Peter Otte

Spektraltheorie linearer Operatoren

auf Hilbert-Räumen

Modul 61317

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

3.4 Selbstadjungierte Operatoren

In Anwendungen, wie beispielsweise der Quantenmechanik, hat man es häufig mit unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren zu tun. Wir gehen nun daran, den Spektralsatz auch für diese Operatoren zu beweisen. Wir erinnern eine einfache Tatsache.

Satz 3.4.1. *Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Siehe Korollar 2.5.9. □

Im Prinzip könnte man dieselbe Idee wie für beschränkte symmetrische Operatoren verwenden. Die dortige Iterationsfolge

$$A_{n+1} = 2A_n^2(\mathbb{1} + A_n^2)^{-1}$$

konvergiert auch für selbstadjungierte $A_0 = A$; denn

$$A_{n+1} = 2(\mathbb{1} - (\mathbb{1} + A_n^2)^{-1})$$

zeigt, dass A_1 beschränkt und symmetrisch ist. Das technische Problem ist aber, dass wir jetzt mit Riemann–Stieltjes Integralen auf unendlichen Intervallen arbeiten müssten, was Schwierigkeiten bei der Konvergenz bereitet. Stattdessen gehen wir analog zu den unitären Operatoren vor, für die wir ja schon einen Spektralsatz bewiesen haben, indem wir den Zusammenhang zwischen selbstadjungierten und unitären Operatoren ausnutzen, der durch die Cayley-Transformierte gegeben ist.

Definition 3.4.2. *Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Der Operator*

$$V : \operatorname{ran}(-i\mathbb{1} - A) \to \operatorname{ran}(i\mathbb{1} - A)$$

mit

$$V := (i\mathbb{1} - A)(-i\mathbb{1} - A)^{-1}$$

heißt Cayley-Transformierte.

Die Definition ist sinnvoll, da wir schon wissen, dass $(-i\mathbb{1} - A)^{-1}$ existiert.

Der Name Cayley-Transformierte ist aus der klassischen Funktionen-Theorie entnommen. Die gebrochen lineare Abbildung

$$z \mapsto \frac{i - z}{-i - z}, \ z \in \mathbb{C},$$

heißt *Cayley-Transformation*. Sie bildet die obere (untere) Halbebene auf das innere (äußere) des Einheitskreises ab, sowie die reellen Zahlen auf den Rand des Einheitskreises. Das motiviert den folgenden Satz und warum wir überhaupt diesen Operator eingeführt haben.

Satz 3.4.3. *Seien $A : D(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und V die Cayley-Transformierte von A. Dann gilt:*

1. *V ist isometrisch.*
2. *$\operatorname{ran}(\mathbb{1} - V) \subset \mathcal{H}$ ist dicht.*
3. *$A = i(\mathbb{1} + V)(\mathbb{1} - V)^{-1}$, insbesondere ist A durch V eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir erinnern an

$$V : \operatorname{ran}(-i\mathbb{1} - A) \to \operatorname{ran}(i\mathbb{1} - A).$$

(1) Sei $\psi \in \operatorname{ran}(-i\mathbb{1} - A)\varphi$, $\varphi \in D(A)$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\|V\psi\|^2 &= \|(i\mathbb{1} - A)(-i\mathbb{1} - A)^{-1}\psi\|^2 \\
&= \|(i\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 \\
&= \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \\
&= \|(-i\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 \\
&= \|\psi\|^2.
\end{aligned}$$

Das sagt uns, dass V isometrisch ist.

(2) Es gilt

$$\mathbb{1} - V = \mathbb{1} + (i\mathbb{1} - A)(i\mathbb{1} + A)^{-1} = (i\mathbb{1} + A + i\mathbb{1} - A)(i\mathbb{1} + A)^{-1} = 2i(i\mathbb{1} + A)^{-1}.$$

Also

$$\operatorname{ran}(\mathbb{1} - V) = \operatorname{ran}(i\mathbb{1} + A)^{-1} = D(A).$$

Da $D(A) \subset \mathcal{H}$ dicht liegt, folgt die Behauptung.

(3) Aus (2) wissen wir, dass $\mathbb{1} - V$ injektiv ist. Wir rechnen wieder

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} + V &= \mathbb{1} - (i\mathbb{1} - A)(i\mathbb{1} + A)^{-1} \\
&= (i\mathbb{1} + A - i\mathbb{1} + A)(i\mathbb{1} + A)^{-1} \\
&= 2A(i\mathbb{1} + A)^{-1} \\
&= \frac{1}{i}A(\mathbb{1} - V).
\end{aligned}$$

Auflösen ergibt

$$A = i(\mathbb{1} + V)(\mathbb{1} - V)^{-1},$$

was zu beweisen war. □

Der Satz lässt sich umkehren; d.h. die Bedingungen (1) und (2) sind charakteristisch.

