

Grundzüge der Portefeuilletheorie

von

Univ.-Prof. Dr. Michael Bitz

März 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	II
Tabellenverzeichnis	II
Formelverzeichnis	III
1 Einführung	1
1.1 Vorbemerkung	1
1.2 Modellgrundlagen	2
1.2.1 Prämissen des Modells	2
1.2.2 Einfache Anlageentscheidungen nach dem μ - σ -Prinzip	7
2 Portefeuilles aus zwei Wertpapieren	9
2.1 Ein Ausgangsbeispiel	9
2.2 Zur Bedeutung der Korrelation	11
2.3 Zur Bestimmung der Portefeuillekennzahlen	13
2.4 Effiziente und optimale Portefeuilles	21
3 Portefeuilles aus mehr als zwei Wertpapieren	30
3.1 Portefeuillelinien und Portefeuilleflächen	30
3.2 Effiziente Portefeuilles	35
3.3 Effiziente Portefeuilles bei einer zusätzlichen sicheren Anlagealternative	39
3.4 Optimale Portefeuilles	43
Anhang P ₀ : Herleitung von Relation (P3)	45
Anhang P ₁ : Herleitung von Relation (P11)	46
Anhang P ₂ : Herleitung der Portefeuillelinie für $\rho_{AB} = 0$	47
Anhang P ₃ : Herleitung von Relation (P13')	48
Anhang P ₄ : A-B-D-Portefeuilles; Punktweise Bestimmung des effizienten Randes	50
Lösungen zu den Übungsaufgaben	51

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1:	μ - σ -Werte einzelner Anlagemöglichkeiten	7
Abb. 2:	Portefeuillelinie bei $\rho = +1$	16
Abb. 3:	Portefeuillelinie bei $\rho = 0$	18
Abb. 4:	Portefeuillelinie bei $\rho = -1$	21
Abb. 5:	Grundtypen von Portefeuillelinien	22
Abb. 6:	Nicht effiziente und effiziente Portefeuilles	23
Abb. 7:	Portefeuillelinien A, B, D (Fall 1)	25
Abb. 8:	Portefeuillelinien A, B, D (Fall 2)	26
Abb. 9:	Portefeuillelinien für 3 Wertpapiere	30
Abb. 10:	Primäre und sekundäre Portefeuillelinien I	31
Abb. 11:	A-D-B-Portefeuillelinie und sekundäre Portefeuilles	32
Abb. 12:	Primäre und sekundäre Portefeuillelinien II	34
Abb. 13:	Portefeuillefläche	34
Abb. 14:	Portefeuillefläche und effizienter Rand	35
Abb. 15:	Portefeuillelinien A, B, D (Fall 2)	38
Abb. 16:	Portefeuillelinie bei einer Aktie und einer sicheren Anlageform	40
Abb. 17:	Effiziente Portefeuilles bei einer sicheren Anlagealternative	41
Abb. 18:	Optimalportefeuilles bei Risikominimierung	43

Tabellenverzeichnis

Tab. 1:	Wahrscheinlichkeitsverteilungen für zwei Wertpapiere	9
Tab. 2:	Wahrscheinlichkeitsverteilungen für ein Portefeuille aus zwei Wertpapieren	10
Tab. 3:	Nicht effiziente und effiziente Portefeuilles	24
Tab. 4:	Effiziente Portefeuilles bei drei Wertpapieren	27
Tab. 5:	Approximation des effizienten Randes	37

Formelverzeichnis

$$(P1) \quad r = \frac{EV - A}{A}$$

$$(P2) \quad r_i = \frac{Q_i - P_i}{P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(P3) \quad r = \sum_{i=1}^m r_i \cdot x_i$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad \text{und} \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)^1)$$

$$(P4) \quad \mu_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_j \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(P5) \quad \sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (r_{ij} - \mu_i)^2 \cdot p_j} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(P6) \quad \text{cov}_{AB} = \sum_{j=1}^n (r_{Aj} - \mu_A) \cdot (r_{Bj} - \mu_B) \cdot p_j$$

$$(P7) \quad \rho_{AB} = \frac{\text{cov}_{AB}}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$$

$$(P8) \quad \mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B$$

$$(P8') \quad \mu_P = \mu_B + x_A \cdot (\mu_A - \mu_B)$$

$$(P9) \quad \sigma_P = \sqrt{(x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot (x_A \cdot x_B) \cdot \text{cov}_{AB}} \quad \text{oder}$$

$$(P9') \quad \sigma_P = \sqrt{(x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot (x_A \cdot x_B) \cdot (\sigma_A \cdot \sigma_B) \cdot \rho_{AB}}$$

1 Die Herleitung dieser Relation finden Sie im Anhang P₀.

$$(P10) \quad \sigma_P = x_A \cdot \sigma_A + x_B \cdot \sigma_B$$

$$(P10') \quad \sigma_P = \sigma_B + x_A \cdot (\sigma_A - \sigma_B)$$

$$(P11) \quad \sigma_P = \frac{\sigma_A \cdot \mu_B - \sigma_B \cdot \mu_A}{\mu_B - \mu_A} + \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\mu_B - \mu_A} \cdot \mu_P$$

$$(P12) \quad \sigma_P = \sqrt{x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2}$$

$$(P13) \quad \sigma_P = |x_A \cdot \sigma_A - x_B \cdot \sigma_B|$$

$$(P13') \quad \sigma_P = |-\sigma_B + x_A \cdot (\sigma_B + \sigma_A)|$$

$$(P14) \quad \mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B + x_D \cdot \mu_D$$

$$(P15) \quad \sigma_P = \left[(x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + (x_D \cdot \sigma_D)^2 \right. \\ \left. + 2 \cdot (x_A \cdot \sigma_A) \cdot (x_B \cdot \sigma_B) \cdot \rho_{AB} + 2 \cdot (x_A \cdot \sigma_A) \cdot (x_D \cdot \sigma_D) \cdot \rho_{AD} \right. \\ \left. + 2 \cdot (x_B \cdot \sigma_B) \cdot (x_D \cdot \sigma_D) \cdot \rho_{BD} \right]^{0,5}$$

$$(P16) \quad \mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_S \cdot r$$

$$(P17) \quad \sigma_P = x_A \cdot \sigma_A$$

1 Einführung

1.1 Vorbemerkung

Gegenstand der finanzwirtschaftlichen Portefeuilletheorie ist in erster Linie die Frage, wie ein Wertpapierportefeuille in optimaler Weise aus verschiedenen Wertpapieren zusammengesetzt werden soll. Dabei können grundsätzlich die unterschiedlichsten Arten von Wertpapieren betrachtet werden. Wir wollen uns in diesem Abschnitt jedoch auf den klassischen Anwendungsfall der Portefeuilletheorie beschränken, nämlich die Vermögensanlage in Aktien.

Vermögensanlage
in Aktien

Die grundlegenden Vorarbeiten für die moderne Portefeuilletheorie und das darauf basierende Theoriengebäude gehen auf Harry M. MARKOWITZ zurück, der für seine bahnbrechenden Arbeiten 1990 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet wurde. Während MARKOWITZ zunächst den einzelnen Anleger in den Mittelpunkt seiner Überlegungen stellte, wurde das von ihm entwickelte Konzept später mit großem Gewinn zur Analyse des Aktienmarktes insgesamt herangezogen. Einige der bedeutendsten Arbeiten dieser Art gehen auf William F. SHARPE zurück, der dafür im Jahre 1990 ebenfalls den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt.

Nobelpreise 1990

Das Theoriengebäude von MARKOWITZ, SHARPE und etlichen weiteren Autoren ist inzwischen in erheblichem Umfang auch in der Praxis des Wertpapiergeschäfts rezipiert worden. Insbesondere institutionelle Anleger bedienen sich häufig verschiedener Analysemethoden und Anlagestrategien, die auf portefeuilletheoretische Arbeiten zurückzuführen sind.

Wir werden die nachfolgende kurze Darstellung der Grundgedanken der Portefeuilletheorie in drei Blöcke gliedern. In diesem einführenden Abschnitt 1 werden wir die Grundannahmen des MARKOWITZ-Modells vorstellen und insbesondere die spezifische Form des darin verwendeten μ - σ -Prinzips verdeutlichen. Im Abschnitt 2 gehen wir dann der Frage nach, welche Effekte auftreten, wenn zwei Aktien zu einem (einfachen) Portefeuille zusammengefügt werden. Abschließend werden wir die Betrachtung im Abschnitt 3 auf den Fall ausdehnen, dass mehr als zwei Aktien und möglicherweise auch risikofreie Anlagen in ein Portefeuille aufgenommen werden können.

Konzept von
Kapitel

Wir unterstellen dabei stets, dass die betrachteten Anleger ausschließlich an den *unmittelbaren monetären Konsequenzen* der Aktienanlage interessiert sind, also etwa an Kursveränderungen, Dividenden, Bezugsrechtserlösen etc. Weitergehende Aspekte, die dem Investor über eine Beeinflussung der Geschäftspolitik anderweitige Vorteile bringen können, bleiben hingegen außer Betracht.

1.2 Modellgrundlagen

1.2.1 Prämissen des Modells

In Anlehnung an die Darstellung von MARKOWITZ betrachten wir eine Modellsituation, die durch die folgenden Merkmale gekennzeichnet werden kann:

(1) Anlagealternativen

Anlage einer festen
Anlagesumme in
Wertpapieren

- Ein Investor will im Zeitpunkt $t = 0$ eine fest vorgegebene Summe A für eine Periode, d.h. bis zum Zeitpunkt $t = 1$, in Wertpapieren anlegen und diese in $t = 1$ wieder liquidieren.
- Zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ verursachen diese Wertpapiere keinerlei weitere Zahlungen, z.B. als Dividenden, Zinsen etc. Im Zeitpunkt $t = 1$ werden alle Wertpapiere verkauft.
- Im Einzelnen stehen m Wertpapiere $i = 1, 2, \dots, m$ zur Auswahl, die jeweils in beliebiger Stückelung erworben werden können. Dabei belaufen sich die
 - jeweiligen Einstandspreise in $t = 0$ auf die Werte P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) und
 - die in $t = 1$ erzielbaren Verkaufspreise auf Q_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

(2) Originäre Zielvorstellung

Endvermögens-
maximierung

- Die originäre Zielvorstellung des Investors besteht darin, durch Bildung eines „Portefeuilles“, d.h. durch die Aufteilung der gesamten Anlagesumme auf die m verschiedenen Wertpapiere, im Zeitpunkt $t = 1$ ein möglichst großes Endvermögen EV zu erreichen.
- Da die Anlagesumme A fest vorgegeben ist und zwischen $t = 0$ und $t = 1$ keinerlei zwischenzeitliche Transaktionen oder Zahlungen stattfinden, kann die Zielsetzung der Endvermögensmaximierung äquivalent durch die Maximierung des Portefeuillegewinns (G)

$$G = EV - A$$

Renditemaximierung

oder der Portefeullerendite (r)

$$(P1) \quad r = \frac{EV - A}{A}$$

ersetzt werden. Im Hinblick auf die weitere Modellierung erweist es sich als zweckmäßig, der Zielsetzung der Renditemaximierung zu folgen.¹⁾

- Bezeichnet man den Ausdruck

$$(P2) \quad r_i = \frac{Q_i - P_i}{P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

als die Einzelrendite eines Wertpapiers i und kennzeichnet x_i den prozentualen Anteil der Anlagesumme A , der in Wertpapier i investiert wird, so kann für die insgesamt erzielbare Portefeullerendite auch geschrieben werden

$$(P3) \quad r = \sum_{i=1}^m r_i \cdot x_i$$

Portefeullerendite
als gewichtete Summe
der Einzelrenditen

$$\text{mit } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad \text{und} \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).^{2)}$$

Die Portefeullerendite ergibt sich also einfach als gewichteter Durchschnitt aller Einzelrenditen. Als Gewichte dienen dabei die Anteile x_i ($i = 1, 2, \dots, m$), die je einzeln nicht negativ werden dürfen und deren Summe sich auf 1, entsprechend 100%, belaufen muss.

Beispiel 1:

Ein Investor will 10.000 Euro investieren und zieht dabei drei Wertpapiere in Betracht, für deren Ankaufspreise in $t = 0$ und Verkaufspreise in $t = 1$ folgende Werte gelten:

$$P_1 = 50, Q_1 = 55; \quad P_2 = 40, Q_2 = 48; \quad P_3 = 20, Q_3 = 15.$$

Entsprechend (3.02) gilt für die zugehörigen Renditen

$$r_1 = 0,1 \triangleq 10\%; \quad r_2 = 0,2 \triangleq 20\%; \quad r_3 = -0,25 \triangleq -25\%.$$

1 Die in der ersten Kurseinheit dieses Moduls aufgezeigte allgemeine Problematik von Renditeüberlegungen im Zusammenhang mit Auswahlentscheidungen tritt in diesem speziellen einperiodigen Modell nicht auf.

2 Die Herleitung dieser Relation finden Sie im Anhang P₀.

Würde der Investor nun die einzelnen Wertpapiere – aus welchen Gründen auch immer – in den Stückzahlen $Y_1 = 80$; $Y_2 = 90$ und $Y_3 = 120$ erwerben, so beliefen sich die in die drei Papiere investierten Anlagesummen auf $Y_1 \cdot P_1 = 4.000$ Euro, $Y_2 \cdot P_2 = 3.600$ Euro und $Y_3 \cdot P_3 = 2.400$ Euro, ihre Anteile an der gesamten Investition mithin auf $x_1 = 40\%$, $x_2 = 36\%$ und $x_3 = 24\%$.

Weiter beliefen sich die aus den einzelnen Wertpapieren erzielbaren Rückzahlungsbeträge auf $Y_1 \cdot Q_1 = 4.400$ Euro, $Y_2 \cdot Q_2 = 4.320$ Euro sowie $Y_3 \cdot P_3 = 1.800$ Euro, was insgesamt einem Endvermögenswert von 10.520 Euro entspricht. Bei der willkürlich unterstellten Anlagepolitik würde insgesamt also eine Portefeullerendite von 5,2% erzielt. Dies entspricht in Übereinstimmung mit Relation (3.03) zugleich dem gewogenen Durchschnitt der Einzelrenditen, wie die Überprüfung

$$0,4 \cdot 0,1 + 0,36 \cdot 0,2 + 0,24 \cdot (-0,25) = 0,052$$

zeigt.

