^1 M_i := M_1$ und $\sum_{i=1}^l M_i := M_l + \sum_{i=1}^{l-1} M_i$ für $l \geq 2$.

4.1.8 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Zeigen Sie:

(1) Sind M_1, M_2 beliebige Mengen, so gilt $|M_1 + M_2| = |M_1| + |M_2| - 2|M_1 \cap M_2|$.

Hier fehlen die Seiten 175 bis 226

5 Flüsse in Netzwerken und die Mengerschen Sätze

5.0 Einleitung

Einen Digraphen $D = (V, E, \partial)$ kann man als ein Modell eines sich an Knoten verzweigenden, orientierten Streckennetzes betrachten. Längs einer Strecke zwischen zwei Knoten kann ein gewisses Gut transportiert werden, und zwar ausschließlich in der Richtung, die der zugehörige Bogen anzeigt, und nur bis zu einem vorgegebenen Umfang, der *Kapazität* des Bogens. Den Digraphen und die Bewertung seiner Bögen durch Kapazitäten nennt man ein *Netzwerk*.

Man sieht nun eine gewisse Knotenmenge Q als Ausgangspunkt (*Quelle*) des Gütertransports an, eine andere, dazu disjunkte Knotenmenge S als Ziel (*Senke*) der Güter. An den Knoten, die weder zu Q noch zu S gehören, soll – wie beim Kirchhoffschen Knotensatz 4.3.4 – nichts verloren gehen. Eine nicht negative Bewertung aller Bögen, die diesen beiden Bedingungen, der Beschränkung durch Kapazitäten und des verlustfreien Transports, genügt, nennt man einen Q, S -*Fluss* des Netzwerks.

Den Nettoabfluss (Abfluss minus Zufluss) aus Q bezeichnet man als *Stärke* des Q, S -Flusses und einen Q, S -Fluss maximaler Stärke als einen Q, S -*Maximumfluss*. Wegen des verlustfreien Transports stimmt die Stärke eines Q, S -Flusses mit jedem Nettoabfluss aus einer Knotenmenge $Q \subseteq X \subseteq V \setminus S$ bzw. mit dem Nettozufluss nach S überein. Die Stärke des Flusses gibt demnach an, wie viele Güter der Fluss von Q nach S transportiert. Für ein gegebenes Netzwerk N mit der Quelle Q und der Senke S stellen sich natürlich die folgenden Fragen:

- Gibt es stets einen Q, S -Maximumfluss in N ?
- Wie hängt die Stärke eines Q, S -Maximumflusses in N von den Kapazitäten ab?
- Wie bestimmt man effizient einen Q, S -Maximumfluss in N ?

Die ersten beiden Fragen werden in Abschnitt 5.1 beantwortet.

Ist $D = (V, E, \partial)$ der dem Netzwerk N unterliegende Digraph, so ist für jedes $X \subseteq V$ mit $Q \subseteq X \subseteq V \setminus S$ die Stärke eines Q, S -Flusses in N nach oben beschränkt durch die Summe der Kapazitäten der Bögen von X nach $V \setminus X$. Diese Bögen nennt man einen Q, S -*Schnitt* $D(X, V \setminus X)$ und die Summe ihrer Kapazitäten die *Kapazität* dieses Schnitts. Ein Q, S -*Minimumschnitt* in N ist demnach ein Q, S -Schnitt minimaler Kapazität $\text{mincap}(N)$. Sie werden sehen, dass es zu jedem Netzwerk mit $\text{mincap}(N) < \infty$ Q, S -Maximumflüsse gibt, und die Stärke eines Q, S -Maximumflusses mit $\text{mincap}(N)$ übereinstimmt (das ist das Max-Flow Min-Cut Theorem von *Lester Randolph Ford Jr.* und *Delbert Ray Fulkerson*).

Die Methoden von 5.1 liefern ein Verfahren, bei ganzzahligen Kapazitäten einen ganzzahligen Maximumfluss zu erzeugen (Ganzheitssatz bzw. Integrality Theorem). Dieses

Verfahren kann man auf den Fall rationaler Kapazitäten erweitern, beim Auftreten irrationaler Kapazitäten kann es allerdings Probleme geben: das Verfahren hält nicht an bzw. die Stärken der erzeugten Flüsse konvergieren gegen einen niedrigeren Wert als $\text{mincap}(N)$. Dieses Problem wird durch eine auf *Jack Edmonds* und *Richard Manning Karp* zurückgehende Implementierung gelöst, die in jedem Verfahrensschritt im aktuellen Residualnetzwerk einen augmentierenden Weg kürzester Länge wählt. Mit dieser Implementierung wird die Ford-Fulkerson-Methode auch bei irrationalen Kapazitäten ein effizientes Verfahren zur Bestimmung von Maximumflüssen, dessen Laufzeit zudem nicht von den Kapazitäten des Netzwerks abhängt.

Der innere Zusammenhang eines zusammenhängenden Graphen oder stark zusammenhängenden Digraphen kann auf zweierlei Weise gemessen werden:

- Wie viele Knoten / Kanten (bzw. Bögen) k muss man mindestens entfernen, damit der Rest(di)graph nicht mehr (stark) zusammenhängend ist?
- Wie viele knoten-/kantendisjunkte (bzw. bogendisjunkte) Wege l gibt es höchstens zwischen je zwei beliebigen verschiedenen Knoten?

Zu diesen globalen, den ganzen Graphen bzw. Digraphen betreffenden Fragen gibt es auch eine lokale Version nach Auswahl zweier fester Knoten q und s .

Die *Mengerschen Sätze* besagen, dass k und l jeweils übereinstimmen.

Mit der Flusstheorie von Ford-Fulkerson im Rücken können diese Sätze ohne große Mühe hergeleitet werden. Im dabei herangezogenen Netzwerk haben alle Bögen die Kapazität 1, die Mengerschen Sätze fühlen sich daher wie Spezialfälle des Resultats von Ford-Fulkerson an. Es ist allerdings auch möglich, das Max-Flow Min-Cut Theorem etwa aus einem der Mengerschen Sätze herzuleiten (was wir hier jedoch nicht tun werden).

Es ist zum Verständnis der Einzelheiten dieses Kapitels unumgänglich, sich mit den Bezeichnungen und Schreibweisen, die sich an der einschlägigen Literatur orientieren, zu Beginn gründlich vertraut zu machen.

Nach dem Studium dieses Kapitels sollten Sie die Fragestellungen der Flusstheorie verstanden haben ebenso wie die Methoden zu ihrer Beantwortung, vor allem die Erhöhung der Stärke eines gegebenen Flusses f durch die Erhöhung der Einzelwerte des Flusses auf den Bögen längs eines f -augmentierenden Weges im Residualnetzwerk um den Betrag der Residualkapazität sowie den Ganzheitssatz. Das Problem der irrationalen Kapazitäten und seine Lösung durch die Wahl augmentierender Wege kürzester Länge, die im Algorithmus Max-Flow Min-Cut zusammengefasst ist, sollte Ihnen bekannt sein.

Ferner sollten Sie vertraut werden mit den verschiedenen Zusammenhangsbegriffen aus Abschnitt 5.3 und den Beziehungen dieser Begriffe untereinander, die vor allem in den Mengerschen Sätzen zusammengefasst sind. Demgegenüber nachrangig sind die Algorithmen zur Bestimmung dieser numerischen Größen.

5.1 Flüsse in Netzwerken

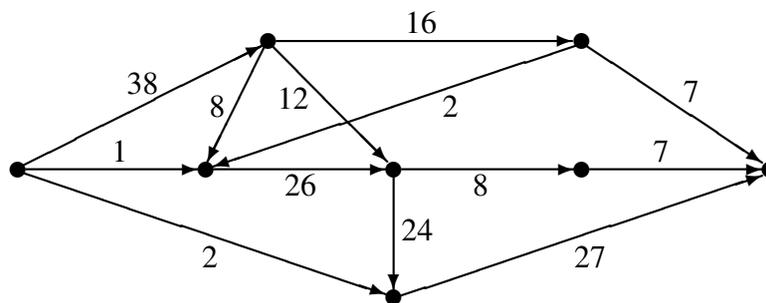
5.1.1 Definition

Ein **Netzwerk** $N = (D, c)$ besteht aus einem Digraphen $D = (V, E, \partial)$ und einer Abbildung $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. c heißt **Kapazitätsfunktion** des Netzwerks N .

Für $e \in E$ nennt man $c(e)$ die **Kapazität** des Bogens e .

5.1.2 Beispiel

Die folgende Grafik stellt ein Netzwerk $N = (D, c)$ dar.



Die Ziffern an den Bögen sind deren Kapazitäten.

5.1.3 Bezeichnungen und Bemerkung

Sei $D = (V, E, \partial)$ ein Digraph.

(1) Für $X, Y \subseteq V$ setzen wir

$$D(X, Y) := \{e \in E \mid \partial(e) = (v, w) \text{ mit } v \in X, w \in Y\} \text{ und}$$

$$D[X, Y] := D(X, Y) \cup D(Y, X), \text{ ferner}$$

$$E_X^+ := D(X, V \setminus X), \quad E_X^- := D(V \setminus X, X).$$

(2) Ist $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, $Z \subseteq E$ und $X \subseteq V$, so setzen wir

$$g(Z) := \sum_{e \in Z} g(e) \text{ (man beachte } g(\emptyset) = \sum_{e \in \emptyset} g(e) := 0) \text{ und}$$

$$g^+(X) := g(E_X^+) = \sum_{e \in E_X^+} g(e), \quad g^-(X) := g(E_X^-) = \sum_{e \in E_X^-} g(e).$$

(3) Treten einelementige Mengen auf, werden wir die Mengenklammern $\{\cdot\}$ meist weglassen. Für $v \in V$ schreiben wir dann z.B. E_v^+ für $E_{\{v\}}^+$, E_v^- für $E_{\{v\}}^-$, $g^+(v)$ für $g^+(\{v\})$, $g^-(v)$ für $g^-(\{v\})$ etc.