Satz 3.4.4. *$V : D(V) \to \mathcal{H}$ ist genau dann die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators $A : D(A) \to \mathcal{H}$, wenn*

1. *$V : D(V) \to \operatorname{ran}(V)$ ist isometrisch.*
2. *$\operatorname{ran}(\mathbb{1} - V) \subset \mathcal{H}$ ist dicht.*

A ist gegeben durch

$$A = i(\mathbb{1} + V)(\mathbb{1} - V)^{-1}.$$

Beweis. (a) Ist V die Cayley-Transformierte von A, dann sind nach Satz 3.4.3 die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt und es gilt

$$A = i(\mathbb{1} + V)(\mathbb{1} - V)^{-1}.$$

(b) Erfülle nun V die Bedingungen (i) und (ii). Wir zeigen, dass $\mathbb{1} - V$ injektiv ist. Sei dazu $(\mathbb{1} - V)\psi = 0$, also $V\psi = \psi$. Dann ist für alle $\varphi \in D(V)$:

$$(\psi, \varphi - V\varphi) = (\psi, \varphi) - (\psi, V\varphi) = (\psi, \varphi) - (V\psi, V\varphi) = (\psi, \varphi) - (\psi, \varphi) = 0,$$

wobei wir (i) benutzt haben. Also $\psi \perp \operatorname{ran}(\mathbb{1} - V)$. Mit (ii) folgt dann $\psi = 0$.

Wir definieren den Operator

$$A \coloneqq i(\mathbb{1} + V)(\mathbb{1} - V)^{-1}.$$

Es gilt $D(A) = \operatorname{ran}(\mathbb{1} - V)$. Also ist $D(A) \subset \mathcal{H}$ dicht nach (ii).

Wir rechnen nach, dass A symmetrisch ist. Seien dazu $\varphi, \psi \in D(A) = \operatorname{ran}(\mathbb{1} - V)$, also

$$\varphi = (\mathbb{1} - V)\tilde{\varphi}, \;\; \psi = (\mathbb{1} - V)\tilde{\psi}.$$

Dann folgt mit (i)

$$\begin{aligned}
(A\varphi,\psi) &= -i\big((\mathbb{1}+V)(\mathbb{1}-V)^{-1}\varphi,\psi\big)\\
&= -i\big((\mathbb{1}+V)\tilde{\varphi},(\mathbb{1}-V)\tilde{\psi}\big)\\
&= -i\left((\tilde{\varphi},\tilde{\psi})+(V\tilde{\varphi},\tilde{\psi})-(\tilde{\varphi},V\tilde{\psi})-(V\tilde{\varphi},V\tilde{\psi})\right)\\
&= -i\left((V\tilde{\varphi},\tilde{\psi})+(V\tilde{\varphi},\tilde{\psi})-(\tilde{\varphi},V\tilde{\psi})-(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\right)\\
&= -i\big((V-\mathbb{1})\tilde{\varphi},(V+\mathbb{1})\tilde{\psi}\big)\\
&= i\big(\varphi,(\mathbb{1}+V)(\mathbb{1}-V)^{-1}\psi\big)\\
&= (\varphi,A\psi).
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass V auch die Cayley-Transformierte von A ist. Wir rechnen

$$i\mathbb{1}-A = i\mathbb{1}-i(\mathbb{1}+V)(\mathbb{1}-V)^{-1} = (i(\mathbb{1}-V)-i(\mathbb{1}+V))(\mathbb{1}-V)^{-1} = -2iV(\mathbb{1}-V)^{-1}$$

und

$$-i\mathbb{1}-A = -i\mathbb{1}-i(\mathbb{1}+V)(\mathbb{1}-V)^{-1} = -i(\mathbb{1}-V+\mathbb{1}+V)(\mathbb{1}-V)^{-1} = -2i(\mathbb{1}-V)^{-1}.$$

Einsetzen ergibt die Formel

$$i\mathbb{1}-A = V(-i\mathbb{1}-A)$$

und Auflösen die Behauptung. □

Wir haben gesehen, dass V stets isometrisch ist, sodass sich naturgemäß die Frage aufdrängt, wann V unitär ist.