In der bisher präsentierten Darstellung wäre das MARKOWITZ-Problem allerdings äußerst trivial: Sind die künftigen Wertpapierpreise Q_i bereits im Anlagezeitpunkt bekannt, so würde die maximale Rendite, und damit auch das maximale Endvermögen, dadurch erreicht, dass die gesamte Anlagesumme A in das Wertpapier mit der höchsten Einzelrendite investiert wird, im Beispiel 1 also in Wertpapier 2. Die seinerzeit bahnbrechende Bedeutung hat das MARKOWITZ-Modell vielmehr erst durch die im folgenden Punkt darzustellende Einbeziehung von unsicheren Erwartungen erhalten.

(3) Subsidiäre Zielvorstellungen bei unsicheren Erwartungen

Unsichere Erwartungen

- Im weiteren wird unterstellt, dass die zukünftigen Kurse Q_i und dementsprechend auch die wertpapierindividuellen Renditewerte r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) nicht mit Sicherheit bekannt sind, der Investor jedoch immerhin Wahrscheinlichkeitsverteilungen der alternativ möglichen Ausprägungen dieser Zufallsvariablen kennt.

Beispiel 2:

Wir knüpfen an die Annahmen des Beispiels 1 an, unterstellen jetzt jedoch, der Investor halte fünf verschiedene „Szenarien“ S_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) für möglich, in denen sich für die drei Wertpapiere jeweils unterschiedliche Verkaufspreise \tilde{Q}_i und dementsprechend auch Renditen \tilde{r}_i ergeben können. Dabei halte er Szenario S_1 für das wahrscheinlichste und ordne ihm eine Eintrittswahrscheinlichkeit von 40% zu. Den Szenarien S_2 und S_3 ordne er jeweils nur eine halb so große Wahrscheinlichkeit zu, also 20%; und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der Szenarien S_4 und S_5 veranschlage er nur auf jeweils 10%.

Folgende Tabelle verdeutlicht die Vorstellungen des Anlegers über die je nach Szenario erzielbaren Verkaufspreise \tilde{Q}_i und die dem bei $P_1 = 50$; $P_2 = 40$; $P_3 = 20$ entsprechenden Renditen \tilde{r}_i :

Szenario	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
Wahrscheinlichkeit	40%	20%	20%	10%	10%
\tilde{Q}_1	55	65	45	75	35
\tilde{Q}_2	40	70	30	40	80
\tilde{Q}_3	25	4	6	30	0
\tilde{r}_1	10%	30%	-10%	50%	-30%
\tilde{r}_2	0%	75%	-25%	0%	100%
\tilde{r}_3	25%	-80%	-70%	50%	-100%

- Jedes einzelne Wertpapier wird zunächst also durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung alternativ möglicher Renditewerte repräsentiert. Dabei wird im Rahmen des MARKOWITZ-Modells weiter unterstellt, dass der Anleger bei der Bewertung solcher Wahrscheinlichkeitsverteilungen dem Ihnen inzwischen schon bestens bekannten **μ - σ -Prinzip** folgt, sie also nur noch an Hand der beiden Parameter Erwartungswert und Standardabweichung beurteilt.¹⁾ Ordnet man den alternativ möglichen Szenarien den Index j zu und bezeichnet man deren Anzahl mit n , die Wahrscheinlichkeiten mit p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) sowie die in Szenario j bei Wertpapier i erzielbare Rendite mit r_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), so gilt für diese Parameter:

 μ - σ -Prinzip

$$(P4) \quad \mu_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_j \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(P5) \quad \sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (r_{ij} - \mu_i)^2 \cdot p_j} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Im sprachlichen Umgang mit diesen beiden Parametern wird μ häufig als Ertragsindikator oder auch – verkürzt – einfach nur als „Ertrag“ bezeichnet und σ als Risikoindikator oder verkürzt einfach als „Risiko“.

1 Bei dem Versuch, das MARKOWITZ-Modell in seiner ursprünglichen Form oder einer der zahlreichen später entwickelten Varianten praktisch anzuwenden, greift man zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Wertpapiere oder der darauf bezogenen μ - und σ -Werte in aller Regel auf die Beobachtung der in der Vergangenheit tatsächlich realisierten Kurse und Kursänderungen bzw. daraus abgeleiteter Renditewerte zurück. Unter der Bezeichnung **Volatilität** hat dabei insbesondere die Standardabweichung der tatsächlich beobachteten Rendite besondere Prominenz erlangt.

Beispiel 2 (Fortsetzung):

Für das Wertpapier $i = 1$ aus Beispiel 2 ergeben sich nach (P4) und (P5) die folgenden Werte:

$$\mu_1 = 0,4 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot (-0,1) + 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot (-0,3)$$

$$\mu_1 = 0,1 \hat{=} 10\%$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= 0,4 \cdot 0 + 0,2 \cdot (0,3 - 0,1)^2 + 0,2 \cdot (-0,1 - 0,1)^2 + 0,1 \cdot (0,5 - 0,1)^2 + 0,1 \cdot (-0,3 - 0,1)^2 \\ &= 0,048 \end{aligned}$$

bzw.

$$\sigma_1 = \sqrt{0,048} = 0,219 \hat{=} 21,9\% .$$

Übungsaufgabe 1:

Bestimmen Sie auch für die Wertpapiere $i = 2$ und $i = 3$ aus Beispiel 2 jeweils die μ - und σ -Werte!

Risikoscheu als
Handlungsmaxime

- Schließlich wird unterstellt, dass der Investor nicht nur die einzelnen Wertpapiere, sondern auch ein aus ihrer „Mischung“ resultierendes Portefeuille der Art, wie Sie es schon in Beispiel 1 kennengelernt haben, an Hand des Erwartungswertes (μ_P) und der Standardabweichung (σ_P) der Portefeuillierendite beurteilt und dabei **risikoscheu** im Sinne des μ - σ -Prinzips eingestellt ist. D.h., dass er
 - bei gegebenem Erwartungswert μ_P bestrebt ist, eine möglichst kleine Standardabweichung σ_P zu erzielen, und
 - bei gegebener Standardabweichung σ_P einen möglichst hohen Erwartungswert μ_P anstrebt.

Daraus folgt zugleich, dass der Investor eine Anlagemöglichkeit, die im Vergleich zu einer anderen sowohl einen höheren μ - als auch einen niedrigeren σ -Wert aufweist, erst recht bevorzugt.

Suche nach der
„günstigsten“
 μ - σ -Kombination

Als konkretes Handlungsziel wird so unterstellt, dass es dem betrachteten Anleger darum geht, durch die Wahl der Anteile x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) letztendlich das Portefeuille herauszufinden, das die „günstigste“ μ - σ -Kombination aufweist. Wie dabei der Vergleich von zwei Portefeuilles A und B ausfällt, die durch die Parameterwerte $\mu_A > \mu_B$ und $\sigma_A > \sigma_B$ gekennzeichnet sind, bleibt im Rahmen des allgemeinen Modellansatzes unspezifiziert. Wie wir noch sehen werden, bedarf es daher zur Ableitung einer eindeutigen Optimallösung einer über das

Modell hinausgehenden subjektiven Artikulation der individuellen Präferenzrelationen des Investors.

1.2.2 Einfache Anlageentscheidungen nach dem μ - σ -Prinzip

Als vorbereitende „Fingerübung“ für das im folgenden Abschnitt näher zu behandelnde eigentliche Portefeuillemodell wollen wir zunächst annehmen, der Investor wolle unter Beachtung des μ - σ -Prinzips die gesamte Anlagesumme in ein einziges Wertpapier, eben „das günstigste“, investieren. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 3:

Ein im Sinne des μ - σ -Prinzips risikoscheuer Anleger zieht vier Aktien A, B, C, D in die enge Wahl, die folgende μ - σ -Werte aufweisen:

$$\mu_A = 10 ; \quad \sigma_A = 20$$

$$\mu_B = 20 ; \quad \sigma_B = 40$$

$$\mu_C = 10 ; \quad \sigma_C = 30$$

$$\mu_D = 15 ; \quad \sigma_D = 40$$

Abb. 1 verdeutlicht diese 4 Aktien in einem μ - σ -Diagramm.

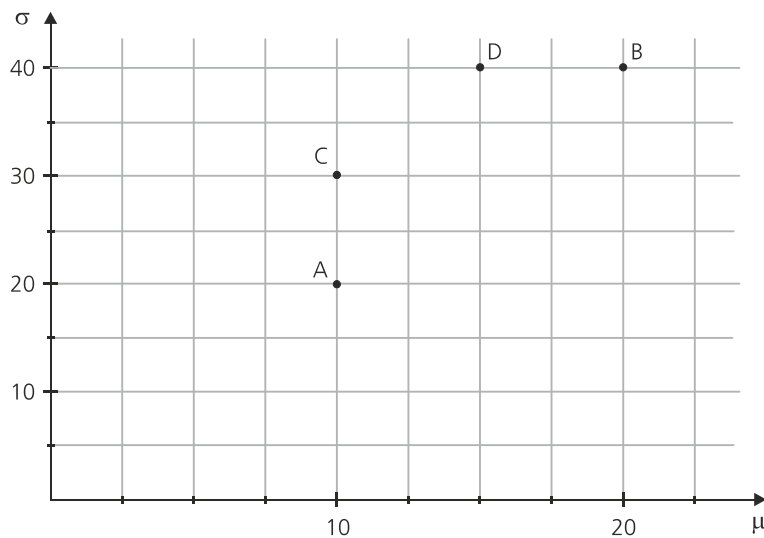


Abb. 1: μ - σ -Werte einzelner Anlagemöglichkeiten

Wie man schnell erkennt, kommen die Alternativen C und D offensichtlich auf keinen Fall als optimale Anlage in Betracht, denn

- A hat bei gleichem μ ein geringeres σ als C und
- B hat bei gleichem σ ein höheres μ als D.

Man sagt in diesem Kontext auch, C und D würden „dominiert“ oder seien „nicht effizient“. Nicht effiziente Handlungsalternativen wie C und D können mithin von Anfang an aus der Betrachtung ausgeschlossen werden.

Die Auswahl zwischen A und B jedoch hängt von der subjektiven Einstellung des Investors, insbesondere dem Ausmaß seiner Risikoscheu ab:

- Ein Anleger mit hoher Risikoscheu wird die bei einem Übergang von A nach B auftretende Erhöhung des Risikos stärker gewichten als die gleichzeitig erzielbare Steigerung der Renditeaussichten. Er wird sich also für A entscheiden.
- Ein weniger risikoscheuer Anleger hingegen würde B trotz der damit verbundenen höheren Risiken wegen der gleichzeitig erzielbaren Steigerung der Renditeaussichten vorziehen.

Effizienzprinzip

Das soeben an unserem Beispiel verdeutlichte **Effizienzprinzip**, d.h. der Grundsatz, im Sinne des μ - σ -Prinzips dominierte Anlagealternativen bei der Suche nach der Optimallösung auszuschließen, stellt einen zentralen Baustein des MARKOWITZ-Modells dar. Allerdings darf aus unserem Beispiel nicht der voreilige Schluss gezogen werden, in der hier zunächst nur betrachteten einfachen Entscheidungssituation dominierte Wertpapiere, wie C und D im Beispiel 3, könnten auch bei der Beurteilung aus mehreren Wertpapieren zusammengesetzter Portefeuilles von Anfang an aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Wie wir im kommenden Abschnitt noch sehen werden, ist es vielmehr durchaus möglich, dass in Konstellationen nach Art von Beispiel 3 die für die Einzelanlage dominierten Wertpapiere C und D dennoch zu bestimmten Anteilen in einem effizienten Portefeuille enthalten sein können.

2 Portefeuilles aus zwei Wertpapieren

2.1 Ein Ausgangsbeispiel

Wir wollen jetzt die Möglichkeit ins Auge fassen, die Anlagesumme auf mehrere Wertpapiere aufzuteilen, also ein **Portefeuille** zu bilden. Der Einfachheit halber nehmen wir dabei zunächst an, dass die einzelnen Papiere in beliebigen Stückelungen in das Portefeuille aufgenommen werden können, die Anteilsindikatoren x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) also jeweils kontinuierlich alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen können. Damit aber stellt sich allgemein die Frage, welche μ - und σ -Werte sich für ein derartiges Portefeuille ergeben. Folgendes Beispiel ermöglicht für den einfachsten Fall von nur zwei Wertpapieren einen ersten Einblick in die grundlegenden Mechanismen der Risikomischung.

Möglichkeiten der Portefeuillebildung

Beispiel 4:

Wir betrachten die beiden aus Beispiel 3 bekannten Papiere A und B mit den Kennzahlenwerten $\mu_A = 10$; $\sigma_A = 20$ bzw. $\mu_B = 20$; $\sigma_B = 40$. Diese Kennzahlenwerte mögen – als besonders einfach gewählter Fall – daraus resultieren, dass der Anleger insgesamt vier verschiedene Szenarien $j = 1, 2, 3, 4$ für möglich hält, die mit jeweils 25%-iger Wahrscheinlichkeit zu unterschiedlichen Kursen für die Titel A und B führen. Tab. 1 enthält die entsprechenden Werte. Um die anschließenden Überlegungen anschaulich verdeutlichen zu können, sind dabei hinsichtlich der Renditeverteilung des Wertpapiers B im Detail drei verschiedene Konstellationen I, II, III angenommen worden, die alle mit den eingangs gesetzten Wahrscheinlichkeitsangaben kompatibel sind und sich nur in der Zuordnung der Ergebniswerte zu den verschiedenen Szenarien unterscheiden.