L (4) Ist L die Menge der Schlingen in D , so gilt $E_v^+ = E^+(v) \setminus L$ bzw. $E_v^- = E^-(v) \setminus L$, ferner $\bigcup_{v \in X} E_v^+ = D(X, V \setminus X) \cup (D(X, X) \setminus L)$ bzw. $\bigcup_{v \in X} E_v^- = D(V \setminus X, X) \cup (D(X, X) \setminus L)$ für alle $X \subseteq V$, insbesondere $\bigcup_{v \in V} E_v^+ = \bigcup_{v \in V} E_v^- = E \setminus L$.

5.1.4 Aufgabe

L Sei $D = (V, E, \partial)$ ein Digraph, $X \subseteq V$ und $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung.

Zeigen Sie:

- (1) $\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v)$.
- (2) $\sum_{v \in X} (f^+(v) - f^-(v)) = f^+(X) - f^-(X)$.

5.1.5 Definition

Sei $N = (D, c)$ ein Netzwerk mit $D = (V, E, \partial)$, ferner $\emptyset \neq Q, S \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$.

(1) Wir nennen eine Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ einen Q, S -**Fluss** in N , wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

Erhaltung des Flusses: $f^+(v) = f^-(v)$ für alle $v \in V \setminus (Q \cup S)$,

Beschränkung durch Kapazitäten: $0 \leq f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E$.

(2) Für $X \subseteq V$ und einen Q, S -Fluss f in N heißt $f^+(X)$ der **Abfluss** von f aus X und $f^-(X)$ der **Zufluss** von f nach X sowie $f^+(X) - f^-(X)$ der **Nettoabfluss** von f aus X und $f^-(X) - f^+(X)$ der **Nettozufluss** von f nach X .

(3) Für einen Q, S -Fluss f in N heißt $\text{val}(f) := f^+(Q) - f^-(Q)$ die **Stärke** oder der **Wert** (engl. **value**) des Flusses f .

(4) Ein Q, S -Fluss f in N heißt Q, S -**Maximumfluss** in N , wenn für jeden Q, S -Fluss g in N gilt: $\text{val}(f) \geq \text{val}(g)$.

M.a.W. ist ein Q, S -Maximumfluss in N ein Q, S -Fluss in N maximaler Stärke.

Die Stärke eines Q, S -Maximumflusses in N bezeichnen wir mit $\text{maxval}(N, Q, S)$.

5.1.6 Bemerkungen

(1) Die Definition eines Q, S -Flusses in einem Netzwerk $N = (D, c)$ ist auf die Modellierung u.a. von Transportproblemen auf z.B. Verkehrswegen, Leitungen etc. mit evtl. beschränkten Kapazitäten zugeschnitten. Q wird dabei häufig als Ausgangsort eines Transports gesehen und als **Quelle** bezeichnet, S als Zielort gesehen und als **Senke** bezeichnet. Wir setzen hier jedoch *nicht* voraus, dass die Knoten q von Q den Eingangsgrad Null haben ($d^-(q) = 0$) bzw. die Knoten s von S den Ausgangsgrad Null haben ($d^+(s) = 0$), wie dies gelegentlich in der Literatur beobachtet werden kann. Wir lassen damit die Rolle von Q und S im Modell offen.

(2) Die Erhaltung des Flusses (Zufluss = Abfluss) in den Knoten außerhalb von $Q \cup S$ entspricht Kirchhoffs Knotensatz 4.3.4 und bedeutet, dass an den Knoten zwischen Q und S nichts verloren geht.

- L** (3) In jedem Netzwerk $N = (D, c)$ mit $D = (V, E, \partial)$ und für alle $\emptyset \neq Q, S, X \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$ und $Q \subseteq X \subseteq V \setminus S$ gilt

$$\text{val}(f) = f^-(S) - f^+(S) \text{ und } \text{val}(f) = f^+(X) - f^-(X)$$

für jeden Q, S -Fluss f in N .

Der Nettoabfluss von f aus X ändert sich also nicht, solange $Q \subseteq X \subseteq V \setminus S$ gilt, und stimmt mit dem Nettozfluss von f nach S überein.

- (4) In jedem Netzwerk existiert ein Fluss, der **Nullfluss** $f_0 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_0(e) := 0$ für alle $e \in E$. Die Stärke des Nullflusses f_0 ist natürlich $\text{val}(f_0) = 0$.

- (5) Im Allgemeinen kann die Stärke eines Flusses auch negative Werte annehmen.

5.1.7 Aufgabe

- L** Seien $N = (D, c)$ und $N' = (D, c')$ zwei Netzwerke, denen mit $D = (V, E, \partial)$ derselbe Digraph zugrunde liegt, und ferner $\emptyset \neq Q, S \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$.

Zeigen Sie:

Ist f ein Q, S -Fluss in N , f' ein Q, S -Fluss in N' und $\alpha \in \mathbb{R}_+$, so ist $f + \alpha f'$ ein Q, S -Fluss im Netzwerk $N_\alpha := (D, c + \alpha c')$ mit $\text{val}(f + \alpha f') = \text{val}(f) + \alpha \text{val}(f')$.

5.1.8 Definition

Sei $N = (D, c)$ ein Netzwerk mit $D = (V, E, \partial)$, ferner $\emptyset \neq Q, S \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$ und $X \subseteq V$.

- (1) $D(X, V \setminus X) = E_X^+$ heißt **Q, S -Schnitt** in D bzw. N , wenn $Q \subseteq X \subseteq V \setminus S$ gilt.

- (2) Für einen Q, S -Schnitt $D(X, V \setminus X)$ in D bzw. N heißt $\text{cap}(D(X, V \setminus X)) := c^+(X)$ die **Kapazität** (engl. **capacity**) des Schnitts $D(X, V \setminus X)$.

- (3) Ein Q, S -Schnitt $K := D(X, V \setminus X)$ in N heißt **Q, S -Minimumschnitt** in N , wenn für jeden Q, S -Schnitt $K' := D(Y, V \setminus Y)$ in N gilt: $\text{cap}(K) \leq \text{cap}(K')$.

M.a.W. ist ein Q, S -Minimumschnitt in N ein Q, S -Schnitt in N minimaler Kapazität.

Die Kapazität eines Q, S -Minimumschnittes in N bezeichnen wir mit $\text{mincap}(N, Q, S)$.

5.1.9 Bemerkungen

- (1) Für die Kapazitäten der Bögen eines Netzwerks haben wir ∞ (unendlich) zugelassen. Mit ∞ ist $x < \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ gemeint. Dementsprechend ist die Kapazität eines Schnitts in einem Netzwerk unendlich, wenn $c(e) = \infty$ für wenigstens einen Bogen e des Schnitts gilt.

- (2) Ist $N = (D, c)$ ein Netzwerk mit $D = (V, E, \partial)$ und $\emptyset \neq Q, S \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$, so gibt es einen Q, S -Minimumschnitt in N , da es in D nur endlich viele verschiedene

Schnitte gibt. $\text{mincap}(N, Q, S) = \infty$ ist nach (1) möglich.

Ist $\text{mincap}(N, Q, S) < \infty$, so gibt es einen Q, S -Schnitt K in D mit $\text{cap}(K) < \infty$, und jeder q, s -Weg in D mit $q \in Q$, $s \in S$ enthält einen Bogen e mit $c(e) < \infty$.

(3) Man beachte: Die Kapazität eines Q, S -Schnitts $D(X, V \setminus X)$ hängt in keiner Weise von den Bögen aus $D(V \setminus X, X)$ ab.

5.1.10 Lemma

Sei $N = (D, c)$ ein Netzwerk mit $D = (V, E, \partial)$, ferner $\emptyset \neq Q, S \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$ und $X \subseteq V$. Ist f ein Q, S -Fluss in N und $K := D(X, V \setminus X)$ ein Q, S -Schnitt in N , so gilt:

(1) $\text{val}(f) \leq \text{cap}(K)$.

(2) $\text{val}(f) = \text{cap}(K)$ genau dann, wenn $f(e) = c(e)$ für alle $e \in E_X^+$ und $f^-(X) = 0$.

(3) Falls $\text{val}(f) = \text{cap}(K)$ gilt, so ist f ein Q, S -Maximumfluss in N und K ein Q, S -Minimumschnitt in N .

Beweis: Wegen der Beschränkung von f durch die Kapazitäten von N gilt

$$f^+(X) = \sum_{e \in E_X^+} f(e) \leq \sum_{e \in E_X^+} c(e) = c^+(X) \text{ und } f^-(X) = \sum_{e \in E_X^-} f(e) \geq 0.$$

Folglich nach 5.1.6(3)

(1) $\text{val}(f) = f^+(X) - f^-(X) \leq f^+(X) \leq c^+(X) = \text{cap}(K)$ und

(2) $\text{val}(f) = \text{cap}(K) \Leftrightarrow f^+(X) = c^+(X)$ und $f^-(X) = 0$

$$\Leftrightarrow f(e) = c(e) \text{ für alle } e \in E_X^+ \text{ und } f^-(X) = 0.$$

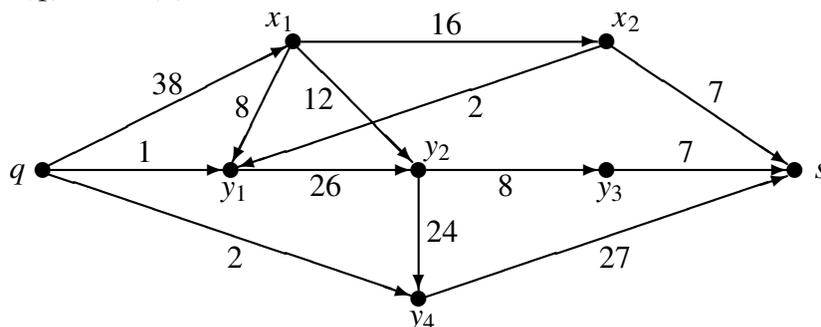
(3) Ist f' ein Q, S -Fluss in N mit $\text{val}(f') \geq \text{val}(f)$ und K' ein Q, S -Schnitt in N mit $\text{cap}(K') \leq \text{cap}(K)$, so gilt nach (1)

$$\text{cap}(K) = \text{val}(f) \leq \text{val}(f') \leq \text{cap}(K') \leq \text{cap}(K) = \text{val}(f),$$

also $\text{val}(f') = \text{val}(f)$ und $\text{cap}(K') = \text{cap}(K)$. □

5.1.11 Beispiel

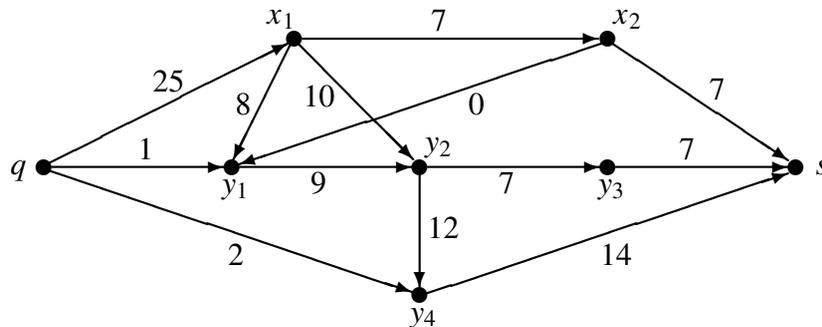
Wir greifen das Netzwerk $N = (D, c)$ aus 5.1.2 wieder auf, benennen die Knoten und setzen $Q := \{q\}$, $S := \{s\}$:



Ist $X = \{q, x_1, x_2\}$, so ist $D(X, Y)$ mit $Y := V \setminus X$ ein q, s -Schnitt in N .