Satz 3.4.5. *$A : D(A) \to \mathcal{H}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn seine Cayley-Transformierte V unitär ist.*

Beweis. Zur Erinnerung

$$V : \operatorname{ran}(-i\mathbb{1}-A) \to \operatorname{ran}(i\mathbb{1}-A).$$

Nach Satz 2.5.8 ist A genau dann selbstadjungiert, wenn $\operatorname{ran}(\pm i\mathbb{1}-A) = \mathcal{H}$ ist, woraus wir folgern, dass $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ surjektiv ist. Wegen der Isometrie ist V auch injektiv und beschränkt und der Homöomorphiesatz liefert uns, dass V^{-1} existiert und ebenfalls beschränkt ist. Insgesamt ist V unitär. □

Im Gegensatz zu den unitären Operatoren ist der Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren aufwendiger.

Satz 3.4.6. *Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei weiter V die zugehörige Cayley-Transformierte mit der Spektralschar E_λ sowie*

$$V = -\int_{-\pi-0}^{\pi} e^{i\lambda}\, dE_\lambda$$

ihre Spektralzerlegung. Dann gilt für alle $\varphi \in D(A)$

$$(\varphi, A\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(\varphi, F_\lambda \varphi)$$

mit $F_\lambda := E_{2\arctan(\lambda)}$. Die Spektralschar F_λ von A hat die folgenden Eigenschaften

(i) Monotonie: $F_\lambda \le F_\mu$ für $\lambda \le \mu$; d.h. $(\varphi, F_\lambda\varphi) \le (\varphi, F_\mu\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.

(ii) Rechtsstetigkeit: $F_{\lambda+0} = F_\lambda$; d.h. $\lim_{\lambda_n\to\lambda, \lambda_n \ge \lambda} \|F_{\lambda_n}\varphi - F_\lambda\varphi\| = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.

(iii) $F_\lambda \to 0$ für $\lambda \to -\infty$ und $F_\lambda \to \mathbb{1}$ für $\lambda \to +\infty$, d.h. $\lim_{\lambda\to-\infty} \|F_\lambda\varphi\| = 0$ und $\lim_{\lambda\to\infty} \|F_\lambda\varphi\| = \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.

Beweis. (a) Als erstes vereinfachen wir die untere Integrationsgrenze, indem wir zeigen, dass E_λ stetig bei $-\pi$ ist. Hätte E_λ bei $-\pi$ einen Sprung, dann wäre $-\pi$ ein Eigenwert von B, wobei $V = e^{iB}$ ist. Der Projektor auf den zugehörigen Eigenraum ist $E_{-\pi} - E_{-\pi-0}$. Für den entsprechenden Eigenvektor φ finden wir

$$V\varphi = -\int_{-\pi-0}^{\pi} e^{i\lambda}\, dE_\lambda\varphi = -e^{-i\pi}\varphi = \varphi,$$

da $\varphi = (E_{-\pi} - E_{-\pi-0})$ ist. Also hätte V den Eigenwert 1. Dem widerspricht aber, dass $\mathbb{1} - V$ injektiv ist; denn $(\mathbb{1} - V)^{-1}$ existiert auf $D(A)$. Das zeigt unsere Behauptung. Wir können also einfacher schreiben

$$V = -\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\, dE_\lambda$$

mit „einfachen" Zerlegungen bei den Riemann–Stieltjes Summen. Entsprechend zeigt man, dass E_λ auch bei π stetig ist.

(b) Wir rechnen $(\varphi, A\varphi)$ auf V um. Wir wissen, dass $\mathbb{1} - V : \mathcal{H} \to D(A)$ bijektiv ist. Also finden wir genau ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\varphi = (\mathbb{1} - V)\psi$. Damit ist

$$A\varphi = i(\mathbb{1} + V)(\mathbb{1} - V)^{-1}\varphi = i(\mathbb{1} + V)\psi$$

und weiter

$$\begin{aligned}(\varphi, A\varphi) &= ((\mathbb{1} - V)\psi, i(\mathbb{1} + V)\psi)\\ &= i(\psi, (\mathbb{1} - V^*)(\mathbb{1} + V)\psi)\\ &= i(\psi, (V - V^*)\psi)\\ &= -2\,\mathrm{Im}(\psi, V\psi).\end{aligned}$$

Hier setzen wir die Spektralzerlegung von V ein

$$(\varphi, A\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\lambda)\, d(\psi, E_\lambda \psi).$$

Wir müssen noch den Integrator $(\psi, E_\lambda\psi)$ auf $(\varphi, E_\lambda\varphi)$ umrechnen. Dazu beachten wir, dass E_λ mit B, $V = -e^{iB}$, und somit auch mit V und V^*. Wir wenden den Funktionalkalkül auf den Operator $(\mathbb{1} - V^*)(\mathbb{1} - V)$ an und erhalten

$$(\varphi, E_\lambda\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{-i\mu})(1 + e^{i\mu})\, d(\psi, E_\mu E_\lambda \psi).$$