Szenario	S_1	S_2	S_3	S_4			
Wahrscheinlichkeit	0,25	0,25	0,25	0,25	μ	σ	
Rendite A	-10	-10	30	30	10	20	
Rendite B	I	-20	-20	60	20	40	
	II	-20	60	-20			60
	III	60	60	-20			-20

Tab. 1: Wahrscheinlichkeitsverteilungen für zwei Wertpapiere

Solange es nur darum geht, den Anlagebetrag vollständig in A oder B zu investieren, ist die letztgenannte Differenzierung völlig unerheblich; alle drei Varianten von B erscheinen in isolierter Betrachtung hinsichtlich der mit ihnen verknüpften Risiken und Chancen als absolut identisch.

Anders verhält es sich jedoch, wenn es auch möglich ist, den Gesamtanlagebetrag auf die beiden Titel A und B aufzuteilen, die damit jeweils verbundenen Risiken also zu „mischen“. Dazu wird zunächst die Möglichkeit betrachtet, die Anlagesumme jeweils zur Hälfte auf A und B aufzuteilen. Tab. 2 zeigt für alle drei Konstellationen I, II und III die bei den verschiedenen

Szenarien jeweils erzielbaren Renditen des aus den Aktien A und B zusammengestellten Portefeuilles.

Szenario	S_1	S_2	S_3	S_4		
Wahrscheinlichkeit	0,25	0,25	0,25	0,25	μ	σ
Rendite A & BI	-15	-15	45	45	15	30
Rendite A & BII	-15	25	5	45	15	22,4
Rendite A & BIII	25	25	5	5	15	10

Verteilung von
Portefeuillerenditen

Tab. 2: Wahrscheinlichkeitsverteilungen für ein Portefeuille aus zwei Wertpapieren

Vergleicht man die in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellten Werte, so erkennt man zunächst, dass der Erwartungswert des aus A und B kombinierten Portefeuilles, so wie man es auch intuitiv erwartet, genau dem Durchschnitt der ursprünglichen Erwartungswerte $\mu_A = 10$ und $\mu_B = 20$ entspricht. Dies kann auch ganz allgemein gezeigt werden: Der Erwartungswert einer aus mehreren Einzelpositionen additiv zusammengesetzten Gesamtposition ergibt sich stets als gewichtete Summe der ursprünglichen Erwartungswerte.

Portefeuille-Risiken

Anders verhält es sich hingegen mit dem Risikoindikator σ . Lediglich für Konstellation I ergibt sich die Standardabweichung der Gesamtposition als Durchschnitt der Ausgangswerte $\sigma_A = 20$ und $\sigma_B = 40$. Die Konstellationen II und III führen hingegen zu niedrigeren σ -Werten. Dabei wird an Hand von Konstellation III die Möglichkeit deutlich, dass sich aus der Zusammenfügung von zwei risikobehafteten Papieren ein Portefeuille mit einem Risikoindikator ergeben kann (hier $\sigma = 10$), der deutlich unter dem niedrigsten Risikoindikator der zugrundeliegenden Wertpapiere (hier $\sigma_A = 20$) liegt. Also: *Risikoverringung* durch teilweisen Austausch eines risikoarmen Papiers durch ein risikoreicheres? Wir werden darauf noch zurückkommen.

Übungsaufgabe 2:

Gehen Sie von Konstellation III aus Beispiel 4 aus und betrachten Sie ein Portefeuille, das zu 2/3 aus Wertpapier A und 1/3 aus Wertpapier B besteht. Kommentieren Sie Ihren Befund!

Korrelation

Aus unserem Beispiel folgt zunächst, dass für das Risiko einer Gesamtposition, die sich aus der Zusammenfügung mehrerer jeweils individuell risikobehafteter Einzelpositionen ergibt, nicht allein die isoliert betrachteten Risiken der Ausgangspositionen maßgeblich sein können. Von ausschlaggebender Bedeutung ist vielmehr die Frage, wie die unsicheren Ergebnisse der einzelnen Positionen im Hinblick auf (hypothetische) Veränderungen der für ihr Zustandekommen maßgeblichen Einflussfaktoren reagieren. Diese, in der Statistik als **Korrelation** bezeichnete, Beziehung zwischen zwei unsicheren Größen soll im nächsten Abschnitt etwas eingehender betrachtet werden.

2.2 Zur Bedeutung der Korrelation

Vergleicht man in Tab. 1 die möglichen Renditewerte für Aktie A mit den korrespondierenden Größen der drei für B dargestellten Varianten, so wird folgendes deutlich:

- In der Variante I reagiert die Rendite von B auf gedankliche Veränderungen des jeweils betrachteten Szenarios tendenziell in der gleichen Weise wie die von A.
- Bei der Variante III verhält es sich gerade umgekehrt: Die Renditen von A und B reagieren genau entgegengesetzt. Die Szenarien, die bei A zur maximalen Rendite führen, bringen bei B gerade das schlechtestmögliche Ergebnis und vice versa.
- Im Vergleich von A mit B in Variante II schließlich ist ein derartig eindeutiger Zusammenhang nicht erkennbar; die Renditen reagieren teils gleichgerichtet, teils entgegengesetzt.

Um derartige Zusammenhänge ebenfalls durch quantitative Indikatoren zu verdeutlichen, wird üblicherweise auf die zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der betrachteten Zufallsvariablen bestehende Kovarianz cov oder den daraus abgeleiteten Korrelationskoeffizienten ρ zurückgegriffen. Bezeichnet man die bei den verschiedenen Szenarien ($j = 1, 2, \dots, n$) erzielbaren Renditen der beiden Wertpapiere A und B in gewohnter Weise mit r_{Aj} bzw. r_{Bj} , so gilt für die Kovarianz die Formel:

Kovarianz als Kennzahl des stochastischen Zusammenhangs

$$(P6) \quad \text{cov}_{AB} = \sum_{j=1}^n (r_{Aj} - \mu_A) \cdot (r_{Bj} - \mu_B) \cdot p_j$$

Die Kovarianz ist also in folgenden Schritten zu berechnen:

- Zunächst werden sämtliche Abweichungen der alternativ möglichen Renditewerte von ihrem Erwartungswert ermittelt.
- Die auf dasselbe Szenario j bezogenen (negativen oder positiven) Abweichungen der Wertpapiere A und B werden miteinander multipliziert.
- Diese (negativen oder positiven) Produkte werden anschließend mit den zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten p_j multipliziert.
- Schließlich werden diese für alle n Entwicklungsmöglichkeiten errechneten Dreifachprodukte addiert.

Beispiel 5:

Gehen wir von den Daten des Beispiels 4 aus und betrachten wir den Zusammenhang zwischen Aktie A und Aktie B für Konstellation I. Für die Kovarianz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{ABI} &= 0,25 \cdot (-10 - 10) \cdot (-20 - 20) + 0,25 \cdot (-10 - 10) \cdot (-20 - 20) \\ &\quad + 0,25 \cdot (30 - 10) \cdot (60 - 20) + 0,25 \cdot (30 - 10) \cdot (60 - 20) \\ &= 0,25 \cdot 800 + 0,25 \cdot 800 + 0,25 \cdot 800 + 0,25 \cdot 800 \\ &= 800 \end{aligned}$$

Durch entsprechende Rechnungen erhält man für die beiden anderen Varianten:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{ABII} &= 0 \quad \text{und} \\ \text{cov}_{ABIII} &= -800 . \end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Kovarianz ist einfach zu interpretieren:

Vorzeichen
der Kovarianz

- Eine positive Kovarianz weist darauf hin, dass Renditen der betrachteten Wertpapiere tendenziell gleichgerichtet auf exogene Entwicklungen reagieren.
- Eine negative Kovarianz verdeutlicht den entgegengesetzten Zusammenhang.
- Eine Kovarianz von Null schließlich zeigt an, dass die betrachteten Renditen sich gänzlich unabhängig voneinander entwickeln, also teils gleichgerichtet, teils entgegengesetzt reagieren.

Die Kovarianzen selbst sagen jedoch zunächst noch nicht viel über die *Stärke* des vorhandenen Zusammenhangs aus. Dieses Manko kann behoben werden, indem man die Kovarianz einfach durch die Standardabweichungen der beiden Papiere dividiert. Man erhält so für den **Korrelationskoeffizienten** ρ :

$$(P7) \quad \rho_{AB} = \frac{\text{cov}_{AB}}{\sigma_A \cdot \sigma_B} .$$

Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient ist eine auf den Wertebereich von +1 bis -1 normierte Maßzahl, die Aussagen darüber macht, ob die betrachteten Zufallsvariablen auf Änderungen der für ihr Zustandekommen maßgeblichen Einflussgrößen

- tendenziell gleichgerichtet oder entgegengesetzt reagieren ($\rho \approx +1$ bzw. $\rho \approx -1$) oder
- ein derartig eindeutiger Zusammenhang nicht besteht ($\rho \approx 0$).

Dabei ist eine positive oder negative Korrelation umso stärker ausgeprägt, je näher ρ bei +1 bzw. -1 liegt.

Beispiel 6:

Wir greifen auf die zu den Beispielen 4 und 5 berechneten Werte zurück:

$$\sigma_A = 20 ; \sigma_B = 40 ; \text{cov}_{ABI} = 800 ; \text{cov}_{ABII} = 0 ; \text{cov}_{ABIII} = -800 .$$

Für die Korrelationskoeffizienten in den drei Varianten I bis III gilt dann:

$$\rho_{ABI} = +1$$

$$\rho_{ABII} = 0$$

$$\rho_{ABIII} = -1$$

In unserem Beispiel sind also gerade die drei besonders prägnanten Ausprägungen von Korrelationsbeziehungen vertreten.

2.3 Zur Bestimmung der Portfeuillekennzahlen

Bezeichnen wir den Anteil der insgesamt vorgegebenen Anlagesumme, der in Aktie A(B) investiert werden soll, mit x_A bzw. x_B ($0 \leq x_A, x_B \leq 1$; $x_A + x_B = 1$), so gilt für den Erwartungswert der Portfeuillerendite μ_P einfach:

$$(P8) \quad \mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B ,$$

oder wenn wir x_B durch $(1 - x_A)$ ersetzen und zusammenfassen:

$$(P8') \quad \mu_P = \mu_B + x_A \cdot (\mu_A - \mu_B) .$$

Erwartungswert
der Portfeuillerendite

Diese allgemein gültige Formel haben wir im Beispiel 4 ja schon bestätigt gefunden. Wie wir dort auch schon gesehen haben, liegen der Standardabweichung der Portfeuillerendite offenbar kompliziertere Zusammenhänge zugrunde, wobei wir erwarten, dass die Korrelation dabei eine bedeutende Rolle spielen dürfte.

Ohne auf die Herleitung näher einzugehen, sei hier zunächst mitgeteilt, dass für die Standardabweichung eines aus zwei Aktien A und B zusammengesetzten Portfeuillees allgemein folgende, zunächst nicht sehr übersichtliche, Formel gilt:

$$(P9) \quad \sigma_P = \sqrt{(x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot (x_A \cdot x_B) \cdot \text{COV}_{AB}} \quad \text{oder}$$

Standardabweichung
der Portefeullerendite

$$(P9') \quad \sigma_P = \sqrt{(x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot (x_A \cdot x_B) \cdot (\sigma_A \cdot \sigma_B) \cdot \rho_{AB}}.$$

Man erkennt, dass σ_P bei gegebenen Einzelrisiken (σ_A, σ_B) und Anteilen (x_A, x_B) umso kleiner wird, je kleiner der Wert des Korrelationskoeffizienten ist.

Um die dieser Formel zugrundeliegenden Zusammenhänge in ihren Grundzügen zu verdeutlichen, betrachten wir zunächst die drei markanten Fälle $\rho = +1$, $\rho = 0$ und $\rho = -1$.

(1) Vollständig positive Korrelation ($\rho = +1$)

Sind zwei Wertpapiere A und B zu 100% positiv korreliert, gilt also $\rho_{AB} = 1$, so vereinfacht sich der Ausdruck unter der Wurzel von (P9'), also die Varianz σ_P^2 , zu

$$\sigma_P^2 = (x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot (x_A \cdot \sigma_A) \cdot (x_B \cdot \sigma_B).$$

Der Ihnen bekannten „binomischen Formel“ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ entsprechend kann stattdessen auch

$$\sigma_P^2 = (x_A \cdot \sigma_A + x_B \cdot \sigma_B)^2$$

geschrieben werden. Bei 100% positiver Korrelation gilt für die Standardabweichung der Portefeullerendite somit die einfache Relation

$$(P10) \quad \sigma_P = x_A \cdot \sigma_A + x_B \cdot \sigma_B.$$

Unter Berücksichtigung von $x_A + x_B = 1$ kann stattdessen auch geschrieben werden:

$$(P10') \quad \sigma_P = \sigma_B + x_A \cdot (\sigma_A - \sigma_B).$$

Im Fall vollständig positiver Korrelation berechnet sich die Standardabweichung der Portefeullerendite also – analog zum Erwartungswert – als gewichteter Durchschnitt der wertpapierindividuellen Standardabweichungen.

Fasst man (P8') und (P10') zusammen, so kann der Zusammenhang zwischen der Standardabweichung σ_P und dem Erwartungswert μ_P der Portfeuillerendite durch folgende Relation ausgedrückt werden:¹⁾

$$(P11) \quad \sigma_P = \frac{\sigma_A \cdot \mu_B - \sigma_B \cdot \mu_A}{\mu_B - \mu_A} + \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\mu_B - \mu_A} \cdot \mu_P.$$

μ - σ -Beziehungen
bei vollständiger
Korrelation

Zum besseren „Lesen“ von (P11) ist zu beachten, dass die Größen σ_A , σ_B , μ_A und μ_B Konstante sind und nur die beiden fett gedruckten Größen σ_P und μ_P die Variablen darstellen. Verdeutlicht man diese – nur scheinbar komplizierte – Relation in einem μ - σ -Diagramm, wie wir es schon aus Abb. 3.01 kennen, so zeigt sich dementsprechend, dass (P11) nichts anderes darstellt als die Gleichung einer **Geraden** zwischen den beiden Punkten, die die μ - σ -Werte der beiden zugrundeliegenden Einzelwerte, hier also A und B, kennzeichnen. Jeder Punkt einer solchen Linie kennzeichnet dabei eine bestimmte Kombination von μ - und σ -Werten, die bei Bildung eines Portfeuilles aus den beiden Ausgangspapieren realisiert werden können. Wir wollen diese Linien daher als **Portfeuillelinien** bezeichnen.

