Musterlösung zur Einsendearbeit: Kurs 41880, Effizienzsteigernde Ausgabenpolitik, Wintersemester 2017/2018

a) **Pareto-Entscheidungsregel (P):** Ein Projekt wird durchgeführt, wenn gilt:

$$v_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und} v_j > 0 \text{ für mindestens ein } j \tag{1}$$

In Worten: Es wird durchgeführt, wenn der Projektwert für niemanden negativ ist, aber mindestens für ein Individuum streng positiv. (*2 Punkte*)

Kompensationsregel (K): Ein Projekt wird durchgeführt, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{5} v_i \geq 0 \tag{2}$$

In Worten: Es wird durchgeführt, wenn die Summe aller Bewertungen nicht negativ ist.(*2 Punkte*)

Der Unterschied besteht darin, dass es bei K im Gegensatz zu P Verlierer geben kann ($v_j < 0$), wobei der Gesamtgewinn groß genug ist, um diese Verluste auszugleichen. Offenbleibt allerdings, ob eine tatsächliche Kompensation stattfindet. (*4 Punkte*)
insgesamt 8 Punkte

b) Um ein Projekt mit fester Größe $\bar{z}$ zu bewerten, muss man seinen Wert mit der Nichtdurchführung ($z = 0$) vergleichen.
Für $z = 0$ ist i's Nutzen

$$\tilde{U}^i(x_{i0}, 0) = \tilde{V}^i(0) + x_{i0} = x_{i0} \tag{3}$$

Aus der Budgetrestriktion folgt $y_i = x_{i0} + p_i 0 = x_{i0}$, womit $\tilde{U}^i(x_{i0}, 0) = y_i$ gilt.
Bei $z = \bar{z} > 0$ ist $i's$ Nutzen

$$\tilde{U}^i(x_i, \bar{z}) = \tilde{V}^i(\bar{z}) + x_i \tag{4}$$

Aufgrund der Budgetrestriktion gilt $x_i = y_i - p_i\bar{z}$ und somit

$$\tilde{U}^i(x_i, \bar{z}) = \tilde{V}^i(\tilde{z}) + y_i - p_i\bar{z} \tag{5}$$

Aus der Differenz der Nutzenwerte folgt dann

$$\begin{aligned} \tilde{U}^i(x_i, \bar{z}) - \tilde{U}^i(x_{i0}, 0) = \tilde{V}^i(\bar{z}) - p_i\bar{z} := V^i(\bar{z}) = v_i \\ \Rightarrow v_i = 6\bar{z}(\frac{4i}{3} - \frac{1}{4}\bar{z}) - p_i\bar{z} \end{aligned} \tag{6}$$

(*10 Punkte*)
Aus $p = 35$ ergibt sich der individuelle Finanzierungsbeitrag $p_i = \frac{35}{5} = 7$. Setzt man dies und die Projektgröße $\bar{z} = 5$ in die Bewertungsformel (6) ein ergibt dann

(*2 Punkte*)

$$\begin{aligned} v_1 &= 30(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}) - 7 * 5 = -32.5 \\ v_2 &= 30(\frac{8}{3} - \frac{5}{4}) - 7 * 5 = 7.5 \\ v_3 &= 30(\frac{12}{3} - \frac{5}{4}) - 7 * 5 = 47.5 \\ v_4 &= 30(\frac{16}{3} - \frac{5}{4}) - 7 * 5 = 87.5 \\ v_5 &= 30(\frac{20}{3} - \frac{5}{4}) - 7 * 5 = 127.5 \end{aligned} \tag{7}$$

(*10 Punkte*)

Nach der P-Regel wird dieses Projekt nicht durchgeführt, da Individuum 1 verglichen zur Variante $z = 0$ Nutzeneinbußen hinnehmen müsste. Nach der K-Regel gilt

$$\sum_{i=1}^{5} v_i = -32.5 + 7.5 + 47.5 + 87.5 + 127.5 = 237.5 > 0 \tag{8}$$

wodurch das Projekt durchgeführt würde.
(*4 Punkte*)
insgesamt 26 Punkte

c) Damit das Projekt nach der P-Regel durchgeführt wird, muss $v_i \geq 0$ mit mindestens einem $v_i > 0$ gelten. Aus b) ist bekannt, dass $v_1 < 0$. Daher müsste sein Finanzierungsbeitrag p_1 soweit sinken, dass $v_1 \geq 0$ gilt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v_1 &= 30(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}) - p_1 * 5 = 0 \\ &\Rightarrow 5p_1 = 2.5 \Rightarrow p_1 = 0.5 \end{aligned} \tag{9}$$

Daher darf der Finanzierungsbeitrag pro Einheit für $i = 1$ bei max. 0.5 liegen. Würde man die fehlenden 6.5 Geldeinheiten auf den Beitrag von $i = 5$ addieren, so wäre seine Bewertung immer noch positiv ($v_5 = 30(\frac{20}{3} - \frac{5}{4}) - (7 + 6.5) * 5 = 95$) Daher würde z.B. der Finanzierungsschlüssel ($p_1 = 0.5, p_2 = p_3 = p_4 = 7, p_5 = 13.5$) zu einer Projektdurchführung nach der P-Regel führen.
insgesamt 10 Punkte

d) Auf Basis des Finanzierungsschlüssels sowie der Projektgröße $\bar{z} = 17$ ergeben sich folgende Projektwerte:

$$\begin{aligned} v_1 &= 102(\frac{4}{3} - \frac{17}{4}) - (\frac{7}{3}) * 17 = -\frac{2023}{6} \\ v_2 &= 102(\frac{8}{3} - \frac{17}{4}) - (\frac{14}{3}) * 17 = -\frac{1445}{6} \\ v_3 &= 102(\frac{12}{3} - \frac{17}{4}) - 7 * 17 = -\frac{289}{2} \\ v_4 &= 102(\frac{16}{3} - \frac{17}{4}) - (\frac{28}{3}) * 17 = -\frac{289}{6} \\ v_5 &= 102(\frac{20}{3} - \frac{17}{4}) - (\frac{35}{3}) * 17 = \frac{289}{6} \end{aligned} \tag{10}$$