- L** Ist $D(X, Y)$ ein q, s -Minimumschnitt in N ? Was ist die Kapazität eines q, s -Minimumschnittes in N ?

Wir betrachten nun den folgenden q, s -Fluss f in N :



- L** Ist f ein Maximumfluss in N ? Was ist die Stärke eines q, s -Maximumflusses in N ?

5.1.12 Aufgabe

- L** Sei $D = (V, E, \partial)$ ein Digraph, $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ eine Abbildung, $\emptyset \neq Q, S \subseteq V$ mit $Q \cap S = \emptyset$, $q, s \notin V$ mit $q \neq s$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mit $\gamma \geq c^+(Q)$.

Ferner sei $D' := (V', E', \partial')$ definiert durch

$$V' := V \cup \{q, s\}, \quad E' := E \cup \{(q, q') \mid q' \in Q\} \cup \{(s', s) \mid s' \in S\},$$

$$\partial' : E' \rightarrow V'^2, \quad \partial'(e') := \begin{cases} \partial(e') & \text{für } e' \in E, \\ (q, q') & \text{für } e' = (q, q'), q' \in Q, \\ (s', s) & \text{für } e' = (s', s), s' \in S \end{cases}$$

und $c' : E' \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$c'(e') := \begin{cases} c(e') & \text{für } e' \in E, \\ \gamma & \text{für } e' = (q, q'), q' \in Q \text{ oder } e' = (s', s), s' \in S. \end{cases}$$

$N := (D, c)$ und $N' := (D', c')$ seien die entsprechenden Netzwerke.

Zeigen Sie:

(1) Ist f' ein q, s -Fluss in N' , so ist die Einschränkung $f := f'|_E : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ von f' auf N ein Q, S -Fluss in N mit $\text{val}(f) = \text{val}(f')$.

(2) Für eine Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f^+(q') - f^-(q') \geq 0$ und $f^-(s') - f^+(s') \geq 0$ für alle $q' \in Q$, $s' \in S$ sei $f' : E' \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$f'(e') := \begin{cases} f(e') & \text{für } e' \in E, \\ f^+(q') - f^-(q') & \text{für } e' = (q, q'), q' \in Q, \\ f^-(s') - f^+(s') & \text{für } e' = (s', s), s' \in S. \end{cases}$$

Ist f ein Q, S -Fluss in N , so ist f' ein q, s -Fluss in N' mit $\text{val}(f') = \text{val}(f)$.

5.1.13 Problemstellung

- (1) Existiert überhaupt in jedem Netzwerk ein Maximumfluss?
- (2) Welche Beziehung genau besteht in Netzwerken zwischen der Stärke eines Maximumflusses und der Kapazität eines Minimumschnittes?
- (3) Wie kann man in Netzwerken gegebenenfalls einen Maximumfluss effizient bestimmen?

Wir beschränken uns dabei auf den Fall $Q = \{q\}$ und $S = \{s\}$ mit $q \neq s$ und werden sehen, dass diese Einschränkung nicht wesentlich ist.

Eine erste Antwort zu 5.1.13(1) liefert der folgende

5.1.14 Satz

In jedem Netzwerk $N = (D, c)$ mit $D = (V, E, \partial)$ und endlichen Kapazitäten sowie zu allen $q, s \in V$ mit $q \neq s$ gibt es einen q, s -Maximumfluss f in N .

Beweis: Es gilt $\text{mincap}(N, q, s) < \infty$, da alle Kapazitäten endlich sind. Für die Stärke eines q, s -Flusses in N ist daher $\text{mincap}(N, q, s)$ nach 5.1.10(1) eine obere Schranke. Außerdem gibt es mit dem Nullfluss stets einen q, s -Fluss in N . Nach dem Supremumsprinzip (Kurs 01141 Mathematische Grundlagen, 11.2.52) existiert

$$\alpha := \sup\{\text{val}(f) \mid f \text{ } q, s\text{-Fluss in } N\} \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Definition von α gibt es eine Folge (f_n) von q, s -Flüssen in N mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{val}(f_n) = \alpha.$$

Da alle Kapazitäten endlich sind, ist für jedes $e \in E$ jede Teilfolge von $(f_n(e))$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} und enthält daher eine konvergente Teilfolge. Folglich enthält (f_n) eine Teilfolge (f_{n_k}) , so dass für jedes $e \in E$ $(f_{n_k}(e))$ in \mathbb{R} konvergiert. Wir definieren

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+, f(e) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e).$$

f ist ein q, s -Fluss in N :

Sei $e \in E$. Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ $0 \leq f_{n_k}(e) \leq c(e)$ gilt, folgt $0 \leq f(e) \leq c(e)$.

Sei $v \in V \setminus \{q, s\}$. Dann gilt nach Kurs 01141 Mathematische Grundlagen, 12.4.12

$$f^+(v) = \sum_{e \in E_v^+} f(e) = \sum_{e \in E_v^+} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k}(e)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{e \in E_v^+} f_{n_k}(e) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^+(v),$$

und entsprechend $f^-(v) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^-(v)$, also $f^+(v) = f^-(v)$ wegen $f_{n_k}^+(v) = f_{n_k}^-(v)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

f ist sogar ein q, s -Maximumfluss in N :

Nach 01141 Mathematische Grundlagen, 12.4.12 und 12.2.4 ($(\text{val}(f_{n_k}))$ ist als Teilfolge der konvergenten Folge $(\text{val}(f_n))$ konvergent mit Grenzwert α) folgt

Hier fehlen die Seiten 235 bis 278

6 Unabhängige Mengen und Überdeckungen

6.0 Einleitung

Eine Reisegruppe soll in einem Hotel mit Ein- und Zweibettzimmern kostengünstig untergebracht werden. Die Reisenden sind zwar bereit, mit einigen bestimmten, jedoch nicht notwendig mit jedem beliebigen Mitreisenden ein Zimmer zu teilen. Wie kann man die Reisenden so auf die Zimmer verteilen, dass unter Beachtung der Empfindlichkeiten der Reisenden möglichst wenig Zimmer in Anspruch genommen werden müssen?

Diese Frage lässt sich graphentheoretisch modellieren: Die Reisenden bilden die Knotenmenge des Graphen, jede Bereitschaft zweier Reisenden, ein Zweibettzimmer zu teilen, liefert eine Kante des Graphen mit den betreffenden Reisenden als Randknoten.

Wie kann man in diesem Graphen – auf möglichst effiziente Weise – eine Menge paarweise unabhängiger Kanten (ein sog. *Matching*) maximaler Mächtigkeit finden?

Das ist das *Maximum-Matching-Problem*, das im Mittelpunkt dieses Kapitels steht.

Die naheliegende Methode, im Stile eines Greedy-Algorithmus ein Matching M durch Hinzufügen einer weiteren, zu den Kanten von M unabhängigen Kante zu vergrößern, solange dies möglich ist, führt zwar stets zu einem *maximalen Matching*, i. A. allerdings nicht zu einem *Maximum-Matching*, d.h. einem Matching maximaler Mächtigkeit.

In Abschnitt 6.2 werden Sie mit dem *Ungarischen Algorithmus* ein Verfahren kennen lernen, das das Maximum-Matching-Problem für *bipartite* Graphen effizient löst.

Zuordnungsfragen wie das in 6.2.9(1) skizzierte Heiratsproblem (bei dem wir eine konservative Betrachtungsweise zugrunde gelegt haben und das z.B. auch als Jobvermittlungsproblem formuliert werden kann), liefern typische Beispiele für zahlreiche praktische Fragestellungen, die als Maximum-Matching-Problem für bipartite Graphen modelliert werden können.

Das eingangs gestellte Problem bedarf allerdings eines Verfahrens für den Fall allgemeiner Graphen. Ein solches präsentieren wir in Abschnitt 6.3 mit dem „Blüten“-Algorithmus von Edmonds. Wir stellen ihn als Erweiterung des Ungarischen Algorithmus vor.

Die angekündigten Resultate bedürfen einer gründlichen Vorbereitung in Abschnitt 6.1. Zunächst werden die Begriffe *unabhängig* und *bedeckend* für Knoten- und Kantenmengen eingeführt und die Beziehungen zwischen ihnen bzw. zwischen den zugehörigen numerischen Invarianten $\alpha(G)$ bzw. $\alpha'(G)$, der maximalen Anzahl unabhängiger Knoten- bzw. Kanten, und $\beta(G)$ bzw. $\beta'(G)$, der minimalen Anzahl bedeckender Knoten- bzw. Kanten eines Graphen G untersucht. Von besonderem Interesse sind dabei spezielle Typen von Bäumen, die wir *2-teilregulär* nennen, da bei diesen die Knoten einer der beiden Bipartitionsmengen alle den Knotengrad 2 haben. Sie spielen eine wichtige Rolle im Verlauf unserer Algorithmen insbesondere dann, wenn sie „abtrennbar“ sind, und erlau-

ben es im Falle des Ungarischen Algorithmus zudem, nicht nur ein Maximum-Matching, sondern auch eine unabhängige Knotenmenge maximaler Mächtigkeit sowie eine bedeckende Knoten- bzw. Kantenmenge minimaler Mächtigkeit zu bestimmen.