Portfeuillelinien

Ganz allgemein kann der Verlauf derartiger Portfeuillelinien approximativ festgestellt werden, indem man für verschiedene Portfeuillezusammensetzungen (x_A ; x_B) jeweils μ_P und σ_P berechnet und die entsprechenden Punkte in ein μ - σ -Diagramm einzeichnet. Häufig ist es allerdings leichter, die Bestimmungsgleichung für die erwartete Portfeuillerendite (P8') nach x_A aufzulösen und in der Bestimmungsgleichung (P9') für σ_P den Wert x_A durch den so gefundenen, von μ_P abhängigen, Ausdruck zu ersetzen. Man erhält dann – so wie in (P11) – eine unmittelbare Relation zwischen σ_P und μ_P , durch die die gesamte Portfeuillelinie analytisch ausgedrückt wird.

1 Die Herleitung dieser Relation wird im Anhang P₁ verdeutlicht.

Beispiel 7:

In unserem Beispiel gilt $\mu_A = 10$; $\mu_B = 20$; $\sigma_A = 20$ und $\sigma_B = 40$. Mithin ergibt sich für die Beziehung zwischen Portefeullerisiko und erwarteter Portefeullerendite gem. der Gleichung der Portefeullelinie (3.11) die besonders einfache Relation

$$\sigma_P = \frac{20 \cdot 20 - 40 \cdot 10}{20 - 10} + \frac{40 - 20}{20 - 10} \cdot \mu_P, \quad \text{also}$$

$$\sigma_P = 2\mu_P.$$

Abb. 2 verdeutlicht den Verlauf dieser Geraden. Wenn man also von $x_A = 1$, d.h. 100%-iger Anlage in A, ausgehend sukzessive den Anteil des ertrags-, aber auch risikoreicheren Papiers B erhöht, so steigen μ_P und σ_P jeweils in gleichem Umfang.

Portefeullegerade
bei $\rho = +1$

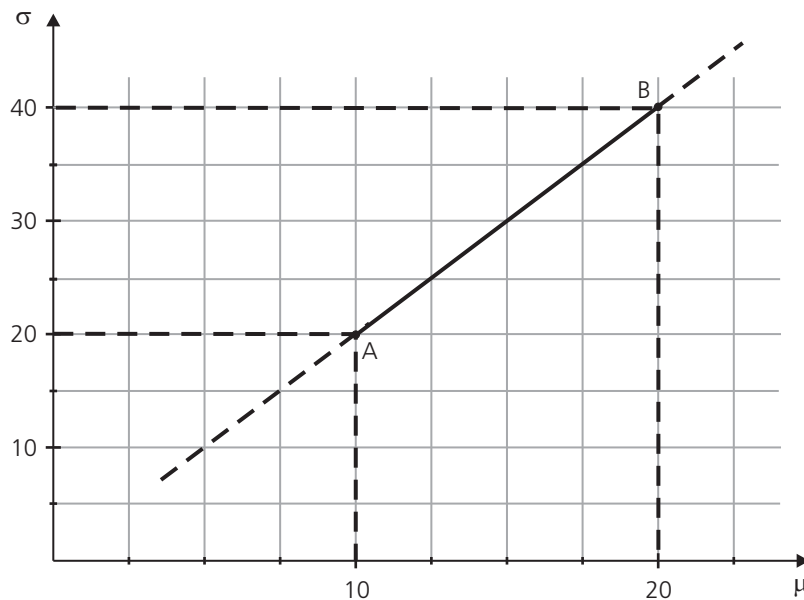


Abb. 2: Portefeullelinie bei $\rho = +1$

Übungsaufgabe 3:

Betrachten Sie neben den im Beispiel 7 bekannten Wertpapieren A und B auch noch das mit A und B jeweils ebenfalls zu 100%-korellierte Wertpapier D mit den Daten $\mu_D = 15$; $\sigma_D = 40$. Zeichnen Sie auch die Portefeullelinien AD und DB in ein Abb. 2 entsprechendes Diagramm ein und kommentieren Sie den Befund unter Berücksichtigung der Portefeullelinie AB!

Zur Interpretation einer Portefeuillelinie der in Abb. 2 dargestellten Art geht man am besten von der Vorstellung aus, den gesamten Anlagebetrag zunächst ausschließlich in Wertpapier A zu investieren, also $x_A = 1$ und $x_B = 0$ zu realisieren. Im μ - σ -Diagramm entspricht das dem Punkt A. Geht man nun gedanklich von der 100%-igen A-Anlage ab und unterstellt, dass x_A sukzessive vermindert und x_B dementsprechend erhöht werden, so ergibt sich mit zunehmender „Beimischung“ von Wertpapier B eine Folge von μ - σ -Kombinationen, die durch die entsprechenden Punkte auf der Portefeuillelinie verdeutlicht werden. Das Ende der in die Grafik projizierten gedanklichen „Wanderung“ wird mit einem Portefeuille erreicht, das letztendlich nur noch das Wertpapier B enthält, was dann dem Punkt B entspricht.

Interpretation von Portefeuillelinien

Zur Frage, wie sich die Verhältnisse darstellen, wenn die beiden Papiere nicht zu 100% korreliert sind, also $\rho_{AB} < 1$ gilt, greifen wir noch einmal auf Relation (P9') zurück: Man erkennt, dass σ_P bei gegebenen Werten für x_A , x_B , σ_A und σ_B um so kleiner wird, je kleiner ρ_{AB} wird. Der bislang betrachtete Fall von $\rho_{AB} = 1$ liefert also jeweils die maximal möglichen Werte für σ_P . Daraus aber folgt, dass die Portefeuillelinie für einen kleineren Wert von ρ_{AB}

- zwar ebenfalls durch die Randpunkte A und B,
- ansonsten jedoch unterhalb der Verbindungsgeraden zwischen A und B

verlaufen muss. Wir werden uns die entsprechenden Verlaufsformen der Portefeuillelinie für die beiden besonders prägnanten Konstellationen $\rho_{AB} = 0$ und $\rho_{AB} = -1$ im Folgenden etwas näher anschauen.

(2) Keine Korrelation ($\rho = 0$)

Besteht zwischen zwei Wertpapieren gerade keine Korrelation, gilt also $\rho_{AB} = 0$, so erhält man für die Standardabweichung der Portefeuillerendite den Ausdruck

$$(P12) \quad \sigma_P = \sqrt{x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2} .$$

Außer für die Grenzfälle $x_A = 1$ oder $x_B = 1$ ergibt sich für die Standardabweichung in diesem Fall stets ein kleinerer Wert als der durch (P10) ausgedrückte gewichtete Durchschnitt der wertpapierindividuellen Standardabweichungen. Bei einer Darstellung im μ - σ -Diagramm muss die entsprechende Portefeuillelinie also als mehr oder weniger „bauchige“ Kurve unterhalb der Verbindungsgeraden zwischen den Ausgangspunkten A und B verlaufen.

„bauchige“ Portefeuillelinien bei $\rho = 0$

Beispiel 8:

Für Konstellation II unseres Beispiels mit $\rho_{AB} = 0$ berechnet sich die Portfeuillelinie nach folgender Relation, deren Herleitung im Anhang P₂ wiedergegeben ist:

$$\sigma_P = \sqrt{3.200 - 480\mu_P + 20\mu_P^2}.$$

Berechnet man σ_P daraus für verschiedene μ_P -Werte, so erhält man folgende Wertetabelle, in der zusätzlich die Anteile x_A und x_B angegeben sind, die zu dem jeweiligen Erwartungswert führen.

μ_P	10	12	14	16	18	20
x_A	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
x_B	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_P	20	17,9	20	25,3	32,2	40

Grafisch entspricht das dem in Abb. 3 dargestellten Verlauf der Portfeuillelinie.

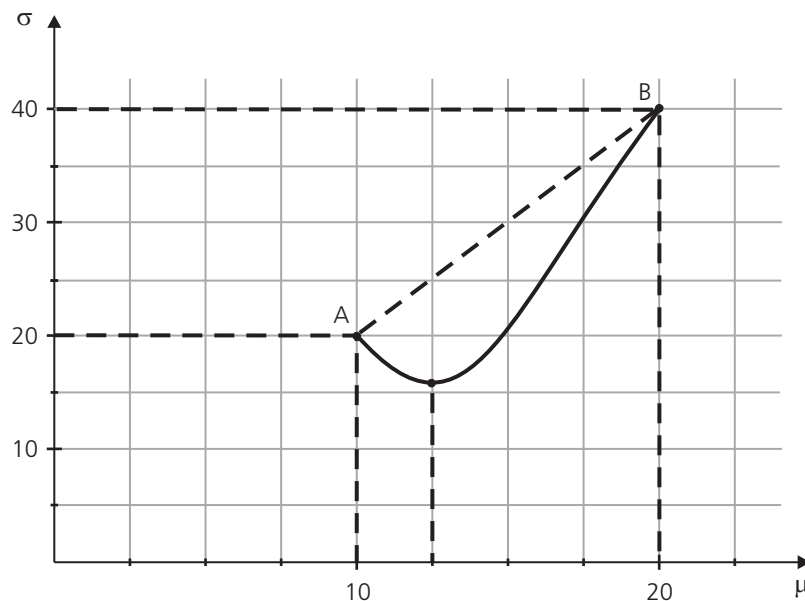


Abb. 3: Portfeuillelinie bei $\rho = 0$

Von der vollständigen Anlage in A ausgehend führt die sukzessive Aufnahme der isoliert betrachtet riskanteren Aktie B in das Portfeuille zunächst dazu, dass das Portfeuilleerisiko sinkt, die erwartete Rendite jedoch zugleich steigt! Insofern ist eine entsprechende Umschichtung des Portfeuillees auf jeden Fall lohnend.

Wie man exakt berechnen kann und in Abb. 3 auch ansatzweise sieht, wird bei einer 80 : 20-Mischung von A und B und einer Renditeerwartung von 12% das minimale Portefuillerrisiko mit $\sigma_P = 17,9$ erreicht. Erhöht man den Anteil von B weiter, so wird bei einer 60 : 40-Mischung mit $\sigma_P = 20$ (bei $\mu_P = 14\%$) gerade wieder dasselbe Risiko erreicht wie bei der ausschließlichen Anlage in A. Erst bei höheren Anteilen von B übersteigt das Portefuillerrisiko σ_A , liegt aber – außer im Grenzfall $x_B = 1$ – stets unter dem gewogenen Durchschnitt von σ_A und σ_B .

Übungsaufgabe 4:

Betrachten Sie neben den Wertpapieren A und B mit $\mu_A = 10$, $\sigma_A = 20$, $\mu_B = 20$, $\sigma_B = 40$ und jetzt wieder $\rho_{AB} = 1$ (!) zusätzlich das schon bekannte Papier D mit $\mu_D = 15$, $\sigma_D = 40$ und nehmen Sie an, dass $\rho_{AD} = \rho_{BD} = 0$ gilt!

- a) Berechnen Sie für Portefuilles aus A und D bzw. B und D jeweils die μ - σ -Kombinationen für den Fall, dass das Papier D darin zu Anteilen von $x_D \triangleq 20\%$; $x_D \triangleq 50\%$; $x_D \triangleq 80\%$ enthalten ist!
- b) Verdeutlichen Sie die zu a) errechneten μ - σ -Kombinationen in einem μ - σ -Diagramm nach Art von Abb. 3 und zeichnen Sie skizzenhaft den gesamten Verlauf der beiden Portefuillelinien AD und DB ein!

(3) Vollständig negative Korrelation ($\rho = -1$)

Bei zwei vollständig negativ korrelierten Aktien erhält man für die Standardabweichung der Portefuillerrendite folgenden einfachen Ausdruck:¹⁾

$$(P13) \quad \sigma_P = |x_A \cdot \sigma_A - x_B \cdot \sigma_B|$$

oder unter Beachtung von $x_A + x_B = 1$

$$(P13') \quad \sigma_P = |-\sigma_B + x_A \cdot (\sigma_B + \sigma_A)|.$$

1 Die Herleitung befindet sich im Anhang P₃.

Portefeuillelinien
bei $\rho = -1$

Die entsprechende Portefeuillelinie, deren allgemeines Aussehen ebenfalls im Anhang P₃ näher hergeleitet wird, hat einen auf den ersten Blick eventuell überraschenden winkelförmigen Verlauf, wie die Fortsetzung unseres Beispiels verdeutlicht.

Beispiel 9:

Für Konstellation III unseres Beispiels gilt zunächst für σ_P gem. (P13')

$$\sigma_P = |-40 + 60x_A|.$$

In Abhängigkeit von verschiedenen x_A -Werten erhält man so:

x_A	$(-40 + 60 x_A)$	σ_P
1	20	20
0,8	8	8
2/3	0	0
0,5	-10	10
0,2	-28	28
0	-40	40

Für die zugehörige Portefeuillelinie erhält man über die Verknüpfung von (P8') mit (P13') die Gleichung

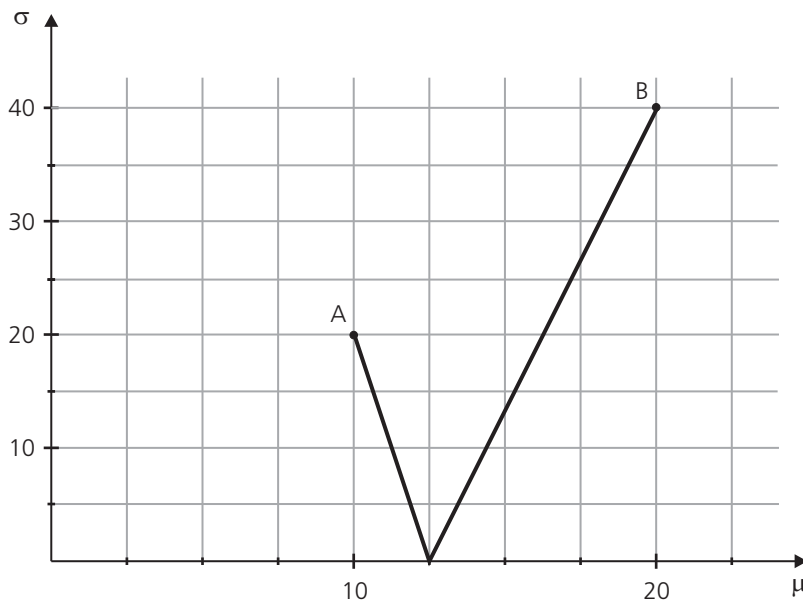
$$\sigma_P = |80 - 6\mu_P|,$$

für die sich folgende Werte ergeben:

μ_P	10	12	$13 \frac{1}{3}$	14	16	18	20
x_A	1	0,8	$\frac{2}{3}$	0,6	0,4	0,2	0
x_B	0	0,2	$\frac{1}{3}$	0,4	0,6	0,8	1
σ_P	20	8	0	4	16	28	40

Abb. 4 verdeutlicht den bereits angesprochenen winkelförmigen Verlauf der Portefeuillelinie.