Der Integrand vereinfacht sich

$$(1 + e^{-i\mu})(1 + e^{i\mu}) = e^{-\frac{i\mu}{2}}(e^{\frac{i\mu}{2}} + e^{-\frac{i\mu}{2}})(e^{-\frac{i\mu}{2}} + e^{\frac{i\mu}{2}})e^{\frac{i\mu}{2}} = 4\cos^2(\tfrac{\mu}{2})$$

und daher

$$(\varphi, E_\lambda\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos^2(\tfrac{\mu}{2})\, d(\psi, E_\mu E_\lambda \psi).$$

Den Projektor E_λ können wir entfernen, wenn wir folgendes beachten

$$E_\mu E_\lambda = \begin{cases} E_\mu & \text{für } \mu \leq \lambda, \text{ da } E_\mu \leq E_\lambda, \\ E_\lambda & \text{für } \mu \geq \lambda, \text{ da } E_\mu \geq E_\lambda. \end{cases}$$

Also erhalten wir

$$(\varphi, E_\lambda\varphi) = \int_{-\pi}^{\lambda} 4\cos^2(\tfrac{\mu}{2})\, d(\psi, E_\mu \psi),$$

da für $\mu \geq \lambda$ der Integrator konstant ist. Somit

$$d(\varphi, E_\lambda\varphi) = 4\cos^2(\tfrac{\lambda}{2})\, d(\psi, E_\lambda\psi).$$

Zurück zu $(\varphi, A\varphi)$. Zunächst schreiben wir den Integranden anders

$$2\sin(\lambda) = 4\sin(\tfrac{\lambda}{2})\cos(\tfrac{\lambda}{2}) = 4\tan(\tfrac{\lambda}{2})\cos^2(\tfrac{\lambda}{2}).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (\varphi, A\varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\lambda)\, d(\psi, E_\lambda\psi) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 4\tan(\tfrac{\lambda}{2})\cos^2(\tfrac{\lambda}{2})\, d(\psi, E_\lambda\psi) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tan(\tfrac{\lambda}{2})\, d(\varphi, E_\lambda\varphi). \end{aligned}$$

Wir substituieren

$$\mu = \tan(\tfrac{\lambda}{2}), \;\; \lambda = 2\arctan(\mu)$$

und bekommen die Spektralzerlegung

$$(\varphi, A\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, d(\varphi, E_{2\arctan(\mu)}\varphi)$$

und mit der Spektralschar

$$F_\lambda = E_{2\arctan(\lambda)}.$$

(c) Die Eigenschaften von F_λ ergeben sich aus denen von E_λ, da $\arctan :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$

- stetig ist, sodass sich die neuen und alten Sprünge entsprechen.
- monoton wächst.
- $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ und $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ist.

Das beweist die Behauptung. □

Die bisherigen Spektralsätze für beschränkte symmetrische, unitäre sowie selbstadjungierte Operatoren garantieren jeweils die Existenz einer Spektralschar. Man kann sich natürlich auch fragen, inwieweit die jeweiligen Spektralscharen eindeutig sind. Wir werden diese Frage nur skizzenhaft untersuchen.

Satz 3.4.7. *Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Spektralschar E_λ mit den Eigenschaften (i)–(iii) aus Satz 3.4.6 sodass*

$$(\varphi, A\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(\varphi, E_\lambda \varphi).$$

Beweis. (Skizze) Wir betrachten die Resolvente von A

$$R(z) = (z\mathbb{1} - A)^{-1},$$

von der wir wissen, dass sie für $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ stetig von z abhängt. Der Funktionalkalkül, erweitert auf selbstadjungierte Operatoren, liefert die Darstellung

$$\big(\varphi, (z\mathbb{1} - A)^{-1}\varphi\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \lambda} \, d(\varphi, E_\lambda \varphi).$$

Für $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ ist $\lambda \mapsto \frac{1}{z-\lambda}$ stetig auf $\mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass für festes $\varphi \in D(A)$ die Funktion

$$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \lambda \mapsto (\varphi, E_\lambda \varphi)$$

rechtsstetig und von beschränkter Variation ist. Die Stieltjes'sche Umkehrformel erlaubt es dann, aus

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - t} \, dw(t), \ z \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

die Funktion w wieder zu gewinnen

$$w(t) = \lim_{\delta\to+0} \lim_{\varepsilon\to+0} \Big(-\frac{1}{\pi}\Big) \int_{-\infty}^{t+\delta} \operatorname{Im}(f(s+i\varepsilon))\, ds.$$

