Musterlösung zur Einsendearbeit: Kurs 00694KE3, Verbrauchsteuern

Aufgabe 1

Nehmen Sie an, das repräsentative Individuum einer Volkswirtschaft habe die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \alpha ln(x_1) + \beta ln(x_2)$, wobei x_1 und x_2 die Mengen des Konsumgutes 1 bzw. 2 bezeichnen. Beide Konsumgüter werden auf vollkommenen Märkten zu den Nettopreisen p_1 bzw. p_2 gehandelt. Das Individuum nutze sein gesamtes exogen gegebenes Einkommen I für den Konsum. Der Staat erhebe auf beide Güter eine separate Mehrwertsteuer mit dem Satz $t_i,\ i = 1, 2$.

a) Bestimmen Sie die gewöhnlichen (Marshallschen) Nachfragefunktionen nach den Konsumgütern 1 und 2. *(28 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die kompensierten (Hickschen) Nachfragefunktionen nach den Konsumgütern 1 und 2, sowie die Ausgabenfunktion $E(p_1^b, p_2^b, U)$, wobei $p_i^b,\ i = 1, 2$ die Bruttopreise der Güter bezeichnen. *(28 Punkte)*

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Ausgabenfunktion durch

$$E(p_1^b, p_2^b, U) = \left[{p_1^b}^{\alpha} {p_2^b}^{\beta} e^U\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

gegeben ist. Des Weiteren seien $p_1 = p_2 = 1$, $t_1 = 0,16$, $t_2 = 0,07$, $I = 100$, $\alpha = 0,7$ und $\beta = 0,3$. Die Regierung möchte den Steuersatz auf Gut 1 auf $t_1 = 0,19$ erhöhen.
Hinweis: Runden Sie im Folgenden bei Bedarf auf zwei Nachkommastellen genau.

c) Bestimmen Sie kompensierende Variation der Steuererhöhung. *(22 Punkte)*

d) Bestimmen Sie äquivalente Variation der Steuererhöhung. *(10 Punkte)*

e) Interpretieren Sie die kompensierende und die äquivalenten Variation kurz ökonomisch. *(12 Punkte)*

a) Zur Bestimmung der gewöhnlichen Nachfragefunktionen ist der Nutzen des Individuums unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion zu maximieren. Die entsprechende Lagrange-Funktion lautet

$$L = \alpha ln(x_1) + \beta ln(x_2) + \lambda[p_1^b x_1 + p_2^b x_2 - I]. \tag{1}$$

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Optimum sind

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{x_1} + \lambda p_1^b = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\beta}{x_2} + \lambda p_2^b = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1^b x_1 + p_2^b x_2 - I = 0. \tag{4}$$

Aus den ersten beiden Bedingungen folgt $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1^b}{p_2^b}x_1$. Einsetzen in die dritte gibt

$$\begin{aligned} & p_1^b x_1 + p_2^b \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1^b}{p_2^b} x_1 = I \\ \Leftrightarrow & p_1^b x_1 \left[1 + \frac{\beta}{\alpha}\right] = I \\ \Leftrightarrow & p_1^b x_1 \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = I \\ \Leftrightarrow & x_1^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\frac{I}{p_1^b}. \end{aligned} \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung von $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1^b}{p_2^b}x_1$ folgt

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\frac{I}{p_2^b}. \tag{6}$$

(28 Punkte)

b) Die kompensierten Nachfragefunktionen werden durch Minimierung der Ausgaben für ein gegebenes Nutzenniveau $\bar{U}$ ermittelt. Die entsprechende Lagrange-Funktion lautet

$$L = p_1^b x_1 + p_2^b x_2 + \theta[\alpha ln(x_1) + \beta ln(x_2) - \bar{U}]. \tag{7}$$

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Optimum sind

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1^b + \theta\frac{\alpha}{x_1} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2^b + \theta\frac{\beta}{x_2} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \alpha ln(x_1) + \beta ln(x_2) - \bar{U} = 0. \tag{10}$$