Risikofreies Portefeuille
als Extremfall



Portefeuillewinkel
bei $\rho = -1$

Abb. 4: Portefeuillelinie bei $\rho = -1$

Von A ausgehend wird durch die sukzessive Aufnahme von B in das Portefeuille zunächst wiederum bei steigender Renditeerwartung das Risiko reduziert. Dabei reicht dieser Effekt in dem hier betrachteten Spezialfall 100%-ig negativer Korrelation sogar soweit, dass bei einer bestimmten Mischung ein risikofreies Portefeuille erreicht werden kann. Wird der Anteil von B über diesen kritischen Wert hinaus weiter erhöht, so gehen weitergehende Steigerungen der Renditeerwartung mit einer proportionalen Erhöhung des Risikos einher.

2.4 Effiziente und optimale Portefeuilles

Als Zusammenfassung der im vorangegangenen Abschnitt erarbeiteten Ergebnisse haben wir in Abb. 5 die Verlaufsformen der Portefeuillelinien für die drei besonders prägnanten Fälle $\rho = +1$, $\rho = 0$ und $\rho = -1$ noch einmal schematisch dargestellt.

Spezielle
Portefeuillelinien

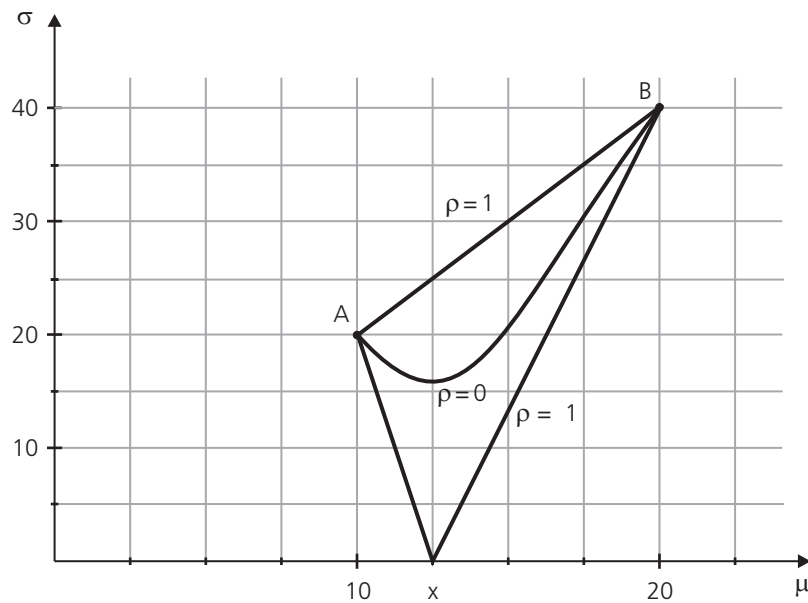


Abb. 5: Grundtypen von Portefeuillelinien

Diese alternativ möglichen Verlaufsformen der Portefeuillelinien können durch die nachfolgend genannten Zusammenhänge zwischen Portefeuillerendite, Portefeuillerisiko und Korrelation deutlich gemacht werden. Dabei wird stets unterstellt, dass der Anleger zunächst von einem reinen A-Portefeuille ($x_A = 1$; vgl. Punkt A in Abb. 5) ausgeht und dann überlegt, ob er durch teilweise Einbeziehung des rentableren, aber auch riskanteren Wertpapiers B die erwartete Rendite erhöhen soll.

Elementare
Verlaufsformen von
Portefeuillelinien:

... Gerade für $\rho = +1$

- Sind die beiden in ein Portefeuille eingehenden Wertpapiere zu 100% positiv korreliert, so ist eine Steigerung der erwarteten Portefeuillerendite nur möglich, wenn zugleich eine Steigerung des Portefuillerisikos in dem gleichen Umfang in Kauf genommen wird. D. h., Renditeerwartung und Risiko steigen *proportional*, die Portefeuillelinie stellt eine Gerade dar (vgl. die Gerade AB in Abb. 5).

... Winkel für $\rho = -1$

- Liegt hingegen der entgegengesetzte Grenzfall von zu 100% negativer Korrelation vor, so bewirkt die sukzessive Substitution von Wertpapier A durch B zunächst eine Steigerung der Renditeerwartung und eine gleichzeitige Verminderung des Risikos; und zwar stehen μ_P und σ_P in einem entgegengesetzt proportionalen Zusammenhang (vgl. die Gerade AX in Abb. 5). Dabei ist es als Extrem sogar möglich, eine Wertpapiermischung zu erhalten, die völlig risikofrei ist (vgl. Punkt X in Abb. 5). Bei diesem Mischungsverhältnis gleichen sich die auf die beiden Wertpapiere genau entgegengesetzt wirkenden Zufallseinflüsse gerade vollständig aus.

Wird dieses Mischungsverhältnis dann jedoch überschritten, so sind weitere Erhöhungen der Renditeerwartung nur noch erreichbar, wenn eine proportionale Risikosteigerung in Kauf genommen wird (vgl. die Gerade XB in Abb. 5). Die Portefeuillelinie insgesamt besteht in diesem Fall also aus zwei Geraden, die auf der μ -Achse aufeinanderstoßen, bildet also einen Winkel (vgl. AXB in Abb. 5).

- Liegt die Korrelation schließlich irgendwo zwischen den beiden Grenzen von $+1$ und -1 , so verläuft die Portefeuillekurve zwischen der oberen Grenzlinie (AB) und dem unteren Grenzwinkel (AXB). Dabei wird die entsprechende Kurve um so „bauchiger“ und nähert sich um so mehr dem Grenzwinkel AXB, je näher ρ bei -1 liegt; umgekehrt wird die Portefeuillelinie um so flacher und nähert sich um so mehr der oberen Grenzgeraden AB, je größer die Korrelation ist, je näher ρ also bei $+1$ liegt.

... „bauchiger“ Verlauf bei $\rho = 0$

Bei der Gestaltung von Portefeuilles kommt es also nicht nur auf die wertpapierindividuellen Risiko- und Renditegrößen an; von ebenso großer Bedeutung ist vielmehr die zwischen den einzelnen Papieren bestehende Korrelation.

Nach diesen Überlegungen zu den alternativ möglichen Verlaufsformen der Portefeuillelinien können wir nun wieder zu der Frage zurückkehren, wie ein im Sinne des μ - σ -Prinzips risikoscheuer Anleger das für ihn optimale Portefeuille bestimmen kann. Wir betrachten dazu noch einmal die schon bekannten Wertpapiere A und B mit $\mu_A = 10$; $\sigma_A = 20$; $\mu_B = 20$; $\sigma_B = 40$ und nehmen an, für die Korrelation gelte gerade $\rho_{AB} = 0$. Die Portefeuillelinie hat dann das Ihnen schon bekannte Aussehen, das in Abb. 6 noch einmal wiedergegeben ist.

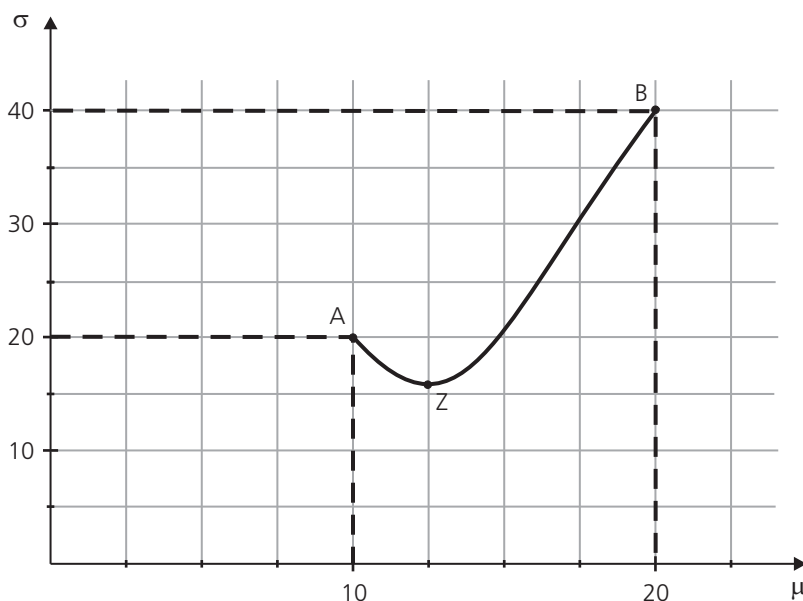


Abb. 6: Nicht effiziente und effiziente Portefeuilles

Zur weiteren Verdeutlichung sind in folgender Tabelle alle Portefeuilles verdeutlicht, in denen die Papiere A und B in „glatten Zehnerprozenten“ enthalten sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an, der Investor beschränke seine Analyse auf diesen Satz möglicher Portefeuilles.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_A	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	0%
x_B	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
μ_P	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
σ_P	20,0	18,4	17,9	18,4	20,0	22,4	25,3	28,6	32,2	36,1	40,0

Tab. 3: Nicht effiziente und effiziente Portefeuilles

Beschränkung auf
effiziente Portefeuilles

Zunächst erkennt man, dass solche Portefeuilles mit sehr hohen A-Anteilen, die in der Grafik durch Punkte auf dem fallenden Stück AZ der Portefeuillelinie verdeutlicht werden, auf keinen Fall als Optimalportefeuille in Frage kommen. Hier gibt es jeweils – durch Punkte im unteren Teil des Kurvenzuges ZB repräsentiert – Portefeuilles mit höherem B-Anteil, die bei gleichem σ -Wert einen höheren μ -Wert aufweisen. So wird etwa Portefeuille 1 mit $\mu_P = 10$ und $\sigma_P = 20$ durch Portefeuille 5 mit $\mu_P = 14$ und ebenfalls $\sigma_P = 20$ dominiert; entsprechendes gilt für die Beziehung zwischen Portefeuille 2 ($\mu_P = 11$; $\sigma_P = 18,4$) und Portefeuille 4 ($\mu_P = 13$; $\sigma_P = 18,4$). Nach dem **Effizienzkriterium** kommen also nur noch Portefeuilles als Optimum in Betracht, die durch Punkte auf dem **effizienten Teil** der Portefeuillelinie, also dem Kurvenstück ZB, verdeutlicht werden. In unserer tabellarischen Darstellung sind das die Portefeuilles 3 bis 11. Diese Eingrenzung des Entscheidungsfeldes gilt unabhängig vom näheren Aussehen der individuellen Präferenzen für jeden Anleger, sofern er nur risikoscheu im Sinne des μ - σ -Prinzips ist.

Die weitere Frage, welches der nach dieser Vorauswahl noch verbleibenden Portefeuilles als optimal anzusehen ist, hängt hingegen von den Präferenzen des Investors ab. Beschränkt er seine Betrachtungen auf die in Tab. 3 verdeutlichten Portefeuilles 3 bis 11, so könnte eine pragmatische Vorgehensweise wie folgt aussehen:

- Der Investor geht von dem risikoärmsten Portefeuille 3 aus und betrachtet zunächst den Übergang zu Portefeuille 4: Die damit verbundene Steigerung des μ -Wertes um einen Prozentpunkt (von 12 auf 13) müsste mit einer Erhöhung des σ -Wertes um 0,5 erkaufte werden (von 17,9 auf 18,4).
- Eine weitere Steigerung von μ um einen Prozentpunkt beim Übergang von Portefeuille 4 zu Portefeuille 5 „kostete“ dann schon eine σ -Zunahme um 1,6 (von 18,4 auf 20,0).

- Weitere Erhöhungen des μ -Wertes sind dann mit immer größeren Sprüngen von σ verbunden. Der „Preis“, mit dem die Steigerung des Erwartungswertes um einen weiteren Prozentpunkt „erkauft“ wird, nimmt also ständig zu.

Dem Investor könnte also empfohlen werden, die Portefeuilles 3, 4, 5, ... in dieser Weise sukzessive jeweils paarweise zu vergleichen, um herauszufinden, ab welchem Punkt eine weitere Steigerung des Erwartungswertes um einen Prozentpunkt angesichts der immer größer werdenden gleichzeitigen Zunahme von σ nach seinem subjektiven Empfinden nicht mehr „lohnt“.

Subjektive Bestimmung
des Optimalportefeuilles

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einen schon in Übungsaufgabe 4 aufgenommenen Gedanken etwas näher verfolgen und neben den Papieren A und B zusätzlich das ebenfalls schon bekannte Papier D mit den Werten $\mu_D = 15$; $\sigma_D = 40$ in die Betrachtung einbeziehen. Wir erinnern uns aus Abschnitt 1.2.2, dass dieses Papier in der Individualbetrachtung von Papier B dominiert wird, also als nicht effizient aussortiert werden kann, wenn die gesamte Anlagesumme ausschließlich in *ein* Wertpapier investiert werden soll.