Insbesondere bedeutet $f(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}^+$, dass $w(t) = 0$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$. Um die Formel herzuleiten, rechnen wir

$$\operatorname{Im}(f(s+i\varepsilon)) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{s+i\varepsilon-u}\, dw(u) = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s-u)^2+\varepsilon^2}\, dw(u),$$

wobei wir $w(u) \in \mathbb{R}$ beachtet haben. Wir wenden den Satz von Fubini an

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{r} \operatorname{Im}(f(s+i\varepsilon))\, ds &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{r} \frac{\varepsilon}{(s-u)^2+\varepsilon^2}\, ds\, dw(u) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \big(\arctan(\tfrac{r-u}{\varepsilon}) + \tfrac{\pi}{2}\big)\, dw(u).\end{aligned}$$

Der Konvergenzsatz von Lebesgue erlaubt es uns, hierin den Grenzübergang $\varepsilon \to +0$ zu machen. Beachten wir noch

$$\arctan(\tfrac{r-u}{\varepsilon}) + \tfrac{\pi}{2} \to \begin{cases} \pi & \text{für } r > u, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } r = u, \\ 0 & \text{für } r < u, \end{cases}$$

dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{r} \operatorname{Im}(f(s+i\varepsilon))\, ds &= -\int_{-\infty}^{r} \pi\, dw(u) - \int_{\{r\}} \frac{\pi}{2}\, dw(u) - \int_{r}^{\infty} 0\, dw(u) \\ &= -\pi w(r-0) - \frac{\pi}{2}\big(w(r) - w(r-0)\big) \\ &= -\frac{\pi}{2}\big(w(r) + w(r-0)\big).\end{aligned}$$

Setzen wir hier $r = t + \delta$ mit $\delta > 0$ und lassen $\delta \to 0$ streben, erhalten wir die Stieltjes'sche Formel.

Insgesamt sehen wir, dass sich $(\varphi, A\varphi)$ in eindeutiger Weise aus der Resolvente $(z\mathbb{1} - A)^{-1}$ zurück gewinnen lässt. Da dies für alle $\varphi \in D(A)$ richtig ist, ergibt sich die Eindeutigkeit der Spektralschar. $\square$

Mit ganz ähnlichen Rechnungen kann man allgemeiner für $\varphi, \psi \in D(A)$ die *Stone'sche Formel*

$$\big(\varphi, (E_b - E_a)\psi\big) = \lim_{\delta\to+0} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b+\delta} \Big(\varphi, \Big[\big((t-i\varepsilon)\mathbb{1} - A\big)^{-1} - \big((t+i\varepsilon)\mathbb{1} - A\big)^{-1}\Big]\psi\Big)\, dt$$

herleiten.

3.5 Kompakte Operatoren

Jetzt können wir das Hauptresultat zur Spektraltheorie kompakter Operatoren auf Hilbert-Räumen beweisen. Es ist ein Analogon zur Diagonalisierung von Matrizen.

Satz 3.5.1 (Spektralsatz)**.** *Sei $A \in K(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ selbstadjungiert. Die Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$ von A seien der Größe nach angeordnet*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots$$

Weiter seien P_j und Q die orthogonalen Projektionen

$$P_j : X \to \ker(\lambda_j \mathbb{1} - A), \;\; Q : X \to \ker(A).$$

Dann gilt

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$$

bezüglich der Operatornorm und

$$\varphi = Q\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} P_j \varphi$$

für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.

Beweis. Nach dem ersten Riesz'schen Satz 1.4.9 haben die Nullräume $\ker(\lambda_j \mathbb{1} - A)$ endliche Dimension und sind somit abgeschlossen. Die Projektoren P_j sind also nach Satz 3.1.6 vernünftig definiert und beschränkt. Wegen $\dim \operatorname{ran} P_j < \infty$ liefert uns Satz 8.1.21, dass P_j kompakt ist. Schließlich wissen wir aus Satz 8.1.22, dass $P_j^* = P_j$ ist. Wir beweisen nun die angegebene Entwicklung für A, indem wir das Restglied

$$A_n := A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$$

abschätzen. Nach dem, was wir uns gerade überlegt haben, ist A_n kompakt und selbstadjungiert. Wir untersuchen die Eigenwerte von A_n. Sei also $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A_n. Dann finden wir für $1 \leq m \leq n$

$$\lambda P_m \varphi = P_m A_n \varphi = P_m (A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j)\varphi = P_m (A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi.$$