Die sukzessive Vergrößerung des Matchings M im Verlauf der Algorithmen geschieht durch Ersetzen der Kanten aus $M \cap E_W$ durch die Kanten aus $E_W \setminus M$ längs eines M -augmentierenden Weges W , d.i. ein Weg, in dem von je zwei benachbarten Kanten genau eine zu M gehört, die beiden Endknoten aber nicht von M bedeckt sind. Die Mächtigkeit des Matchings erhöht sich dabei um 1. Nach dem Satz von Berge funktioniert dies solange, wie M -augmentierende Wege vorhanden sind; ist das nicht der Fall, hat man ein Maximum-Matching erreicht.

Aus der Analyse des Ungarischen Algorithmus können wir außerdem unschwer ein Min-Max-Theorem von Dénes König ablesen, nachdem in einem bipartiten Graphen G ein Maximum-Matching und eine Minimum-Überdeckung durch Knoten gleiche Mächtigkeit haben, d.h. es gilt $\alpha'(G) = \beta(G)$.

Daraus erhalten wir ohne allzu große Mühe den berühmten Heiratssatz für bipartite Graphen G mit Bipartition (V', V'') :

Genau dann existiert ein V' -bedeckendes Matching in G , wenn die Heiratsbedingung für V' erfüllt ist, d.h. jedes $X \subseteq V'$ besitzt mindestens so viele Nachbarn wie X Elemente hat ($|X| \leq |N_G(X)|$).

Speziell im Fall $|V'| = |V''|$ besitzt G genau dann ein perfektes (d.h. alle Knoten bedeckendes) Matching, wenn die Heiratsbedingung für V' erfüllt ist.

Die erste Variante stammt von Philip Hall (1935), die zweite von Ferdinand Georg Frobenius (1917). Zu diesen beiden Resultaten findet man in der Literatur zahlreiche Beweise. Wir beschließen den Abschnitt 6.2 durch Herleitungen dieser Ergebnisse aus der Flusstheorie von Ford und Fulkerson (vgl. Kapitel 5).

Zum Heiratssatz in der Fassung von Frobenius gewinnen wir aus der Analyse des Algorithmus von Edmonds ein Analogon für allgemeine Graphen, den Satz von Tutte 6.3.14.

Nach gründlichem Durcharbeiten von Abschnitt 6.1 sollten Sie über die zahlreichen Beziehungen unabhängiger bzw. bedeckender (Knoten- oder Kanten-)Mengen sowie der zugehörigen vier numerischen Invarianten orientiert und in der Lage sein, die Struktur des Ungarischen Algorithmus zu verstehen und ihn an einem überschaubaren Beispiel anzuwenden. Neben diesem Algorithmus kennen Sie nach dem Studium von Abschnitt 6.2 den Satz von König sowie den Heiratssatz und auch die Methode, wie diese Sätze aus der Flusstheorie von Ford und Fulkerson hergeleitet werden können.

Der Abschnitt 6.3 ist nicht einfach und kann zunächst zurückgestellt werden. Von seinem Inhalt sollten Sie den Satz von Tutte kennen und eine Vorstellung von der grundlegenden Idee des Algorithmus von Edmonds mit der Kontraktion bzw. Expansion von „Blüten“ mitnehmen.

6.1 Grundlegendes über unabhängige und bedeckende Mengen

In diesem Abschnitt erweitern wir den Begriff „Unabhängigkeit“ von je zwei Knoten bzw. Kanten aus 1.1.4 einerseits und den Begriff „Bedeckung“ von einer Kante durch einen Knoten oder umgekehrt von einem Knoten durch eine Kante aus 1.1.5 andererseits auf beliebige Knoten- bzw. Kantenteilmengen eines Graphen. Wir stellen erste wechselseitige Beziehungen dieser Begriffe zusammen und bereiten die Antwort auf die Frage nach einer effizienten algorithmischen Bestimmung von unabhängigen Knoten- oder Kantenmengen maximaler Mächtigkeit bzw. bedeckenden Knoten- oder Kantenmengen minimaler Mächtigkeit vor.

6.1.1 Definition

Sei $G = (V, E, \delta)$ ein Graph und $M \subseteq E$, $U \subseteq V$.

(1) M heißt **unabhängig(e Kantenmenge)** oder **Matching** in G , falls M keine Schlingen enthält und je zwei Kanten aus M in G nicht benachbart sind.

$$\alpha'(G) := \max\{|M| \mid M \text{ unabhängige Kantenmenge in } G\}$$

heißt **Kantenunabhängigkeitszahl** oder **Matchingzahl** von G .

Ein **Maximum-Matching** M in G ist eine unabhängige Kantenmenge M in G mit $|M| = \alpha'(G)$.

(2) U heißt **unabhängig(e Knotenmenge)** in G , falls je zwei Knoten aus U in G nicht benachbart sind.

$$\alpha(G) := \max\{|U| \mid U \text{ unabhängige Knotenmenge in } G\}$$

heißt **Knotenunabhängigkeitszahl** von G .

6.1.2 Bemerkungen

Sei $G = (V, E, \delta)$ ein Graph und $M \subseteq E$, $U \subseteq V$.

(1) Eine Schlinge ist zu sich selbst benachbart (vgl. Vereinbarung in 1.1.4), kann daher nicht Element einer unabhängigen Kantenmenge sein. Ebenso sind zwei parallele Kanten nicht unabhängig. Folglich:

M ist genau dann eine unabhängige Kantenmenge in G , wenn $d_{G[M]}(v) \leq 1$ für jedes $v \in V$ gilt.

In diesem Fall ist $G[M]$ insbesondere ein schlichter Teilgraph von G .

Man beachte: Ein Maximum-Matching ist stets ein maximales Matching, die Umkehrung hiervon gilt im Allgemeinen nicht.

(2) Ein Knoten, der zu einer Schlinge inzident ist, ist zu sich selbst benachbart, kann also nicht Element einer unabhängigen Knotenmenge sein. Folglich:

U ist genau dann eine unabhängige Knotenmenge in G , wenn $d_{G[U]}(v) = 0$ für jedes $v \in U$ gilt, d.h. $G[U]$ ist ein knotentrivialer Teilgraph von G .

6.1.3 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $W \subseteq V$, $B \subseteq E$.

(1) W heißt **bedeckend(e Knotenmenge)** oder **(Knoten-)Überdeckung** in G , falls jede Kante aus G zu einem Knoten aus W inzident ist.

$$\beta(G) := \min\{|W| \mid W \text{ bedeckende Knotenmenge in } G\}$$

heißt **Knotenbedeckungszahl** von G .

Eine **Minimum-Überdeckung** W in G ist eine Überdeckung W in G mit $|W| = \beta(G)$.

(2) B heißt **bedeckend(e Kantenmenge)** oder **Kantenüberdeckung** in G , falls jeder nicht isolierte Knoten aus G zu einer Kante aus B inzident ist.

$$\beta'(G) := \min\{|B| \mid B \text{ bedeckende Kantenmenge in } G\}$$

heißt **Kantenbedeckungszahl** von G .

6.1.4 Bemerkungen und Bezeichnungen

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $W \subseteq V$, $B \subseteq E$.

(1) Wir bezeichnen mit

$$E_b(W) := \{e \in E \mid \text{es gibt ein } v \in W \text{ mit } v \in \partial(e)\}$$

die **Menge der W -bedeckten Kanten** in G , und mit

$$E_u(W) := E \setminus E_b(W)$$

die **Menge der W -unbedeckten** oder **W -freien Kanten** in G .

W ist genau dann bedeckend, wenn $E_b(W) = E$ gilt.

(2) Wir bezeichnen mit

$$V_b(B) := \{v \in V \mid \text{es gibt ein } e \in B \text{ mit } v \in \partial(e)\}$$

die **Menge der B -bedeckten Knoten** in G , und mit

$$V_u(B) := V \setminus V_b(B)$$

die **Menge der B -unbedeckten** oder **B -freien Knoten** in G .

Mit $V^> := \{v \in V \mid d_G(v) > 0\}$ bezeichnen wir die **Menge der nichtisolierten Knoten**.

B ist genau dann bedeckend, wenn $V_b(B) = V^>$ gilt.

Eine Bedeckung isolierter Knoten durch Kanten ist nicht möglich.

6.1.5 Satz (Gallai)

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $W \subseteq V$.

W ist genau dann bedeckend in G , wenn $V \setminus W$ unabhängig in G ist.

Insbesondere ist

$$\alpha(G) + \beta(G) = |V|.$$

Beweis: Ist W bedeckend in G , so kann es keine Kante e in G geben mit $\partial(e) \subseteq V \setminus W$. Folglich ist $V \setminus W$ unabhängig in G .

Ist $V \setminus W$ unabhängig in G , so kann es keine Kante e in G geben mit $\partial(e) \subseteq V \setminus W$. Folglich ist W bedeckend in G .

Ist W bedeckend in G mit $|W| = \beta(G)$, so ist $V \setminus W$ unabhängig in G mit $|V \setminus W| = \alpha(G)$. Daraus folgt $\alpha(G) + \beta(G) = |V \setminus W| + |W| = |V|$. \square

6.1.6 Lemma

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Dann gilt

$$(1) \quad \alpha'(G) \leq \frac{1}{2}|V^>| \leq \beta'(G).$$

(2) Ist $M \subseteq E$ unabhängig in G und wählt man zu jedem $v \in V_u(M) \cap V^>$ ein $e_v \in E$ mit $v \in \partial(e_v)$, so ist $B := M \cup B'$ mit $B' := \{e_v \mid v \in V_u(M) \cap V^>\}$ bedeckend in G und es gilt

$$|M| + \beta'(G) \leq |M| + |B| \leq |V^>|.$$

(3) Ist $B \subseteq E$ bedeckend in G und sind G_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ die Komponenten von $G[B]$ mit mehr als einem Knoten, so kann man zu jedem $i \in \{1, \dots, r\}$ eine Kante e_i aus G_i wählen, die keine Schlinge ist. $M := \{e_1, \dots, e_r\}$ ist dann unabhängig in G und es gilt

$$|V^>| \leq |M| + |B| \leq \alpha'(G) + |B|.$$

Beweis: (1) Ist $M \subseteq E$ unabhängig in G , so bedeckt M $2|M|$ nichtisolierte Knoten von G . Folglich gilt $2|M| \leq |V^>|$ für alle Matchings M in G und damit $2\alpha'(G) \leq |V^>|$.