Wir wollen jetzt etwas näher untersuchen, was sich an einer solchen Einschätzung ändert, wenn zusätzlich die Möglichkeit in die Betrachtung einbezogen wird, die Anlagesumme auf *zwei* Wertpapiere aufzuteilen. (Die sich selbstverständlich aufdrängende Möglichkeit, auch mehr als nur zwei Papiere in ein Portefeuille aufzunehmen, soll im Augenblick noch außer Betracht bleiben.) In Abb. 7 ist die Situation zunächst für den schon aus Übungsaufgabe 3 bekannten Fall dargestellt, dass alle drei Papiere zu 100% positiv miteinander korreliert sind, also $\rho_{AB} = \rho_{AD} = \rho_{BD} = 1$ gilt. Die Portefeuillelinien entsprechen in diesem Fall bekanntlich den Verbindungsgeraden zwischen den jeweiligen Ausgangspunkten A, B und D.

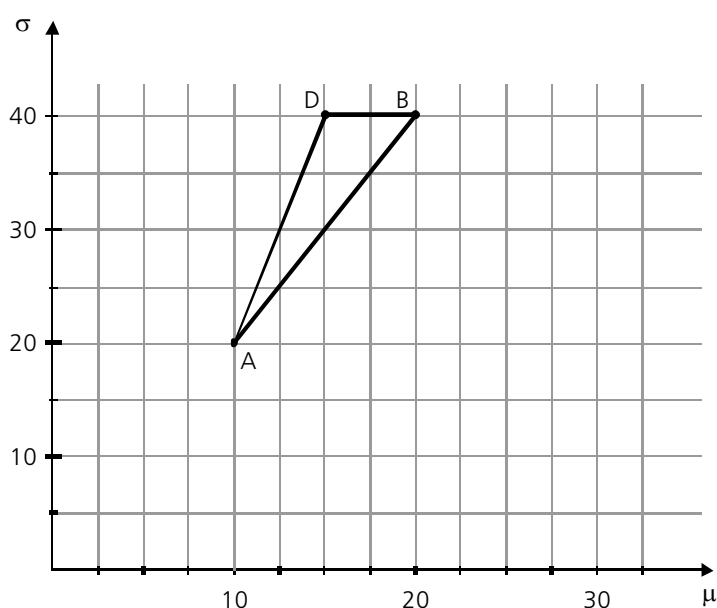


Abb. 7: Portefeuillelinien A, B, D (Fall 1)

Man erkennt, dass das Wertpapier D auch in dieser Konstellation mit Sicherheit **nicht** dem Optimalportefeuille angehören wird. Denn alle Portefeuilles, die den Punkten auf den Linienzügen AD oder DB entsprechen, werden stets durch „reine A-B-Portefeuilles bzw. die „reine B-Anlage“, also Portefeuilles, die durch Punkte auf dem Linienzug AB dargestellt werden, dominiert.

Anders verhält es sich hingegen, wenn wir der schon in Übungsaufgabe 4 betrachteten Annahme folgen, dass nach wie vor $\rho_{AB} = 1$, jedoch $\rho_{AD} = \rho_{BD} = 0$ gilt. Die Portefeuillelinien haben dann den in Abb. 8 wiedergegebenen Verlauf. Die μ -Achse ist in dieser Darstellung der besseren Anschaulichkeit wegen gestreckt dargestellt.

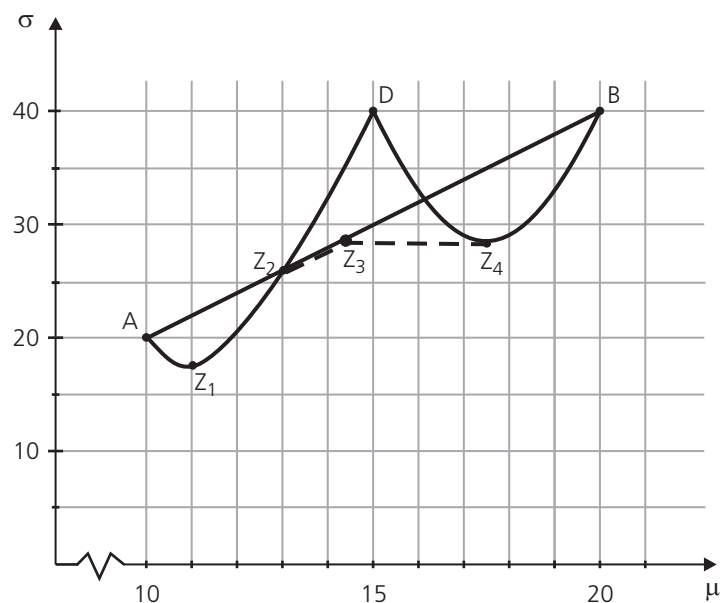


Abb. 8: Portefeuillelinien A, B, D (Fall 2)

	Reine A-B-Portefeuilles	A-D- und D-B-Portefeuilles	Reine A-B-Portefeuilles		A-D- und D-B-Portefeuilles		
			x_A	x_B	x_A	x_D	x_B
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
μ	σ						
10,00	20,0	20,0	100,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%
11,00	22,0	17,9	90,0%	10,0%	80,0%	20,0%	0,0%
12,00	24,0	20,0	80,0%	20,0%	60,0%	40,0%	0,0%
13,00	26,0	25,3	70,0%	30,0%	40,0%	60,0%	0,0%
13,16	26,3	26,3	68,4%	31,6%	36,8%	63,2%	0,0%
14,00	28,0	32,2	60,0%	40,0%	20,0%	80,0%	0,0%
14,15	28,3	–	58,5%	41,5%	–	–	–
15,00	30,0	40,0	50,0%	50,0%	0,0%	100,0%	0,0%
16,00	32,0	33,0	40,0%	60,0%	0,0%	80,0%	20,0%
17,00	34,0	28,8	30,0%	70,0%	0,0%	60,0%	40,0%
17,50	35,0	28,3	25,0%	75,0%	0,0%	50,0%	50,0%
18,00	36,0	28,8	20,0%	80,0%	0,0%	40,0%	60,0%
19,00	38,0	33,0	10,0%	90,0%	0,0%	20,0%	80,0%
20,00	40,0	40,0	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%

Tab. 4: Effiziente Portefeuilles bei drei Wertpapieren

Tab. 4 verdeutlicht die Grafik in ausgewählten Einzelpunkten numerisch. Die in Spalte (2) aufgeführten σ -Werte entsprechen der Geraden AB, die die „reinen A-B-Portefeuilles“ repräsentiert; die in Spalte (3) angegebenen σ -Werte kennzeichnen demgegenüber Portefeuilles aus A- und D- bzw. aus D- und B-Papieren. Die jeweiligen Anteile x_A , x_B bzw. x_A , x_B , x_D sind zur Orientierung in den Spalten (4) und (5) bzw. (6) bis (8) mit aufgeführt. Die grau unterlegten σ -Werte beziehen sich auf die vier in der Grafik eingezeichneten Hilfspunkte Z_1 bis Z_4 .

Der „effiziente Rand“ der abgebildeten Konstellation von drei Portefeuillelinien wird durch die beiden Linienzüge Z_1 , Z_2 , Z_3 sowie Z_4 B gebildet; dazwischen verbleibt eine Lücke. In Tab. 4 sind die Anteilswerte der einzelnen Effizienzbereiche jeweils durch entsprechende Rahmen markiert. Im Einzelnen ergibt sich folgendes Bild:

- Ein „reines“ A-Portefeuille ist ebenso ineffizient wie alle weiteren Portefeuilles mit „sehr hohen“ A-Anteilen.
- Gedanklich von dem nicht effizienten reinen A-Portefeuille ausgehend wird bei der durch Z_1 markierten Mischung $x_A = 80\%$, $x_D = 20\%$ das erste effiziente Portefeuille erreicht; dies ist mit $\sigma_p = 17,9$ zugleich das risikominimale aller realisierbaren Portefeuilles.

Analyse des
Effizienzbereichs

- Bis zu der durch Z_2 markierten Mischung $x_A = 36,8\%$, $x_D = 63,2\%$ mit $\mu_P = 13,16$ und $\sigma_P = 26,3$ bilden nur A-D-Mischungen die weiteren effizienten Portefeuilles.
- In dem durch die Punkte Z_2 und Z_3 gekennzeichneten Werteintervall zwischen $\mu_P = 13,16$ und $\mu_P = 14,15$ stellen dann bestimmte A-B-Mischungen die effizienten Portefeuilles dar.
- Portefeuilles mit Erwartungswerten zwischen $\mu_P = 14,15$ und $\mu_P = 17,5$ kommen dann auf keinen Fall als Optimum in Betracht, da es zu jedem dieser Portefeuilles eine durch einen Punkt auf dem Linienzug $Z_4 B$ gekennzeichnete D-B-Mischung gibt, die bei jeweils gleichem σ zu einem höheren μ -Wert führt.
- Die durch den Linienzug $Z_4 B$ verdeutlichte letzte Gruppe effizienter Portefeuilles resultiert dann aus D-B-Mischungen, wobei der B-Anteil mit wachsenden μ - und σ -Werten ständig zunimmt, bis mit der reinen B-Anlage das Portefeuille mit dem höchsten Erwartungswert, zugleich aber auch der höchsten Standardabweichung erreicht wird.

Insgesamt erfasst die Menge der effizienten Portefeuilles ganz überwiegend solche Portefeuilles, in denen das Wertpapier D enthalten ist, obwohl dieses Papier in der isolierten Einzelbetrachtung von Papier B dominiert wird. Die Erklärung für dieses auf den ersten Blick eventuell überraschende Phänomen liegt in den speziellen Annahmen über die bestehenden Korrelationsbeziehungen. So bleibt die 100%-ige D-Anlage wegen der „schlechten“ μ - σ -Kombination nach wie vor außer Betracht; angesichts der „günstigen“ Korrelationsbeziehungen zu den Papieren A und B kann das Papier in geeigneten Mischungen mit diesen beiden Papieren jedoch in mehr oder weniger starkem Umfang seine „risikosenkende“ Wirkung entfalten.

Übungsaufgabe 5:

Ein Investor will eine vorgegebene Anlagesumme in Aktien der FLORA AG (F) und der GLÜCKKAUF AG (G) anlegen. Er hält sieben verschiedene Börsenszenarien für möglich, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten er als gleich ansieht. Für diese sieben alternativ möglichen Szenarien rechnet er mit folgenden Renditen für die beiden Aktien:

Szenario	1	2	3	4	5	6	7
Rendite F	-18%	-3%	33%	10%	15%	23%	45%
Rendite G	8%	30%	16%	-4%	-8%	10%	4%

- a) Stellen Sie fest, in welcher Korrelation die Renditen der FLORA- und der GLÜCKKAUF-Aktien stehen!
- b) Bestimmen Sie die erwartete Rendite und die Standardabweichung für alle Portefeuilles, in denen F- und/oder G-Aktien zu „glatten 10%-Anteilen“ enthalten sind!
- c) Welche Portefeuilles gemäß b) würde ein Investor nur noch in Betracht ziehen, der im Sinne des μ - σ -Prinzips risikoscheu ist?

3 Portefeuilles aus mehr als zwei Wertpapieren

3.1 Portefeuillelinien und Portefeuilleflächen

Wie wir gesehen haben, können die μ - σ -Werte aller Portefeuilles, die durch die „Mischung“ von zwei Wertpapieren A und B entstehen können, durch eine Linie zwischen den Punkten gekennzeichnet werden, die die jeweiligen portefeuilleindividuellen μ - σ -Kombinationen verdeutlichen. Dabei verlaufen diese Portefeuillelinien im Allgemeinen mehr oder weniger stark bauchig.

Wie Sie im letzten Abschnitt ebenfalls schon gesehen haben, kann diese Darstellungsform selbstverständlich auch auf den Fall von mehr als zwei Wertpapieren übertragen werden. Abb. 9 zeigt noch einmal schematisch die drei Portefeuillelinien (AD, AB, DB), die im Fall von drei Wertpapieren bestehen.¹⁾ Jede dieser drei Portefeuillelinien verdeutlicht die μ - σ -Kombinationen für solche Portefeuilles, die jeweils nur aus zwei Wertpapieren (also A und B, A und D oder B und D) zusammengesetzt sind.

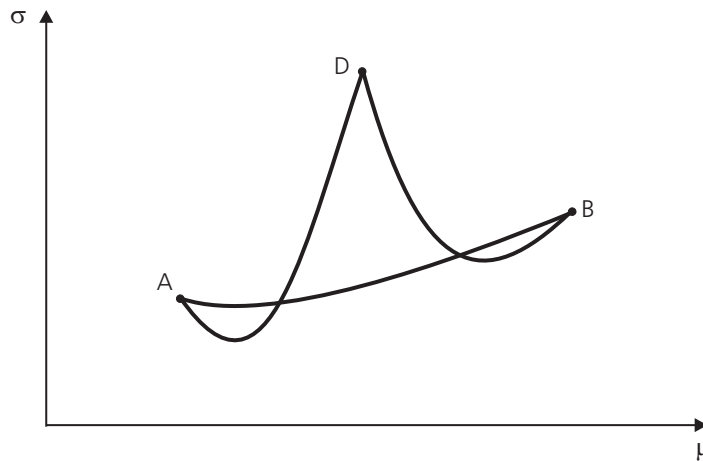


Abb. 9: Portefeuillelinien für 3 Wertpapiere

Primäre und sekundäre
Portefeuillelinien

Lässt man nun in Erweiterung unserer Betrachtungen im Abschnitt 2.4 auch die Möglichkeit zu, alle drei Wertpapiere *gleichzeitig* in das Portefeuille einzubeziehen, wird darüber hinaus eine Vielzahl weiterer μ - σ -Kombinationen realisierbar. Denn jedes beliebige, aus nur zwei Wertpapieren zusammengesetzte Portefeuille kann ja mit einem anderen Portefeuille „gemischt“ werden. Die dadurch zusätzlich erreichbaren μ - σ -Kombinationen können wiederum durch neue, „sekundäre“ Portefeuillelinien dargestellt werden.

1 Der Darstellung in dieser Abbildung liegen bewusst andere μ - σ -Werte für die drei Ausgangsportefeuilles zugrunde als den im Abschnitt 2.4 betrachteten Konstellationen.