Davon berechnen wir die Norm

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 \|P_m\varphi\|^2 &= \|P_m(A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi\|^2 \\
&= \Big(P_m(A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi, P_m(A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi\Big) \\
&= \Big((A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi, P_m(A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi\Big) \\
&= \Big(\varphi, (A - \lambda_m \mathbb{1})\, \underbrace{P_m(A - \lambda_m \mathbb{1})\varphi}_{\in \ker(A - \lambda_m \mathbb{1})}\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da $\lambda \neq 0$ ist, folgern wir $P_m\varphi = 0$. Dann ist

$$\lambda\varphi = A_n\varphi = \Big(A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\Big)\varphi = A\varphi.$$

Also ist λ ein Eigenwert von A; d.h. $\sigma(A_n) \subset \sigma(A)$.

Ist umgekehrt λ_m ein Eigenwert von A mit Eigenvektor φ, also $A\varphi = \lambda_m\varphi$, dann

$$A_n\varphi = \Big(A\varphi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\Big)\varphi = \lambda_m\varphi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \varphi = \begin{cases} 0 & 1 \leq m \leq n \\ \lambda_m\varphi & m \geq n+1 \end{cases},$$

wobei wir Satz 2.6.8 benutzt haben. Also ist $\lambda_m \neq 0$ ein Eigenwert von A_n für $m \geq n+1$. D.h. A_n hat die Eigenwerte

$$|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_{n+2}| \geq \cdots .$$

Nach Satz 2.6.3 können wir dann die Norm von A_n berechnen, $\|A_n\| = |\lambda_{n+1}|$. Damit

$$A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{j_{||}} = \|A_n\| = |\lambda_{n+1}|.$$

Falls es überhaupt nur endlich viele Eigenwerte gibt, ist irgendwann einmal $\lambda_{n+1} = 0$ für hinreichend großes n. Bei unendlich vielen Eigenwerten strebt aber aufgrund unserer Anordnung $\lambda_n \to 0$. Das zeigt

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$$

in der Operatornorm.

Nach Lemma 3.1.5 konvergiert

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j\varphi, \ \varphi \in \mathcal{H}.$$

Da A stetig ist, erhalten wir

$$A(\varphi - \sum_{j=1}^{\infty} P_j\varphi) = A\varphi - \sum_{j=1}^{\infty} AP_j\varphi = A\varphi - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \varphi = 0.$$

Also

$$\varphi - \sum_{j=1}^{\infty} P_j\varphi \in \ker(A).$$

Dann folgt sofort

$$\varphi = \varphi - \sum_{j=1}^{\infty} P_j\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} P_j\varphi = Q\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} P_j\varphi;$$

denn Q ist ein selbstadjungierter orthogonaler Projektor, da $\ker(A)$ abgeschlossen ist, und mit $P := \sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ gilt

$$Q = \mathbb{1} - P,\ QP = P - P^2 = P - P = 0.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Der Spektralsatz lässt sich auch umkehren. Hat man eine Folge (λ_j) reeller Zahlen mit $\lambda_j \to 0$, oder endlich viele, sowie orthogonale Projektoren P_j mit $P_j P_k = 0$ für $j \neq k$ und $\dim \operatorname{ran} P_j < \infty$, dann ist

$$A := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$$

kompakt.

Wir beweisen eine Variante des Spektralsatzes, die vor allem in Anwendungen nützlich ist.

Korollar 3.5.2 (Entwicklungssatz). *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 3.5.1. Dann existieren μ_j, endlich viele oder $\mu_j \to 0$, und ein ONS $()\varphi_j)$ mit*

$$A\varphi = \sum_j \mu_j (\varphi_j, \varphi)\varphi_j$$

für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.

Beweis. Nach Satz 3.5.1 ist

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j.$$

Sei $\psi_{j1}, \dots, \psi_{jk_j}$ ein ONS von $\operatorname{ran} P_j$. Dann ist

$$P_j\varphi = \sum_{j=1}^{k_j} (\psi_{jk}, \varphi)\psi_{jk}.$$

Das setzen wir ein

$$A\varphi = \sum_j \lambda_j P_j \varphi = \sum_j \lambda_j \sum_k (\psi_{jk}, \varphi)\psi_{jk}.$$

Wir definieren

$$\mu_{jk} = \lambda_j,\ k = 1 \dots, k_j.$$

Umindizieren liefert die Behauptung. □

Der Entwicklungssatz lässt sich verwenden, um die Eigenwerte auf eine Weise zu charakterisieren, bei der nur bekannte Größen vorkommen.