Ist $B \subseteq E$ bedeckend in G , so bedeckt B alle Knoten aus $V^>$, aber höchstens $2|B|$ Knoten, d.h. es gilt $|V^>| \leq 2|B|$ für alle bedeckenden Kantenmengen B in G und damit $|V^>| \leq 2\beta'(G)$.

(2) Die Wahl der e_v ist möglich, da es zu jedem $v \in V_u(M) \cap V^>$ eine inzidente Kante gibt. B ist bedeckend in G , da durch die Hinzunahme der Kanten von B' zu M auch die M -unbedeckten Knoten von $V^>$ und damit alle Knoten von $V^>$ B -bedeckt sind. Da M unabhängig in G ist, gilt $|V_b(M)| = 2|M|$, und wegen $M \cap B' = \emptyset$, $|B'| \leq |V_u(M) \cap V^>|$ sowie $V^> = V_b(M) \cup (V_u(M) \cap V^>)$ folgt

$$|M| + \beta'(G) \leq |M| + |B| = 2|M| + |B'| \leq |V_b(M)| + |V_u(M) \cap V^>| = |V^>|.$$

(3) Es seien G_1, \dots, G_s mit $G_i = (V_i, E_i, \partial_i)$ die Komponenten von $G[B]$. Dann ist $s \geq r$ und für $r < i \leq s$ enthalten die G_i nur einen einzigen Knoten, aber möglicherweise Schlingen. Es gilt demnach $k := |V| - |V^>| = |V \setminus V^>| \leq s - r$ und es seien die G_i die trivialen Komponenten von $G[B]$, falls $r < i \leq r + k$.

Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ ist die Wahl eines e_i möglich, da G_i zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten hat. Ferner gilt $V = \bigcup_{i=1}^s V_i$, $B = \bigcup_{i=1}^s E_i$ (disjunkte Vereinigungen, da die G_i Komponenten von $G[B]$ sind) und nach 2.1.7 wegen des Zusammenhangs der Komponenten von $G[B]$ $|E_i| \geq |V_i| - 1$ für alle $i \in \{1, \dots, r + k\}$, für $r + k < i \leq s$ sogar $|E_i| \geq 1 = |V_i|$. Es folgt

$$|V| = \sum_{i=1}^s |V_i| \leq r + k + \sum_{i=1}^s |E_i| = r + k + |B| = r + |V| - |V^>| + |B|,$$

d.h.

$$|V^>| \leq r + |B|.$$

M ist unabhängig in G , da die e_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ paarweise aus verschiedenen Komponenten von $G[B]$ stammen, also nicht benachbart sein können. Es folgt $|M| = r$ und

$$|V^>| \leq r + |B| = |M| + |B| \leq \alpha'(G) + |B|. \quad \square$$

6.1.7 Satz (Gallai)

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Dann gilt

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |V^>|.$$

Beweis: Ist in 6.1.6(2) $|M| = \alpha'(G)$, so erhalten wir $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq |V^>|$.

Ist in 6.1.6(3) $|B| = \beta'(G)$, so erhalten wir $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |V^>|$. \square

6.1.8 Bemerkung

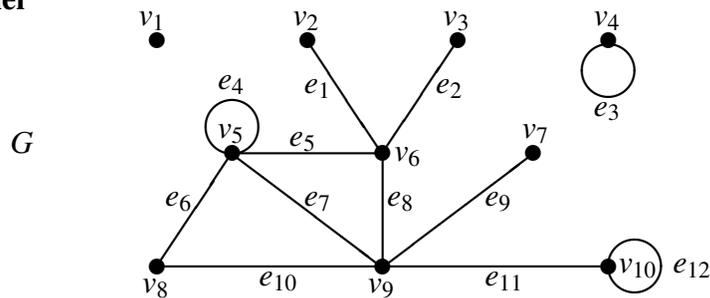
Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Ist $M \subseteq E$ unabhängig in G mit $|M| = \alpha'(G)$, so liefert 6.1.6(2) wegen 6.1.7 ein Verfahren zur Bestimmung einer bedeckenden Kantenmenge B mit $|B| = \beta'(G)$ und $M \subseteq B$.

Ist $B \subseteq E$ bedeckend in G mit $|B| = \beta'(G)$, so liefert 6.1.6(3) wegen 6.1.7 ein Verfahren zur Bestimmung einer unabhängigen Kantenmenge M mit $|M| = \alpha'(G)$ und $M \subseteq B$.

- L** Der Leser überlege sich, dass im Falle eines schlichten Graphen G und $B \subseteq E$ bedeckend in G mit $|B| = \beta'(G)$ alle Komponenten von $G[B]$ radiale Graphen (sog. Sterne) sind.

6.1.9 Beispiel



Wir wollen unabhängige Knoten- bzw. Kantenmengen maximaler Mächtigkeit und bedeckende Knoten- bzw. Kantenmengen minimaler Mächtigkeit in G bestimmen.

Die Knoten v_2, v_3, v_4 und v_7 sind jeweils nur zu einer einzigen Kante inzident, weshalb diese Kanten e_1, e_2, e_3 und e_9 zur einer bedeckenden Kantenmenge B gehören müssen. Durch diese Kanten sind neben v_2, v_3, v_4 und v_7 auch die Knoten v_6 und v_9 bedeckt. Der Knoten v_1 ist isoliert und kann nicht bedeckt werden. Die drei noch nicht bedeckten Knoten v_5, v_8 und v_{10} können wir nicht durch eine einzige Kante bedecken, wir brauchen dazu mindestens zwei: e_6 und e_{11} . Damit ist $B := \{e_1, e_2, e_3, e_6, e_9, e_{11}\}$ eine bedeckende Kantenmenge in G minimaler Mächtigkeit $\beta'(G) = |B| = 6$.

Wir betrachten nun $G[B]$. Die Komponenten dieses Teilgraphen von G sind

$$G_1 = (\{v_2, v_3, v_6\}, \{e_1, e_2\}), \quad G_2 = (\{v_5, v_8\}, \{e_6\}), \quad G_3 = (\{v_7, v_9, v_{10}\}, \{e_9, e_{11}\}), \\ G_4 = (\{v_1\}, \emptyset), \quad G_5 = (\{v_4\}, \{e_3\}).$$

Aus den drei Komponenten mit mehr als einem Knoten wählen wir je eine Kante aus und erhalten nach 6.1.6(3), 6.1.8 eine unabhängige Kantenmenge $M := \{e_1, e_6, e_9\}$ in G mit $\alpha'(G) = |M| = 3$, d.h. M ist ein Maximum-Matching in G .

Zu einer G bedeckenden Knotenmenge müssen alle zu einer Schlinge inzidenten Knoten gehören (vgl. 6.1.2(2)), also v_4, v_5 und v_{10} . Diese Knoten bedecken die Kanten $e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_{11}, e_{12}$. Es sind also noch die Kanten $e_1, e_2, e_8, e_9, e_{10}$ zu bedecken. Dies leisten die Knoten v_6 und v_9 , und mit weniger Knoten sind diese Kanten offenbar auch nicht zu bedecken. Damit ist $W := \{v_4, v_5, v_6, v_9, v_{10}\}$ eine bedeckende Knotenmenge in G mit $\beta(G) = |W| = 5$, d.h. W ist eine Minimum-Überdeckung in G .

Nach 6.1.5 ist $U := V \setminus W = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_8\}$ eine unabhängige Knotenmenge in G mit $\alpha(G) = |U| = 5$.

6.1.10 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

Zeigen Sie:

- (1) $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.
- (2) $\alpha(G) \leq \beta'(G) + |V| - |V^>|$.

6.1.11 Aufgabe

L Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Bestimmen Sie für den vollständigen Graphen K_n die Zahlen $\alpha(K_n)$, $\alpha'(K_n)$, $\beta(K_n)$ und $\beta'(K_n)$.

6.1.12 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph, $\bar{V} \subseteq V$ und $\bar{E} \subseteq E$.

Zeigen Sie:

(1) $\alpha'(G[\bar{V}]) \leq \alpha'(G)$ und $\alpha'(G[\bar{E}]) \leq \alpha'(G)$.

(2) $\alpha(G[\bar{V}]) \leq \alpha(G)$, aber $\alpha(G[\bar{E}]) \geq \alpha(G)$.

(3) Geben Sie Beispiele dafür an, dass in (1) und (2) die Gleichheit nicht gelten muss.

Wir stellen uns zunächst das

6.1.13 Maximum-Matching-Problem

Wie kann man in einem Graphen auf effiziente Weise ein Maximum-Matching finden?

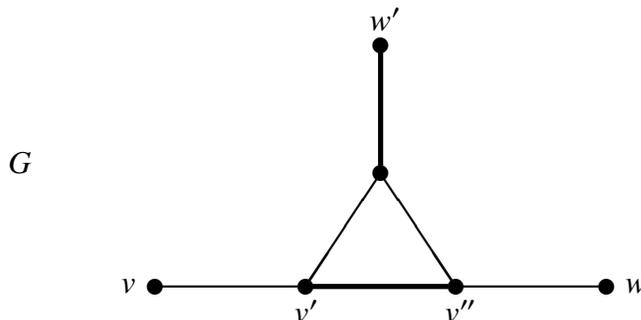
Der Schlüssel hierzu liegt in einem Resultat von *Claude Berge* (1957), das wir nun beweisen wollen.

6.1.14 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $M \subseteq E$ eine unabhängige Kantenmenge in G .

(1) Ein Weg in G heißt **M -alternierender** Weg in G , falls von je zwei benachbarten Kanten dieses Weges genau eine in M liegt.

(2) Ein v, w -Weg in G mit $v \neq w$ heißt **M -augmentierender** Weg in G , falls er ein M -alternierender Weg in G ist und weder v noch w in G M -bedeckt sind.

6.1.15 Beispiel

Die fett gesetzten Kanten bilden eine unabhängige Kantenmenge M in G .

Der v, w' -Weg via v'' ist M -alternierend in G , der kürzere v, w' -Weg der Länge 3 hingegen nicht. Beide Wege sind nicht M -augmentierend in G .