Betrachten wir etwa die durch Mischung der Papiere A und D einerseits sowie D und B andererseits erzielbaren Portfeuille E und F in Abb. 10. Werden diese beiden Portfeuille nun untereinander gemischt, so können offensichtlich alle μ - σ -Kombinationen erreicht werden, die durch Punkte auf der sekundären Portfeuillelinie EF gekennzeichnet sind.

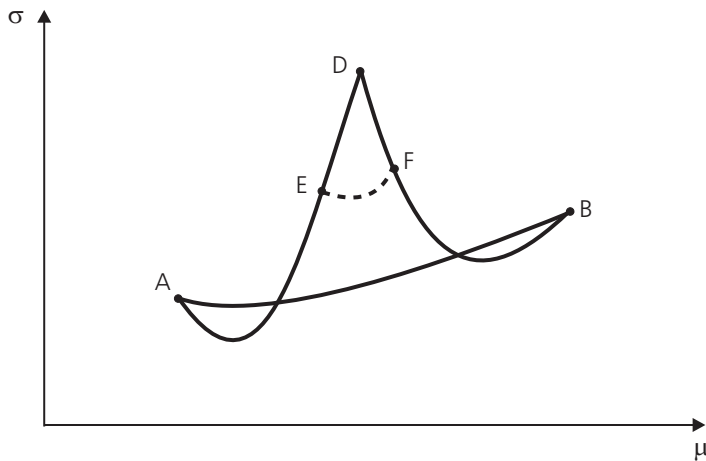


Abb. 10: Primäre und sekundäre Portfeuillelinien I

Für die auf diese Weise entstehenden Portfeuille aus jeweils drei Wertpapieren sind die Ihnen schon bekannten Formeln (P8) und (P9) wie folgt zu erweitern:

$$(P14) \quad \mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B + x_D \cdot \mu_D$$

$$(P15) \quad \sigma_P = \left[(x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 + (x_D \cdot \sigma_D)^2 \right. \\ \left. + 2 \cdot (x_A \cdot \sigma_A) \cdot (x_B \cdot \sigma_B) \cdot \rho_{AB} + 2 \cdot (x_A \cdot \sigma_A) \cdot (x_D \cdot \sigma_D) \cdot \rho_{AD} \right. \\ \left. + 2 \cdot (x_B \cdot \sigma_B) \cdot (x_D \cdot \sigma_D) \cdot \rho_{BD} \right]^{0,5}.$$

Dabei ist jeweils zu beachten, dass

$$x_A, x_B, x_D \geq 0 \quad \text{und} \quad x_A + x_B + x_D = 1$$

gilt.

μ - σ -Werte für Portfeuille aus drei Wertpapieren

Beispiel 10:

Wir betrachten noch einmal die Aktien A, B und D mit den Parameterwerten $\mu_A = 10$; $\sigma_A = 20$; $\mu_B = 20$; $\sigma_B = 40$; $\mu_D = 15$; $\sigma_D = 40$ sowie $\rho_{AB} = 1$ und $\rho_{AD} = \rho_{BD} = 0$. Die aus A und D bzw. B und D bestehenden „reinen Zweier-Portefeuilles“ schlagen sich grafisch durch die schon aus Abb. 8 bekannten Portefeuillelinien AD und DB nieder, die in Abb. 11 noch einmal wiedergegeben sind.

Weiterhin wählen wir mehr oder weniger willkürlich zwei Portefeuilles E und F aus, für die gelten soll: $x_A = 30\%$; $x_D = 70\%$ bzw. $\hat{x}_B = 40\%$; $\hat{x}_D = 60\%$.

Für die zugehörigen μ - und σ -Werte ergibt sich

$$\mu_E = 0,3 \cdot 10 + 0,7 \cdot 15 = 13,5$$

$$\sigma_E = \sqrt{(0,3 \cdot 20)^2 + (0,7 \cdot 40)^2} = 28,6$$

$$\mu_F = 0,4 \cdot 20 + 0,6 \cdot 15 = 17,0$$

$$\sigma_F = \sqrt{(0,4 \cdot 40)^2 + (0,6 \cdot 40)^2} = 28,8$$

In Abb. 11 finden sich die entsprechenden Markierungen.

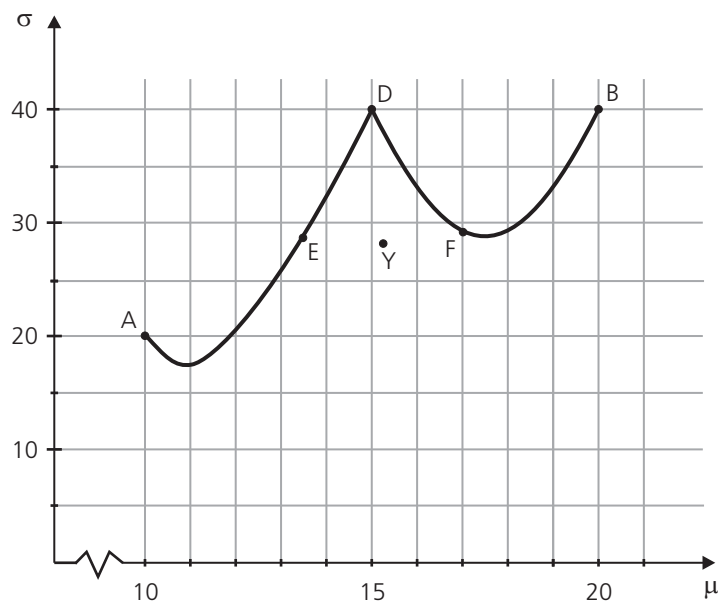


Abb. 11: A-D-B-Portefeuillelinie und sekundäre Portefeuilles

Die so definierten Portefeuilles E und F können nun zum Ausgangspunkt für weitere „Mischungen“ genommen werden. Für die Anteile x'_A , x'_B und x'_D in einer 50:50-Mischung aus E und F würde etwa gelten:

$$x'_A \hat{=} 0,5 \cdot 30\% = 15\%$$

$$x'_B \hat{=} 0,5 \cdot 40\% = 20\%$$

$$x'_D \hat{=} 0,5 \cdot 70\% + 0,5 \cdot 60\% = 65\%$$

Für die zugehörigen μ - und σ -Werte ergibt sich dann:

$$\mu' = 0,15 \cdot 10 + 0,2 \cdot 20 + 0,65 \cdot 15 = 15,25$$

$$\sigma' = \sqrt{(0,15 \cdot 20)^2 + (0,2 \cdot 40)^2 + (0,65 \cdot 40)^2 + 2 \cdot (0,15 \cdot 20) \cdot (0,2 \cdot 40)} = 28,2$$

Das so definierte „Sekundärportfeuille“ wird in Abb. 11 durch den Punkt Y verdeutlicht. Es liegt nahe, dass Änderungen des Mischungsverhältnisses von E und D über entsprechende Modifikationen der x'_A -, x'_B - und x'_D -Werte zu einer Vielzahl weiterer Portfeuillees führen, die im Endeffekt durch eine neue, sekundäre Portfeuillelinie zwischen den Punkten E und F verdeutlicht werden können. Die folgende Übungsaufgabe gibt Ihnen Gelegenheit, diesen Aspekt selbst etwas zu vertiefen.

Übungsaufgabe 6:

Gehen Sie von den in Beispiel 10 betrachteten Portfeuillees E und F aus!

- Bestimmen Sie für die beiden aus E und F im Verhältnis 80:20 bzw. 20:80 gemischten Sekundärportfeuillees die μ - und σ -Werte!
- Bestimmen Sie das Mischverhältnis zwischen E und F, bei dem der kleinste σ -Wert erreicht wird. Bestimmen Sie das Aussehen dieses Portfeuillees!

Führt man die soeben verdeutlichten Gedanken weiter, so wird deutlich, dass bei der Zusammenstellung eines Portfeuillees aus drei Wertpapieren offensichtlich noch eine sehr große Zahl von μ - σ -Kombinationen erreichbar ist, die im μ - σ -Diagramm durch Punkte zu kennzeichnen sind, die nicht auf einer der primären Portfeuilleelinien liegen, also μ - σ -Kombinationen, die bei der Beschränkung auf Portfeuillees aus jeweils nur zwei Wertpapieren gar nicht realisierbar wären. Dabei sind zum einen μ - σ -Kombinationen erreichbar, die durch Punkte *innerhalb* des durch die primären Portfeuilleelinien eingeschlossenen Bereiches gekennzeichnet sind, so z.B. die durch die sekundäre Portfeuilleelinie EF gekennzeichneten Portfeuillees.

Von größerem Interesse ist jedoch die Möglichkeit, auch μ - σ -Kombinationen *außerhalb* dieses Bereiches zu erreichen, so wie das in Abb. 12 für etliche weitere „Mischungen“ schematisch verdeutlicht wird.

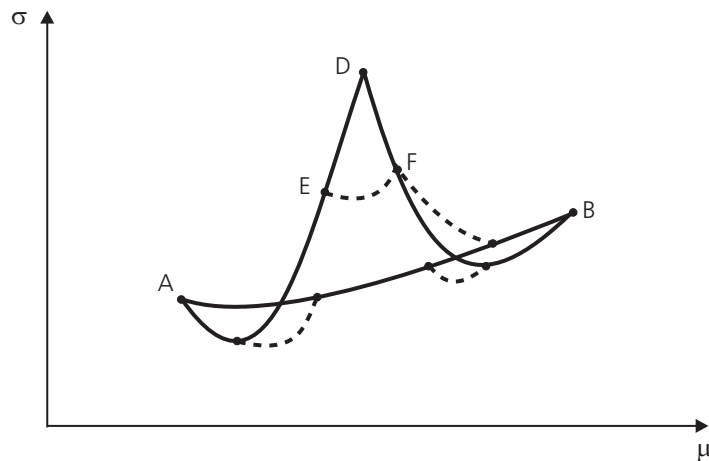


Abb. 12: Primäre und sekundäre Portfeuillelinien II

Bildet man in dieser Weise alle nur denkbaren Kombinationen der drei Wertpapiere A, B und D grafisch ab, so ergibt sich ein geometrisches Gebilde der in Abb. 13 gezeigten Art, das wir als die **Portfeuillefläche** bezeichnen wollen.¹⁾

Portfeuilleflächen

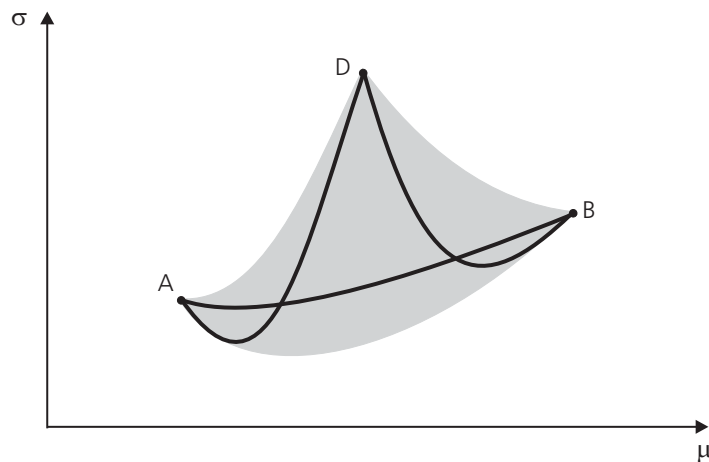


Abb. 13: Portfeuillefläche

Rand der
Portfeuillefläche

Ein ähnliches Gebilde ergibt sich auch, wenn eine größere Zahl von Wertpapieren in die Betrachtung einbezogen wird: Der untere Rand der Portfeuillefläche verläuft stets glatt und mehr oder weniger stark nach unten gewölbt; der obere Rand umfasst mehrere bogenförmige Zacken.

1 Die primären Portfeuillelinien liegen zum Teil innerhalb dieser Fläche, teils bilden sie deren Rand.

3.2 Effiziente Portefeuilles

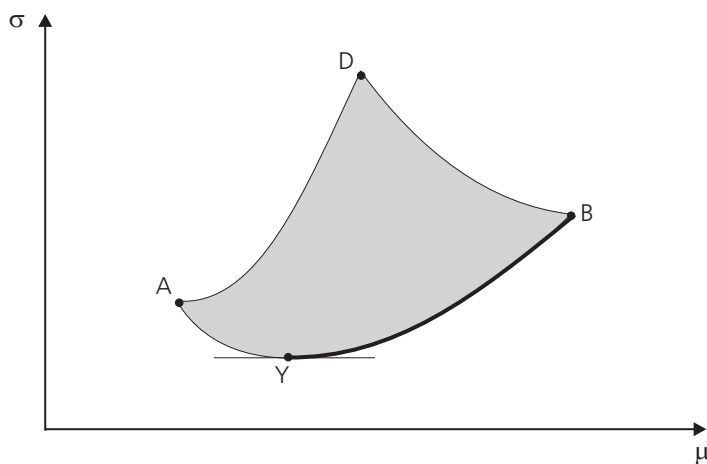
Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, dass dem Anleger grundsätzlich viele verschiedene Portefeuilles zur Auswahl stehen; jeder Punkt innerhalb der Portefeuillefläche und auf deren Rand verdeutlicht ja eine Anlagealternative.

Für einen Anleger, der in dem eingangs beschriebenen Sinne risikoscheu eingestellt ist, reduziert sich die Menge der überhaupt nur in Betracht zu ziehenden Portefeuilles allerdings drastisch. Für ihn sind nämlich nur noch die Portefeuilles relevant, die durch einen Punkt auf dem ansteigenden Teil des unteren Randes der Portefeuillefläche verdeutlicht werden. Alle übrigen Portefeuilles

- führen entweder bei gleich hohem oder niedrigerem Erwartungswert zu einer höheren Standardabweichung oder
- weisen bei gleicher oder höherer Standardabweichung einen niedrigeren Erwartungswert auf.

Effizienter Rand
der Portefeuillefläche

Entscheidungsrelevant sind also nur noch die **effizienten Portefeuilles**, die durch Punkte auf dem sogenannten **effizienten Rand** der Portefeuillefläche verdeutlicht werden. In Abb. 14 verläuft der effiziente Rand (auch einfach Effizienzlinie genannt) von dem Minimum des unteren Randes im Punkt Y bis zu dessen oberer Grenze im Punkt B.