(*10 Punkte*)
Nach der Kompensationsregel wäre $\sum_{i=1}^{5} v_i = -722.5 < 0$, womit das Projekt nicht durchgeführt würde.
Da Individuum 5 als einziges einen positiven Nutzen aus dem Projekt zieht und damit ein Interesse an einer Durchführung hat, hätte dieser einen Anreiz durch Übertreibung seiner Projektbewertung einen Vorzeichenwechsel auf $\sum_{i=1}^{5} > 0$ herbeizuführen.
(*6 Punkte*)
insgesamt 16 Punkte

e) Die Clark-Groves-Vickrey-Steuer ist eine Steuer, die darauf abzielt, dass Individuen ihre wahren Bewertungen für ein Projekt angeben. Ein Pivotwähler zahlt in diesem Fall eine Steuer in Höhe der Wertangaben aller anderen Individuen, wenn seine Wertangabe den Ausschlag für oder gegen das Zustande kommen gibt. Dieses Verfahren ist streng individuell anreizverträglich.
(*4 Punkte*)
Der Pivotwähler ist hier $i = 5$, da er als einziger einen positiven Nutzen aus dem Projekt hätte.
(*2 Punkte*)

Formale Darstellung Clark-Groves-Vickrey:

Bei Angabe der wahren Bewertungen gilt $\sum_{i=1}^{5} = -722.5$ und $\sum_{i=1}^{4} = -770.66$
Wahre Bewertung:
Gibt $i = 5$ seine wahre Bewertung ab, so gilt

$$\begin{aligned} \delta(v_5, w_{-5}) = 0,\ Z(v_5, w_{-5}) = \delta(v_5, w_{-5})\bar{z} = 0 \\ \sigma(v_5, w_{-5}) = 0 \text{ da } sign(\sum_{i=1}^{4} w_i) * sign(v_5 + \sum_{i=1}^{4}) > 0 \\ \Rightarrow T^5(v_5, w_{-5}) = \sigma(v_5, w_{-5})|\sum_{i=1}^{4} w_i| = 0 \\ \Rightarrow U^5(v_5, w_{-5}) = V^5(0) - 0 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

(*8 Punkte*)
Falsche Bewertung, die zu $\sum_{i=1}^{v_i} > 0$ führt:

$$\begin{aligned} \delta(v_5, w_{-5}) = 1,\ Z(v_5, w_{-5}) = \delta(v_5, w_{-5})\bar{z} = 17 \\ \sigma(v_5, w_{-5}) = 1 \text{ da } sign(\sum_{i=1}^{4} w_i) * sign(v_5 + \sum_{i=1}^{4}) < 0 \\ \Rightarrow T^5(v_5, w_{-5}) = \sigma(v_5, w_{-5})|\sum_{i=1}^{4} w_i| = 770.66 \\ \Rightarrow U^5(v_5, w_{-5}) = V^5(17) - 770.66 = 0 = \frac{289}{6} - 770.66 = -722.5 < 0 \end{aligned} \tag{12}$$

(*8 Punkte*)

Da er seinen Nutzen durch Lügen nur verringern kann, wird Individuum 5 aufgrund dieser Steuer keine falsche Wertangabe tätigen, die zur Durchführung des Projekts führt.
(*2 Punkte*)
insgesamt 24 Punkte

f) Nach dem Clark-Groves-Vickrey-Verfahren ist der Gesamtnutzen für ein beliebiges Individuum i gegeben als

$$\begin{aligned} U^i(z) = V^i(z) + y_i + T^i(z) &= V^i(z) + y_i + \sum W^{-i}(z) \\ &= 6z(\frac{4i}{3} - \frac{1}{4}z) + y_i + \sum W^{-i}(z) \end{aligned} \tag{13}$$

(*4 Punkte*)
Die FOC für jedes Individuum und das individuelle optimale z ergeben sich dann mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^i(z)}{\partial z} := 8i - 3z + \sum \frac{\partial W^{-i}(z)}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow 8 - 3z + 16 - 3z + 24 - 3z + 32 - 3z + 40 - 3z &= 0 \\ \Rightarrow z &= 8 \end{aligned} \tag{14}$$

(*6 Punkte*)
Hier ist ersichtlich, dass aufgrund der Clark-Steuer für jedes Individuum die gleiche FOC gilt.
Ein sozialer Planer würde die Nutzensumme aller Individuen maximieren. Bei Angabe wahrer Präferenzen unterscheidet sich die individuelle Zielfunktion von jener des sozialen Planers nur durch das Einkommen. Da dies exogen ist, hat es auf die Optimierung keinen Einfluss. Somit ergibt sich die gleiche Projektgröße $z^* = 8$ wie im Clarke-Groves-Fall.
Macht ein Individuum falsche Angaben, so würde ein sozialer ein $z \neq 8$. welches gemäß der eben hergeleiteten FOC's nicht nutzenmaximierend wäre. Es ist demnach optimal, seine wahren Präferenzen offenzulegen.
(*6 Punkte*)

insgesamt 16 Punkte