Der direkte v, w -Weg über die Kante $v'v''$ ist ein M -augmentierender Weg in G . Er erlaubt die Konstruktion einer unabhängigen Kantenmenge größerer Mächtigkeit, indem in M die Kante $v'v''$ durch die Kanten vv' und $v''w$ ersetzt wird. Dieser Gesichtspunkt ist wesentlich bei der Suche nach einem Maximum-Matching in Graphen.

6.1.16 Aufgabe

- L** Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $M \subseteq E$ eine unabhängige Kantenmenge in G .
- (1) Ist W ein M -augmentierender Weg in G mit Kantenmenge E_W , so ist die symmetrische Differenz $M + E_W$ unabhängig in G mit $|M + E_W| = |M| + 1$.
 - (2) Ist \bar{M} eine weitere unabhängige Kantenmenge in G , so ist eine Komponente von $G[M + \bar{M}]$ entweder ein Kreis gerader Länge oder ein Weg, wobei von je zwei benachbarten Kanten in $G[M + \bar{M}]$ eine in $M \setminus \bar{M}$ liegt und die andere in $\bar{M} \setminus M$.

6.1.17 Satz (Berge)

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $M \subseteq E$ eine unabhängige Kantenmenge in G .

M ist genau dann ein Maximum-Matching in G , wenn G keinen M -augmentierenden Weg enthält.

Beweis: Ist M ein Maximum-Matching in G , so kann G nach 6.1.16(1) keinen M -augmentierenden Weg enthalten.

Ist M kein Maximum-Matching in G , so sei \bar{M} ein Maximum-Matching in G . Nach 6.1.16(2) ist eine Komponente von $G[M + \bar{M}]$ entweder ein Kreis gerader Länge oder ein Weg, wobei von je zwei benachbarten Kanten eine in $M \setminus \bar{M}$ liegt und die andere in $\bar{M} \setminus M$. Nicht alle Komponenten von $G[M + \bar{M}]$ können Kreise oder Wege gerader Länge sein, da sonst

$$|M| - |M \cap \bar{M}| = |M \setminus \bar{M}| = |\bar{M} \setminus M| = |\bar{M}| - |M \cap \bar{M}|,$$

d.h. $|M| = |\bar{M}|$, obwohl M kein Maximum-Matching in G ist. Wegen $|\bar{M}| > |M|$ gibt es demnach in G einen M -alternierenden Weg ungerader Länge, der mit Kanten aus $\bar{M} \setminus M$ beginnt und endet, dessen Anfangs- und Endknoten somit nicht M -bedeckt sind. Dies ist ein M -augmentierender Weg in G . \square

Das Maximum-Matching-Problem kann nun prinzipiell dadurch gelöst werden, dass man, ausgehend von einem beliebigen Matching M (z.B. $M = \emptyset$), dieses durch Aufspüren eines M -augmentierenden Weges wie in 6.1.16(1) vergrößert und mit dieser Pro-

Hier fehlen die Seiten 288 bis 334

7 Färbung von Graphen

7.0 Einleitung

Die Frage nach der Färbung von Landkarten mit möglichst wenig Farben führte zu dem vielleicht berühmtesten Satz der Graphentheorie, dem

Vier-Farben-Satz: *Jeder planare Graph besitzt eine 4-Knotenfärbung.*

Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ versteht man hier unter einer k -Knotenfärbung eines Graphen G eine Abbildung $f : V_G \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $f(v) \neq f(w)$ für je zwei benachbarte Knoten $v, w \in V_G$. Man nennt G *planar*, wenn G sich derart in die Ebene zeichnen lässt, dass sich keine zwei die Kanten darstellenden Kurven außerhalb ihrer Randpunkte schneiden. Leider ist in diesem Kurs für die Untersuchung planarer Graphen kein Raum, der Beweis des Vier-Farben-Satzes ist dafür ohnehin zu komplex und erfordert trotz zwischenzeitlicher Vereinfachungen auch heute noch den Einsatz eines Computers (weshalb er lange umstritten war).

Wir werden uns in diesem Kapitel auf die folgenden drei Fragestellungen konzentrieren:

- (1) *Wie viele Farben braucht man mindestens, um die Knoten eines Graphen so zu färben, dass je zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben haben?*
- (2) *Wie viele Knotenfärbungen eines Graphen mit Farben aus einer vorgegebenen Farbpalette gibt es?*
- (3) *Wie viele Farben braucht man mindestens, um die Kanten eines Graphen so zu färben, dass je zwei benachbarte Kanten verschiedene Farben haben?*

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die eine k -Knotenfärbung existiert, heißt *chromatische Zahl*. Im ersten Abschnitt geht es hauptsächlich um die Abschätzung dieser Zahl, da ein effizienter Algorithmus zu ihrer Bestimmung nicht verfügbar ist. Die Entscheidung, ob ein Graph k -färbbar ist, ist für $k \geq 3$ wieder eines dieser \mathcal{NP} -vollständigen Probleme. Die wichtigsten Resultate über eine obere Schranke für die chromatische Zahl sind hier die Abschätzung durch die *Färbungszahl* von Szekeres und Wilf bzw. der Satz von Brooks. Grundsätzlich wäre es zwar möglich, über den *Greedy-Färbungsalgorithmus* eine optimale Knotenfärbung zu ermitteln, das Problem liegt aber darin, dass man eine dazu geeignete Knotennummerierung des Graphen nicht kennt. Durch eine gezielte Wahl der Knotennummerierung ist es immerhin möglich, eine Knotenfärbung zu konstruieren, die nicht mehr Farben benötigt als die Färbungszahl angibt (*Verbesserter Greedy-Färbungsalgorithmus*).

Unsere unteren Schranken (z.B. die *Cliquen-Zahl*) für die chromatische Zahl können leider beliebig schlecht sein, wie das Beispiel der *Mycielski-Konstruktion* zeigt.

In Abschnitt 2 diskutieren wir die Eigenschaften und Bestimmungsmöglichkeiten der Anzahlfunktion für die Knotenfärbungen in Abhängigkeit von der Zahl der vorgegebenen

nen Farben. Dabei handelt es sich um ein Polynom, weshalb es *chromatisches Polynom* genannt wird. Ist das chromatische Polynom bekannt, so lässt sich aus ihm die chromatische Zahl schnell bestimmen: es ist die kleinste Nicht-Nullstelle in \mathbb{N} . Das Problem der Bestimmung des chromatischen Polynoms ist also – wenig überraschend – schwer. Mit der *Rekursionsformel* $P_G = P_{G-e} - P_{G/e}$, wobei e eine beliebige Kante von G ist, kann man die Berechnung des chromatischen Polynoms von G auf die beiden „kleineren“ Graphen P_{G-e} und $P_{G/e}$ verlagern und mit dieser Prozedur entsprechend fortfahren, jedoch kann dann der Rechenaufwand mit der Größe des Graphen exponentiell wachsen. Immerhin gibt es einige wichtige Graphenklassen, deren chromatische Polynome sich dank dieser Formel bestimmen lassen, z.B. vollständige Graphen, Bäume, Kreise.

Mit dem *Satz von Whitney* ist es für schlichte Graphen möglich, aus der Kenntnis des chromatischen Polynoms des Graphen G einige strukturelle Informationen über G zu bekommen, jedoch zeigt bereits der Fall von Bäumen mit mehr als drei Knoten, dass Graphen durch ihr chromatisches Polynom keineswegs eindeutig bestimmt sind.

Das analoge Kantenfärbungsproblem, das auch als Zerlegungsproblem für E_G in paarweise disjunkte Matchings gedacht werden kann, untersuchen wir im letzten Abschnitt. Obwohl durch Übergang zum Kantengraphen auf das Knotenfärbungsproblem zurückführbar, ist es doch von eigenständigem Interesse. Es erlaubt z.B. präzisere Abschätzungen des *chromatischen Index*, d.i. die Minimalzahl von Farben, die eine Kantenfärbung zulässt: Nach dem *Satz von Vizing* kommt dafür nur $\Delta(G)$ oder $\Delta(G) + 1$ in Frage, wenn der Graph schlicht ist. Für bipartite Graphen können wir sogar einen einfachen effizienten Algorithmus zur Konstruktion optimaler Kantenfärbungen angeben, während für allgemeine Graphen im Beweis des *Satzes von Berge und Fournier* ein effizientes konstruktives Verfahren steckt, die Kanten eines Graphen G mit höchstens $\Delta(G) + \mu(G)$ Farben zulässig zu färben, wobei $\mu(G)$ die Maximalzahl paralleler Kanten in G ist.

Nach dem Studium dieses Kapitels sollten Sie die verschiedenen Abschätzungen der chromatischen Zahl und das Verfahren des (Verbesserten) Greedy-Algorithmus kennen und anwenden können. Die Rekursionsformel für das chromatische Polynom sollten Sie begründen und anwenden können, z.B. zur Bestimmung der chromatischen Polynome von vollständigen Graphen, Bäumen oder Kreisen. Aus der Darstellung des chromatischen Polynoms nach dem Satz von Whitney können Sie drei wichtigen Strukturgrößen des Graphen ablesen: die Knoten-, Kanten- und Komponentenzahl. Sie wissen schließlich, wie man eine optimale Kantenfärbung für bipartite Graphen gewinnt, kennen den Zusammenhang mit der Knotenfärbung und die Abschätzungen des chromatischen Index aus dem Satz von Vizing. Bei einem ersten Durcharbeiten dieses Kapitels können Sie die schwierigeren Beweise des Satzes von Brooks, des Satzes von Berge und Fournier und evtl. auch des Satzes von Whitney zunächst zurückstellen.

7.1 Knotenfärbungen

Für die Prüfungsverwaltung der Fakultät für Mathematik und Informatik an der Fern-Universität stellt sich jedes Semester das folgende Problem:

Die Studierenden dieser Fakultät haben in den von ihnen belegten Kursen zum Semesterende Klausuren zu schreiben. Mit Rücksicht auf die Berufstätigen unter ihnen sollen die Klausuren stets an Samstagen stattfinden. Wegen des relativ kurzen Zeitraums zwischen Semesterende und dem Beginn des folgenden Semesters, der beschränkten Ressourcen an Aufsichtspersonal und auch aus Kostengründen sollen die Termine für die Klausuren auf möglichst wenige Samstage dieses Zeitraums gelegt werden. Selbstverständlich muss der Terminplan mit den Belegungsplänen der verschiedenen Studiengänge kompatibel sein. Die Klausurtermine dürfen sich also nicht überschneiden, wenn Kandidaten laut Belegungsplan mehrere Klausuren zu absolvieren haben.