Satz 3.5.3 (Courant)**.** *Sei $A \in K(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ selbstadjungiert. Die Eigenwerte seien der Größe nach angeordnet*

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}| \geq \dots > 0$$

und mit Vielfachheit gezählt. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $|\lambda_1| = \|A\|$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{\substack{U \subset \mathcal{H} \\ \dim U = n}} \sup_{\substack{\varphi \perp U \\ \|\varphi\| = 1}} \|A\varphi\|.$$

Beweis. (a) Aus Satz 2.6.3 folgt sofort $|\lambda_1| = r(A) = \|A\|$.

(b) Wir schreiben zur Abkürzung

$$\gamma \coloneqq \inf_{\substack{U \subset \mathcal{H} \\ \dim U = n}} \sup_{\substack{\varphi \perp U \\ \|\varphi\| = 1}} \|A\varphi\|$$

und zeigen zuerst, dass $\lambda_{n+1} \geq \gamma$ ist. Wir benötigen die Eigenvektoren φ_j, $j \in \mathbb{N}$, von A. Wir setzen

$$U_n \coloneqq \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\},\ \dim U_n = n,$$

und finden, dass für alle $\varphi \perp\ U_n$ mit $\|\varphi\| = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|^2 &= \Big\| \sum_j \lambda_j (\varphi_j, \varphi)\varphi_j \Big\|^2 && \text{Entwicklungssatz,} \\
&= \sum_{j>n} |\lambda_j|^2 |(\varphi, \varphi_j)|^2 && (\varphi, \varphi_j) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, n, \\
&\le |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j>n} |(\varphi_j, \varphi)|^2 && |\lambda_{n+1}| \le |\lambda_j| \text{ für } n+1 \le j, \\
&\le |\lambda_{n+1}|^2 && \text{Bessel'sche Ungleichung (2.1).}
\end{aligned}$$

In dieser Abschätzung bilden wir zuerst das Supremum über alle zulässigen φ und danach das Infimum über alle zulässigen Unterräume. Wir erhalten so

$$|\lambda_{n+1}| \ge \sup_{\substack{\varphi \perp U_n \\ \|\varphi\|=1}} \|A\varphi\| \ge \inf_{\substack{U \subset \mathcal{H} \\ \dim U = n}} \sup_{\substack{\varphi \perp U \\ \|\varphi\|=1}} \|A\varphi\| = \gamma.$$

Um die andere Richtung der Ungleichung, $|\lambda_{n+1}| \le \gamma$, zu zeigen, betrachten wir beliebige Unterräume $U \subset \mathcal{H}$ mit $\dim U = n$. Zu jedem dieser Unterräume gibt es ein $\varphi_U \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ mit $\varphi_U \perp U$, $\|\varphi_U\| = 1$, was man sich mittels der besten Approximierenden überlegen kann, da wegen der unterschiedlichen Dimensionen sicher $U \ne \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|A\varphi_U\|^2 &= \Big\| \sum_j \lambda_j (\varphi_j, \varphi_U) \Big\|^2 && \text{Enwicklungssatz,} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j|^2 |(\varphi_j, \varphi_U)|^2 && \varphi_U \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}, \\
&\ge |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j=1}^{n+1} |(\varphi_j, \varphi_U)|^2 && |\lambda_j| \ge |\lambda_{n+1}| \text{ für } j \le n+1, \\
&= |\lambda_{n+1}|^2 \|\varphi_U\|^2 && \varphi_U \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}, \\
&= |\lambda_{n+1}|^2 && \|\varphi_U\| = 1.
\end{aligned}$$

In dieser Abschätzung bilden wir das Supremum über alle erlaubten φ und erhalten

$$|\lambda_{n+1}| \le \|A\varphi_U\| \le \sup_{\substack{\varphi \perp U \\ \|\varphi\|=1}} \|A\varphi\|.$$

Da U beliebig ist, können wir hier das Infimum bilden und erhalten die Behauptung. $\square$

Das Courant'sche Min-Max-Prinzip gibt es in einer gewissermaßen dualen Formulierung, die in der Praxis häufig einfacher anzuwenden ist, um Schranken für Eigenwerte herzuleiten.

Aufgabe 3.5.4 (Courant)**.** Sei $A \in K(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ selbstadjungiert. Die Eigenwerte seien der Größe nach angeordnet

$$|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}| \geq \cdots > 0$$

und mit Vielfachheit gezählt. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\lambda_n| = \sup_{\substack{U \subset \mathcal{H} \\ \dim U = n}} \inf_{\substack{\varphi \in U \\ \|\varphi\| = 1}} \|A\varphi\|.$$

Insbesondere für den kleinsten Eigenwert ist diese Form des Min-Max-Prinzipes etwas direkter.