Aus den ersten beiden Bedingungen folgt $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}x_2$. Einsetzen in die dritte gibt

$$\begin{aligned}
& \alpha ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}x_2\right) + \beta ln(x_2) - \bar{U} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\alpha+\beta)ln(x_2) + \alpha ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\right) = \bar{U} \\
\Rightarrow \quad & x_2^{\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\right)^{\alpha} = e^{\bar{U}} \\
\Leftrightarrow \quad & x_2^+ = \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1^b}{p_2^b}\right)^{\alpha} e^{\bar{U}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} . \qquad (11)
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}x_2$ folgt

$$\begin{aligned}
x_1^+ &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1^b}{p_2^b}\right)^{\alpha} e^{\bar{U}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} e^{\bar{U}\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e^{\bar{U}\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\right)^{\beta} e^{\bar{U}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der kompensierten Nachfragefunktionen in die Budgetbedingung erhalten wir die Ausgabenfunktion

$$\begin{aligned}
E(p_1^b, p_2^b, U) &= p_1^b\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p_2^b}{p_1^b}\right)^{\beta} e^{\bar{U}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + p_2^b\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1^b}{p_2^b}\right)^{\alpha} e^{\bar{U}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= p_1^{b\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{b\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e^{U\frac{1}{\alpha+\beta}} + p_1^{b\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{b\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} e^{U\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= \left[p_1^{b\,\alpha} p_2^{b\,\beta} e^{U}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]. \qquad (13)
\end{aligned}$$

(28 Punkte)

c) Unter Berücksichtigung der Angaben gilt

$$E(t_1, t_2, U) = \left[(1+t_1)^{0,7}(1+t_2)^{0,3}e^{U}\right]\left[\left(\frac{0,7}{0,3}\right)^{0,3} + \left(\frac{0,3}{0,7}\right)^{0,7}\right]$$

Vor der Steuererhöhung gelten die folgenden Werte.

$$x_1^0 = 0,7\frac{100}{1,16} = 60,34$$
$$x_2^0 = 0,3\frac{100}{1,07} = 28,04$$
$$U^0 = 0,7ln(60,34) + 0,3ln(28,04) = 3,87$$

Nach der Steuererhöhung erhalten wir

$$x_1^1 = 0,7\frac{100}{1,19} = 58,82$$
$$x_2^1 = 0,3\frac{100}{1,07} = 28,04$$
$$U^1 = 0,7ln(58,82) + 0,3ln(28,04) = 3,85$$

Die kompensierende Variation errechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} CV^{01} &= E(t_1^0, t_2, U^0) - E(t_1^1, t_2, U^0) \\ &= 100 - \left[(1,19)^{0,7}(1,07)^{0,3}e^{3,87}\right]\left[\left(\frac{0,7}{0,3}\right)^{0,3} + \left(\frac{0,3}{0,7}\right)^{0,7}\right] \\ &= 100 - 101,80 = -1,8. \end{aligned} \tag{14}$$

(22 Punkte)

d) Die äquivalente Variation errechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} EV^{01} &= E(t_1^0, t_2, U^1) - E(t_1^0, t_2, U^0) \\ &= \left[(1,16)^{0,7}(1,07)^{0,3}e^{3,85}\right]\left[\left(\frac{0,7}{0,3}\right)^{0,3} + \left(\frac{0,3}{0,7}\right)^{0,7}\right] - 100 \\ &= 98,23 - 100 = -1,77. \end{aligned} \tag{15}$$

(10 Punkte)

e) Die kompensierende Variation gibt den Geldbetrag an, den man dem Individuum zusätzlich zukommen lassen müsste, um es für die Steuererhöhung zu entschädigen. Nach Steuererhöhung und Kompensation weist das Individuum den selben Nutzen auf, wie vor der Steueränderung.
Die äquivalente Variation gibt den Geldbetrag an, den das Individuum zu zahlen bereit ist, um die Steueränderung zu verhindern. Nach Abgabe dieses Betrages erzielt das Individuum den Nutzen, den es bei Steueränderung und unverändertem Einkommen erzielt hätte.

(12 Punkte)