Wie lautet die minimale Anzahl von Klausursamstagen, die die Prüfungsverwaltung mindestens einplanen muss, damit keine Konflikte entstehen?

Man betrachte dazu den schlichten Graphen $G = (V, E)$, wobei V die Menge der zu prüfenden Kurse repräsentiert und E die Menge der (ungeordneten) Paare von Kursen mit unbedingt zu vermeidenden Überschneidungen. Für die Klausursamstage lege man nun eine bestimmte Farbe (oder eine Nummer) fest und versuche, die Knoten des Graphen so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben bekommen. Sind alle Knoten auf diese Weise gefärbt, nennen wir das eine *Knotenfärbung*. Sie stellt eine zulässige Blockung für einen Terminplan dar. Man interessiert sich hier natürlich für optimale Knotenfärbungen, die mit einer kleinstmöglichen Zahl von Farben auskommen. Diese Zahl nennen wir *chromatische Zahl* und sie gibt in dem Problem der Prüfungsverwaltung die minimale Anzahl der erforderlichen Klausursamstage an.

7.1.1 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph ohne Schlingen, $k \in \mathbb{N}$ und F eine Menge mit $|F| = k$.

Eine **Knotenfärbung** f von G mit k **Farben**, kurz: eine **k -Knotenfärbung** von G ist eine Abbildung $f : V \rightarrow F$, die der folgenden **Zulässigkeitsbedingung** genügt:

(ZVF) Für je zwei benachbarte Knoten $v, w \in V$ gilt $f(v) \neq f(w)$.

Die Elemente von F heißen **Farben**, wobei normalerweise $F = \{1, \dots, k\}$ angenommen wird. Die Mengen $f^{-1}(\{c\}) := \{v \in V \mid f(v) = c\}$, $c \in F$ heißen **Farbklassen** von f .

G heißt **k -knotenfärbbar**, falls eine k -Knotenfärbung von G existiert. Die kleinste derartige natürliche Zahl, d.h.

$$\chi(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-knotenfärbbar}\},$$

heißt **chromatische Zahl** von G .

Hier fehlen die Seiten 338 bis 350

7.2 Das chromatische Polynom

Wir wenden uns nun einer anderen Fragestellung zu:

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$.

Wie viele Knotenfärbungen von G mit k Farben gibt es?

7.2.1 Definition und Satz

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$F(G; k) := \{f : V \longrightarrow \{1, \dots, k\} \mid f \text{ Knotenfärbung von } G \text{ mit } k \text{ Farben}\}.$$

Die Anzahlfunktion

$$P_G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad P_G(k) := |F(G; k)|$$

heißt **chromatisches Polynom** von G .

Die Anzahlfunktion P_G wurde 1912 von *George David Birkhoff* eingeführt im Zusammenhang mit dem Vier-Farben-Problem und von *Hassler Whitney* 1932 auf beliebige Graphen erweitert. Birkhoff bemerkte, dass es sich dabei um ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten handelt. Dies ist leicht einzusehen:

Beweis: Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph ohne Schlingen und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq k$.

Ist $F_{k,l}$ die Menge aller k -Knotenfärbungen von G , die genau l Farben benutzen, so gilt

$$P_G(k) = |F(G; k)| = \sum_{l=1}^k |F_{k,l}|$$

Zur Bestimmung von $|F_{k,l}|$ stellen wir fest, dass jede Knotenfärbung f aus $F_{k,l}$ eindeutig bestimmt ist durch ihre l nichtleeren Farbklassen V_1, \dots, V_l und die diesen zugewiesenen paarweise verschiedenen Farben $k_1, \dots, k_l \in \{1, \dots, k\}$. In der Terminologie von 7.1.2(3) ist dabei (V_1, \dots, V_l) eine l -Partition von G mit $V_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$. Umgekehrt liefert jede l -Partition (V'_1, \dots, V'_l) von G mit $V'_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ und jedes l -Tupel (k'_1, \dots, k'_l) mit paarweise verschiedenen $k'_1, \dots, k'_l \in \{1, \dots, k\}$ eine k -Knotenfärbung $f' \in F_{k,l}$ durch $f'(v) := k'_i$ für alle $v \in V'_i$ und $i \in \{1, \dots, l\}$.

Für jede l -Partition (V'_1, \dots, V'_l) von G mit $V'_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ gibt es nun $\frac{k!}{(k-l)!} = k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-l+1)$ Möglichkeiten, l verschiedene Farben k'_1, \dots, k'_l aus $\{1, \dots, k\}$ auszuwählen (k Möglichkeiten für V'_1 , $k-1$ Möglichkeiten für $V'_2, \dots, k-l+1$ Möglichkeiten für V'_l).

Ist p_l die Anzahl der l -Partitionen von G mit nichtleeren Partitions Mengen, so haben wir damit

$$P_G(k) = \sum_{l=1}^k |F_{k,l}| = \sum_{l=1}^k p_l k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-l+1),$$

und das ist ein Polynom in k mit ganzzahligen Koeffizienten. \square

7.2.2 Bemerkungen

(1) Für Graphen G mit Schlingen ist nach 7.1.2(1) P_G das konstante Polynom 0.

Ist G ein Graph ohne Schlingen, so gilt nach 7.1.2(2) $F(G; k) = F(S(G); k)$ und damit $P_G = P_{S(G)}$.

(2) Ist G der leere Graph \emptyset , so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach 7.1.20(4) $F(\emptyset; k) = \{\emptyset_k\}$ und somit P_\emptyset das konstante Polynom 1.

Ist $G \neq \emptyset$, so ist $F(G; 0) = \emptyset$ und $P_G(0) = 0$. Hat dabei G keine Schlingen, so ist nach 7.1.14 $F(G; \Delta(S(G)) + 1) \neq \emptyset$ und somit $P_G(\Delta(S(G)) + 1) > 0$.

L (3) Es gilt $P_G = P_{G'}$, falls G und G' isomorphe Graphen sind.

(4) Die chromatische Zahl eines Graphen G ohne Schlingen lässt sich bei Kenntnis des chromatischen Polynoms ganz einfach exakt bestimmen:

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid P_G(k) > 0\}.$$

L Überprüfen Sie diese Gleichung bitte selbst.

Nach 7.1.5 ist die Bestimmung der chromatischen Zahl ein hartes Problem. Wir können daher nicht erwarten, wegen 7.2.2(4) über den Umweg der Bestimmung des chromatischen Polynoms generell zu einer effizienten Lösung dieses Problems zu kommen.

Dennoch wird sich dieser Weg in vielen Fällen als nützlich erweisen.

7.2.3 Aufgabe

L Sei $k \in \mathbb{N}$, $G = (V, E, \partial)$ ein Graph, $\partial(\bar{e}) = \bar{v}\bar{w}$ mit $\bar{v} \neq \bar{w}$ und $G/\bar{e} = (\bar{V}, \bar{E}, \bar{\partial})$ der Kontraktionsgraph von G modulo der Kante \bar{e} (vgl. 2.3.11).

Wir definieren

$$F_1(G - \bar{e}; k) := \{f \in F(G - \bar{e}; k) \mid f(\bar{v}) = f(\bar{w})\},$$

$$F_2(G - \bar{e}; k) := \{f \in F(G - \bar{e}; k) \mid f(\bar{v}) \neq f(\bar{w})\}.$$

Zeigen Sie:

(1) $|F_1(G - \bar{e}; k)| = |F(G/\bar{e}; k)|.$

(2) $|F_2(G - \bar{e}; k)| = |F(G; k)|.$

(3) $F_1(G - \bar{e}; k) \neq \emptyset \Rightarrow F(G; k + 1) \neq \emptyset.$

(4) $F_2(G - \bar{e}; k) \neq \emptyset \Rightarrow F(G/\bar{e}; k + 1) \neq \emptyset.$

7.2.4 Satz (Rekursionsformel für das chromatische Polynom)

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph und $e \in E$.

Dann gilt:

$$P_G = P_{G-e} - P_{G/e}.$$

Hier fehlen die Seiten 353 bis 360

7.3 Kantenfärbungen

In einer Fußballliga mit $2n$ Mannschaften soll der Spielplan für die neue Saison nach den folgenden Regeln aufgestellt werden:

Jede Mannschaft soll gegen jede der $2n - 1$ übrigen Mannschaften in einem Hin- und einem Rückspiel antreten, und zwar in der ersten Saisonhälfte die Hinspiele, in der zweiten Saisonhälfte in der gleichen Reihenfolge die Rückspiele, so dass die zweite Saisonhälfte durch die Festlegung der ersten bereits wohlbestimmt ist. (Über die Frage, wann welche Mannschaft Heimrecht hat, wollen wir uns hier keine Gedanken machen.) An jedem Spieltag soll jede Mannschaft höchstens ein Spiel austragen, so dass eine Mindestzahl von $2n - 1$ Spieltagen pro Saisonhälfte nötig sind, die nach Möglichkeit nicht überschritten werden soll.

Die Paarungen eines Spieltages bilden also ein Matching im vollständigen Graphen K_{2n} , wenn die Knoten die Mannschaften repräsentieren und die Kanten die möglichen Spielpaarungen einer Saisonhälfte.

Der K_{2n} hat $\binom{2n}{2} = n(2n - 1)$ Kanten und ein Matching in K_{2n} hat höchstens n Kanten. Soll eine Saisonhälfte genau $2n - 1$ Spieltage haben, so ist dies genau dann möglich, wenn die Kanten von K_{2n} in $2n - 1$ paarweise disjunkte Matchings zerlegt werden können. Insbesondere finden dann an jedem Spieltag n Spiele statt, die Paarungen eines Spieltages bilden somit ein perfektes Matching des K_{2n} .

Eine Lösung unseres Spielplanproblems kann wie folgt gefunden werden:

Die $2n$ Mannschaften werden repräsentiert durch die Knoten $\{1, \dots, 2n\}$ des K_{2n} . Eine Spielpaarung notieren wir als Kante $\{i, j\}$ des K_{2n} , wenn Mannschaft i gegen Mannschaft j antreten soll.