Aufgabe 3.5.5. Sei $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, die endliche Hilbert-Matrix.

1. Zeigen Sie $0 \notin \sigma(H_n)$.

2. Geben Sie eine obere Schranke für den kleinsten Eigenwert an, die in n exponentiell klein wird.

In Courants Min-Max Prinzip kann die Norm $\|A\varphi\|$ auch durch die quadratische Form $|(\varphi, A\varphi)|$ ersetzt werden, was mit Blick auf Satz 2.6.5 nicht verwunderlich ist. Außerdem bleibt das Prinzip auch für unbeschränkte Operatoren richtig, mit gewissen technischen Einschränkungen natürlich, und hat so viele wichtige Anwendungen vor allem in der Quantenmechanik. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen, sondern hier eine mehr theoretische Anwendung besprechen, die aber durchaus verdeutlicht, in welcher Art und Weise das Min-Max-Prinzip greift. Bekanntermaßen erhält man die Eigenwerte der Summe zweier Operatoren nicht einfach als die Summe der Eigenwerte der einzelnen Operatoren, da es sich um ein nichtlineares Problem handelt. Wir können aber zumindest eine Abschätzung herleiten.

Satz 3.5.6. *Seien $A, B \in K(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ selbstadjungiert. Die Eigenwerte $\lambda_n(A)$ von A seien mit Vielfachheit gezählt und der Größe nach angeordnet*

$$|\lambda_1(A)| \geq \cdots \geq |\lambda_n(A)| \geq |\lambda_{n+1}(A)| \geq \cdots > 0.$$

Entsprechendes gelte für $\lambda_n(B)$ und $\lambda_n(A + B)$. Dann gilt die Weyl'sche Ungleichung

$$|\lambda_{m+n-1}(A + B)| \leq |\lambda_m(A)| + |\lambda_n(B)|, \;\; m, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Da wir uns einen Unterraum durch ein geeignetes ONS charakterisiert denken dürfen, werden wir im folgenden Infimum und Supremum auch über ONSe bilden. Sei

U irgendein Unterraum mit $\dim U = m+n$ und dem ONS $u_1, \dots, u_{m+n}$. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
|\lambda_{m+n+1}(A+B)| &= \inf_{\substack{U\subset\mathcal{H}\\ \dim U=m+n}} \sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi\perp U}} \|(A+B)\varphi\| \\
&\leq \inf_{\substack{U\subset\mathcal{H}\\ \dim U=m+n}} \sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi\perp U}} (\|A\varphi\| + \|B\varphi\|) \\
&\leq \inf_{\substack{U\subset\mathcal{H}\\ \dim U=m+n}} \Bigg(\sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi\perp U}} \|A\varphi\| + \sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi\perp U}} \|B\varphi\| \Bigg) \\
&\leq \inf_{u_1,\dots u_{m+n}\in\mathcal{H}} \Bigg(\sup_{\varphi\perp u_1,\dots,u_m} \|A\varphi\| + \sup_{\varphi\perp u_{m+1},\dots,u_{n+m}} \|B\varphi\| \Bigg) \\
&= \inf_{u_1,\dots,u_m\in\mathcal{H}} \sup_{\varphi\perp u_1,\dots,u_m} \|A\varphi\| + \inf_{u_{m+1},\dots,u_{m+n}\in\mathcal{H}} \sup_{\varphi\perp u_{m+1},\dots,u_{m+n}} \|B\varphi\| \\
&= |\lambda_{m+1}(A)| + |\lambda_{n+1}(B)|.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

In der Wey'schen Ungleichung werden zwar die jeweils größten Eigenwerte $\lambda_1(A)$, $\lambda_1(B)$ und $\lambda_1(A+B)$ miteinander verglichen ansonsten aber Eigenwerte mit unterschiedlichem Index. Im allgemeinen lassen sich $\lambda_n(A)$, $\lambda_n(B)$ und $\lambda_n(A+B)$ für $n \geq 2$ auch gar nicht im Stile der Weyl'schen Ungleichung gegeneinander abschätzen.

Aufgabe 3.5.7. Geben Sie symmetrische Operatoren A und B an, sodass

$$|\lambda_2(A+B)| > |\lambda_2(A)| + |\lambda_2(B)|$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie die 2×2-Matrizen

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In summierten Form allerdings ist die Aussage richtig.

Aufgabe 3.5.8. Seien $A, B \in K(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt die *Ky Fan'sche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A+B) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(B)$$