Wir betrachten nun den Kreis C in K_{2n} mit $V_C := \{1, \dots, 2n - 1\}$ und

$$E_C := \{\{2n - 1, 1\}\} \cup \{\{i, j\} \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \leq j = i + 1 \leq 2n - 1\},$$

und definieren $W_{i,j}$ als den kürzesten Weg in C mit den Endknoten i und j . Es ist dann $d_C(i, j) = \ell(W_{i,j})$ der Abstand von i und j in C .

Für den k -ten Spieltag mit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2n - 1$ legen wir jetzt die n Partien

$$M_k := \{\{k, 2n\}\} \cup \{\{i, j\} \mid i, j \in V_C, i \neq j \text{ und } d_C(i, k) = d_C(j, k)\}$$

fest und überlassen den Rest dem Leser als

7.3.1 Aufgabe

- L** Zeigen Sie, dass alle $2n - 1$ konstruierten Kantenmengen M_k paarweise disjunkte perfekte Matchings in K_{2n} sind.

Für jeden regelgerechten Spielplan weisen wir den Spielpaarungen des k -ten Spieltags

und damit den entsprechenden Kanten des zugehörigen perfekten Matchings in K_{2n} die Farbe $k \in \{1, \dots, 2n-1\}$ zu. In diesem Fall sind die $2n-1$ Spieltage einer Saisonhälfte paarweise verschieden gefärbt bzw. die Kanten des K_{2n} derart vollständig gefärbt, dass je zwei benachbarte Kanten verschiedene Farben erhalten haben, d.h. es liegt eine $(2n-1)$ -Kantenfärbung des K_{2n} vor im Sinne der folgenden

7.3.2 Definition

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph ohne Schlingen, $k \in \mathbb{N}$ und F eine Menge mit $|F| = k$.

Eine **Kantenfärbung f von G mit k Farben**, kurz: eine **k -Kantenfärbung von G** ist eine Abbildung $f : E \rightarrow F$, die der folgenden **Zulässigkeitsbedingung** genügt:

(ZEF) Für je zwei benachbarte Kanten $e, e' \in E$ gilt $f(e) \neq f(e')$.

Die Elemente von F heißen **Farben**, wobei normalerweise $F = \{1, \dots, k\}$ angenommen wird. Die Mengen $f^{-1}(c)$, $c \in F$ heißen **Kantenfarbklassen** von f .

G heißt **k -kantenfärbbar**, falls eine k -Kantenfärbung von G existiert. Die kleinste derartige natürliche Zahl, d.h.

$$\chi'(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\},$$

heißt **chromatischer Index von G** oder **chromatische Kantenzahl von G** .

G heißt **k -kantenchromatisch**, falls $\chi'(G) = k$ gilt. Ist G k -kantenchromatisch, so nennen wir eine k -Kantenfärbung von G eine **optimale Kantenfärbung** von G .

Es stellen sich in unserem Beispiel der Fußballliga analog zur Knotenfärbung die Fragen nach der Existenz bzw. Konstruktion einer Kantenfärbung zu einer festen Anzahl von Farben und nach der Abschätzung bzw. Bestimmung des chromatischen Index.

Wir wollen im Folgenden einige allgemeine Antworten auf diese Fragen geben.

7.3.3 Bemerkungen

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph.

(1) Besitzt G Schlingen, so kann ZEF nie erfüllt werden, da Schlingen zu sich selbst benachbart sind. G ist in diesem Fall nicht kantenfärbbar.

(2) Parallele Kanten haben im Gegensatz zu 7.1.2(2) einen erheblichen Einfluss auf die Kantenfärbung.

Z.B. gilt $\chi'(K_2) = 1$, jedoch erhöht hier jede zusätzliche, zur einzigen Kante des K_2 parallele Kante den chromatischen Index um $+1$.

(3) Die Kantenfarbklassen können auch leer sein, sind wegen ZEF aber stets paarweise disjunkte, unabhängige Kantenteilmengen (Matchings).

Umgekehrt gibt es zu jeder Zerlegung der Kantenmenge E in k paarweise disjunkte,

unabhängige (möglicherweise leere) Kanteilmengen eine k -Kantenfärbung.

(4) Ist G knotentrivial, d.h. $E = \emptyset$, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede Menge F mit $|F| = k$ die leere Abbildung $\emptyset_k : \emptyset \rightarrow F$ die einzige k -Kantenfärbung von \emptyset .

Im Fall $k = 0$ ist dabei $F = \emptyset$ und $\emptyset_0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$ eine 0-Kantenfärbung von G , d.h. $\chi'(G) = 0$.

Ist $E \neq \emptyset$, so gibt es keine 0-Kantenfärbung von G und es ist $\chi'(G) > 0$.

(5) Analog zu 7.1.2(5) brauchen Kantenfärbungen nicht surjektiv zu sein. Ist $E \neq \emptyset$ und f eine nicht surjektive k -Kantenfärbung von G , so gibt es eine $(k - 1)$ -Kantenfärbung von G .

Optimale Kantenfärbungen sind daher immer surjektiv.

(6) Kanten mit einem gemeinsamen Randknoten müssen wegen ZEF verschieden gefärbt werden. Für jeden nichtleeren Graphen ohne Schlingen G gilt daher $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

7.3.4 Aufgabe

L Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in \{0, 1\}, \\ n - 1, & \text{falls } n > 1 \text{ und } n \text{ gerade,} \\ n, & \text{falls } n > 1 \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit ähnlichen Ideen wie im Fall vollständiger Graphen geben wir nun ein effizientes Verfahren an zur Konstruktion optimaler Kantenfärbungen für bipartite Graphen:

7.3.5 Algorithmus optimale Kantenfärbung für bipartite Graphen

Sei $G = (V, E, \partial)$ ein nichtleerer bipartiter Graph mit Bipartition (V_1, V_2) .

Wir beschreiben informell ein Verfahren zur Bestimmung einer Δ -Kantenfärbung von G mit $\Delta := \Delta(G)$. Sie ist optimal, da der maximale Knotengrad eine untere Schranke für den chromatischen Index ist.

Im Verlauf des Verfahrens wird G zunächst als induzierter Teilgraph in einen Δ -regulären bipartiten Graphen H eingebettet. Für H bestimmen wir eine Δ -Kantenfärbung durch sukzessive Entnahme perfekter Matchings, die die Kantenfarbklassen für H definieren. Die Einschränkung dieser Δ -Kantenfärbung von H auf E liefert schließlich die angestrebte Δ -Kantenfärbung für G .

Den Δ -regulären bipartiten Graphen H erhält man wie folgt:

Ist G bereits regulär, so setzen wir $H := G$.

Ist G hingegen nicht regulär, prüfen wir zunächst, ob $|V_i| < |V_j|$ für $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.

In diesem Fall ergänzen wir V_i durch zusätzliche $|V_j| - |V_i|$ (isolierte) Knoten, so dass

wir $|V_1| = |V_2|$ haben.

Weiter nennen wir einen Knoten v **Defizitknoten** in G , wenn $d_G(v) < \Delta(G)$ gilt.

Wegen

$$\sum_{v \in V_1} d_G(v) = |E| = \sum_{v \in V_2} d_G(v)$$

enthält G im nichtregulären Fall stets Defizitknoten sowohl in V_1 als auch in V_2 .

Wir durchsuchen nun zuerst V_1 und dann V_2 , bis wir Defizitknoten $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gefunden haben, und fügen G eine neue Kante $\bar{e} \notin E$ mit den Randknoten v_1 und v_2 hinzu. Wir erhalten so einen bipartiten Graphen $G + \bar{e}$ mit derselben Bipartition (V_1, V_2) , der G als induzierten Teilgraphen enthält.

Diesen Prozess führen wir solange fort, bis wir keine Defizitknoten mehr finden können und der resultierende bipartite Graph H Δ -regulär ist. G ist dabei induzierter Teilgraph von H .

Nun bestimmen wir eine Δ -Kantenfärbung von H :

Jeder Knoten von H hat den Knotengrad Δ .

Der Fall $\Delta = 0$ ist durch 7.3.3(4) erledigt, so dass wir $\Delta > 0$ annehmen können.

Nach 6.2.10 besitzt H ein perfektes Matching M_1 , welches z.B. durch den Ungarischen Algorithmus 6.2.1 ermittelt werden kann. Durch $H_1 := H - M_1$ wird somit ein $(\Delta - 1)$ -regulärer bipartiter Graph definiert, der wiederum nach 6.2.10 ein perfektes Matching M_2 enthält, sofern $\Delta - 1 > 0$ gilt. Gegebenenfalls gehen wir zu dem $(\Delta - 2)$ -regulären bipartiten Graphen $H_2 := H_1 - M_2$ über.

So fortfahrend ist schließlich $H_\Delta := H - (M_1 \cup \dots \cup M_\Delta)$ knotentrivial.

Die M_1, \dots, M_Δ sind paarweise disjunkte perfekte Matchings in H und werden zu Kantenfarbklassen einer Δ -Kantenfärbung von H , indem für jedes $i \in \{1, \dots, \Delta\}$ jeder Kante von M_i die Farbe i zugewiesen wird. Insbesondere ist $\chi'(H) = \Delta$.

Diese Δ -Kantenfärbung von H wird durch Einschränkung auf die Kanten von G eine Δ -Kantenfärbung von G mit der Kantenfarbklassse $M_i \cap E$ zur Farbe i . \square

7.3.6 Korollar (König)

Ist G ein nichtleerer bipartiter Graph, so gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$. \square

7.3.7 Aufgabe

L Sei $G = (V, E, \partial)$ ein Graph ohne Schlingen.

- (1) Für jeden Teilgraphen G' von G gilt $\chi'(G') \leq \chi'(G)$.
- (2) Ist G' isomorph zu G , so gilt $\chi'(G) = \chi'(G')$.
- (3) Ist $L(G)$ der Kantengraph von G , so gilt $\chi(L(G)) = \chi'(G)$.
- (4) Ist G ein Kreis gerader Länge, so gilt $\chi'(G) = 2$.

Hier fehlen die Seiten 360 bis 398