Effizienter Rand

Abb. 14: Portefeuillefläche und effizienter Rand

Die konkrete Berechnung des effizienten Randes gestaltet sich rechnerisch etwas aufwendig, ist jedoch ohne sonderliche mathematische Probleme möglich. Sie setzt im Fall von n Aktien allerdings voraus, dass

- n wertpapierindividuelle Erwartungswerte,
- n wertpapierindividuelle Standardabweichungen und
- $(n-1) \cdot n/2$ Korrelationskoeffizienten zwischen allen Wertpapierpaaren

bekannt sind.

Für ein Portefeuille auf der Basis der 30 DAX-Werte etwa benötigt man also je 30 Erwartungswerte und Standardabweichungen sowie immerhin schon 435 Korrelationskoeffizienten. Die moderne Datenerfassungs- und -verarbeitungstechnik ermöglicht es inzwischen jedoch, Probleme in praktisch relevanten Größenordnungen anzugehen, die zur Zeit der Entwicklung des MARKOWITZ-Modells als faktisch unlösbar anzusehen waren. Liegen die benötigten Daten jedoch einmal vor, so besteht eine pragmatische Möglichkeit, den effizienten Rand wenn auch nicht durch ein Funktionsgesetz, so jedoch in einzelnen Punkten zu ermitteln, in folgendem Vorgehen:

Punktweise
Bestimmung des
effizienten Randes

- Von dem Wertpapier mit dem niedrigsten μ -Wert ausgehend wird Schritt für Schritt ein etwas höherer μ -Wert vorgegeben, wobei die Schrittweite von einem zum nächsten μ -Wert im Prinzip beliebig fein (z.B. in 0,2 %-Punkt-Werten) oder grob (z.B. in 2,5 %-Punkt-Werten) gewählt werden kann.
- Für den jeweils vorgegebenen μ -Wert wird dann auf der Basis eines quadratischen Rechenansatzes (und unter Beachtung der Nicht-Negativitäts-Bedingung für alle x -Werte) der kleinstmögliche σ -Wert bestimmt.
- Je nachdem, wie klein man die Abstände zwischen den sukzessive vorgegebenen μ -Werten hält, kann der effiziente Rand auf diese Weise mit praktisch beliebiger Genauigkeit durch eine Punktfolge bestimmt werden.

Das folgende Beispiel verdeutlicht das Grundkonzept einer solchen pragmatischen und auch durchaus praktikablen Vorgehensweise.

Beispiel 11:

Wir betrachten die drei Aktien A, B und D in der schon bekannten Konstellation ($\mu_A = 10$; $\sigma_A = 20$; $\mu_B = 20$; $\sigma_B = 40$; $\mu_D = 15$; $\sigma_D = 40$; $\rho_{AB} = 1$; $\rho_{AD} = \rho_{BD} = 0$) und nehmen an, der Investor beschränke seine Überlegungen auf alle Portefeuilles, in denen die drei Papiere in „glatten Zehnerprozentsätzen“ enthalten sind.

In diesem Fall können aus den drei Wertpapieren insgesamt die 66 verschiedenen Portefeuilles gebildet werden, die im Anhang P₄ näher dargestellt sind. In der ersten Tabelle sind rein kombinatorisch alle x_A - x_B - x_D -Kombinationen zusammengestellt und die nach (P14) bzw. (P15)

ermittelten μ_P - und σ_P -Werte der entsprechenden Portefeuilles angegeben. In der zweiten Tabelle sind diese Datensätze nach der Höhe des Erwartungswertes und in zweiter Linie nach der Höhe der Standardabweichung umsortiert worden.

Abgesehen von den „Randportefeuilles“ mit $\mu_P = 10$, $\mu_P = 10,5$ sowie $\mu_P = 19,5$ und $\mu_P = 20$ können die dazwischen liegenden μ_P - und σ_P -Werte jeweils über verschiedene Anteilskombinationen erreicht werden. So führen etwa die vier in der Tabelle grau unterlegten „Mischungen“ ($x_A = 10\%$; $x_B = 50\%$; $x_D = 40\%$), ($x_A = 0\%$; $x_B = 40\%$; $x_D = 60\%$), ($x_A = 20\%$; $x_B = 60\%$; $x_D = 20\%$) sowie ($x_A = 30\%$; $x_B = 70\%$; $x_D = 0\%$) übereinstimmend zu einem Erwartungswert von $\mu_P = 17\%$; die dabei erzielbaren Standardabweichungen variieren jedoch zwischen dem Minimalwert von $\sigma_P = 27,20$ für das erstgenannte Portefeuille und $\sigma_P = 34,00$ für die letzte der vier Mischungen. Offenbar kommt von diesen vier Portefeuilles mit gleichem Erwartungswert für die weiteren Betrachtungen nur noch das mit dem niedrigsten σ -Wert in Betracht; die übrigen drei können nach dem Effizienzkriterium ausgeschlossen werden. Auf diese Weise lässt sich die Gesamtheit der 66 im Anhang P₄ aufgeführten Portefeuilles auf die 21 Portefeuilles reduzieren, die in Tab. 5 zusammengestellt sind.

	A-B-D-Portefeuilles			μ	σ
	x_A	x_B	x_D		
(1)	100,0%	0,0%	0,0%	10,00	20,00
(2)	90,0%	0,0%	10,0%	10,50	18,44
(3)	80,0%	0,0%	20,0%	11,00	17,89
(4)	70,0%	0,0%	30,0%	11,50	18,44
(5)	70,0%	10,0%	20,0%	12,00	19,70
(6)	60,0%	10,0%	30,0%	12,50	20,00
(7)	50,0%	10,0%	40,0%	13,00	21,26
(8)	50,0%	20,0%	30,0%	13,50	21,63
(9)	40,0%	20,0%	40,0%	14,00	22,63
(10)	40,0%	30,0%	30,0%	14,50	23,32
(11)	30,0%	30,0%	40,0%	15,00	24,08
(12)	30,0%	40,0%	30,0%	15,50	25,06
(13)	20,0%	40,0%	40,0%	16,00	25,61
(14)	20,0%	50,0%	30,0%	16,50	26,83
(15)	10,0%	50,0%	40,0%	17,00	27,20
(16)	0,0%	50,0%	50,0%	17,50	28,28
(17)	0,0%	60,0%	40,0%	18,00	28,84
(18)	0,0%	70,0%	30,0%	18,50	30,46
(19)	0,0%	80,0%	20,0%	19,00	32,98
(20)	0,0%	90,0%	10,0%	19,50	36,22
(21)	0,0%	100,0%	0,0%	20,00	40,00

Tab. 5: Approximation des effizienten Randes

Von diesen Portefeuilles können allerdings die ersten beiden nach dem Effizienzkriterium ebenfalls aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden, da sie von Portefeuille (3) dominiert werden; dieses hat einen höheren Erwartungswert und zugleich eine niedrigere Standardabweichung. Die Bestimmung des optimalen Portefeuilles reduziert sich somit letztlich auf die Beurteilung der 19 Portefeuilles (3) bis (21).

Die Beschränkung auf Portefeuilles mit „glatten 10%-Anteilen“ bringt es allerdings mit sich, dass die in Tab. 5 aufgeführten Portefeuilles streng genommen in aller Regel auch noch nicht effizient sind. Bei „krummen“ Anteilswerten können nämlich bei jeweils gegebenen Erwartungswerten noch niedrigere σ -Werte erreicht werden. Mit Hilfe der seit langem verfügbaren Verfahren der quadratischen Programmierung ist es jedoch möglich, für jeden vorgegebenen μ -Wert das Portefeuille mit dem effektiv niedrigsten σ -Wert mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. So führt etwa bei $\mu_P = 15,0$ das Portefeuille ($x_A = 32\%$; $x_B = 32\%$; $x_D = 36\%$) mit $\sigma_P = 24,0\%$ zu einer Standardabweichung, die knapp unter dem in Tab. 5 für das „glatte“ Portefeuille ($x_A = 30\%$; $x_B = 30\%$; $x_D = 40\%$) ermittelten Wert von $\sigma_P = 24,08\%$ liegt.

Lässt man schließlich wieder beliebige Stückelungen der Anteilswerte zu, so kann unser Beispielfall selbstverständlich auch in der bekannten Weise grafisch verdeutlicht werden, wie dies die Abb. 15 zeigt. Die schon aus Abb. 14 bekannten Linienzüge AD, AB und DB geben die primären Portefeuillelinien wieder; die Punkte Z_1 und Z_4 markieren die Minima der Kurven AD und DB. Der außerdem eingezeichnete Linienzug $Z_5 Z_6$ verdeutlicht die effizienten Portefeuilles, die zusätzlich zu den zunächst nur betrachteten „Zweier-Mischungen“ dadurch realisiert werden können, dass alle drei Wertpapiere in der jeweils am besten geeigneten Weise zu einem Portefeuille zusammengestellt werden. Diese „neue“ Linie beginnt knapp rechts vom Minimum des Linienzuges AD in Z_1 und endet ebenfalls knapp rechts neben dem Minimum des Linienzuges DB in Z_4 .

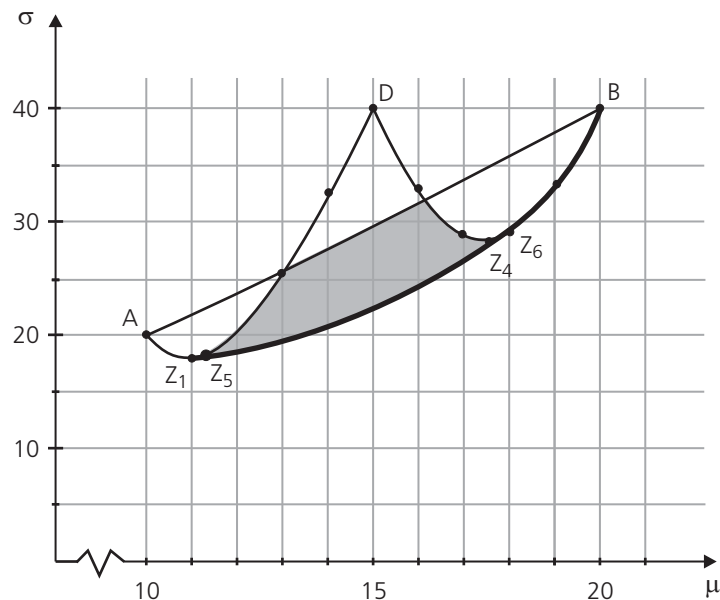


Abb. 15: Portefeuillelinien A, B, D (Fall 2)

Übungsaufgabe 7:

Überprüfen Sie den letzten Teil der Aussage zum Verlauf des effizienten Randes selbst. Ermitteln Sie dazu zunächst die x_B , x_D , μ , und σ -Werte des Punktes Z_4 . Bestimmen Sie anschließend das aus den Wertpapieren A, B und D zusammengesetzte Portefeuille, das bei identischem μ -Wert mit dem Z_4 entsprechenden Portefeuille zu dem minimalen σ -Wert führt. Kommentieren Sie Ihr Ergebnis im Hinblick auf den Verlauf des effizienten Randes!

3.3 Effiziente Portefeuilles bei einer zusätzlichen sicheren Anlagealternative

Die bislang abgeleiteten Ergebnisse bedürfen gewisser Modifikationen, wenn neben der Anlage in Aktien auch noch die Möglichkeit zum Erwerb eines risikolosen Wertpapiers, z. B. einer einjährigen Staatsanleihe, besteht. Betrachten wir zunächst nur Mischungen aus

- einer Aktie A mit den Kennzahlen μ_A und σ_A und
- einem sicheren Wertpapier S, das sich zu $r\%$ verzinst, also die Kennzahlen $\mu_S = r$ und $\sigma_S = 0$ aufweist.

Beachtet man, dass Kovarianz und Korrelationskoeffizient zwischen einem risikobehafteten und einem risikolosen Wertpapier zwangsläufig den Wert Null aufweisen, so erkennt man analog zu den im Abschnitt 2.3, insbesondere unter (3), angestellten Überlegungen, dass für Erwartungswert und Standardabweichung eines aus A und S gemischten Portefeuilles einfach folgende lineare Beziehungen gelten:

$$(P16) \quad \mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_S \cdot r \quad \text{mit } x_A + x_S = 1$$

$$(P17) \quad \sigma_P = x_A \cdot \sigma_A$$

Daraus folgt aber sofort weiter, dass die Portefeuillelinie, die durch Mischungen aus A und S im μ - σ -Diagramm verdeutlicht wird, eine Gerade darstellt, die

- die μ -Achse im Punkt $\mu = r$ schneidet und
- durch den Punkt μ_A, σ_A verläuft.

Portefeuillegerade
bei sicherer Anlage-
möglichkeit

Beispiel 12:

Wir greifen auf die bereits aus dem Beispiel 4 bekannte Aktie A mit $\mu_A = 10$ und $\sigma_A = 20$ zurück. Weiterhin sei unterstellt, dass eine sichere Anlage S zu 6% möglich sei.

Betrachten wir nun die aus A und S zusammengestellten Portefeuilles, in denen der Anteil der sicheren Anlagemöglichkeit (1) 0%, (2) 20%, (3) 50%, (4) 80% bzw. (5) 100% beträgt, so ergeben sich dafür folgende μ - σ -Kombinationen:

$\mu_1 = 10\%$	$\sigma_1 = 20\%$
$\mu_2 = 9,2\%$	$\sigma_2 = 16\%$
$\mu_3 = 8\%$	$\sigma_3 = 10\%$
$\mu_4 = 6,8\%$	$\sigma_4 = 4\%$
$\mu_5 = 6\%$	$\sigma_5 = 0\%$

Zeichnet man diese fünf μ - σ -Kombinationen in ein Diagramm ein, so sieht man, dass alle auf einer Geraden zwischen den Punkten S ($\mu = 6$; $\sigma = 0$) und A ($\mu = 10$; $\sigma = 20$) liegen (vgl. Abb. 16).

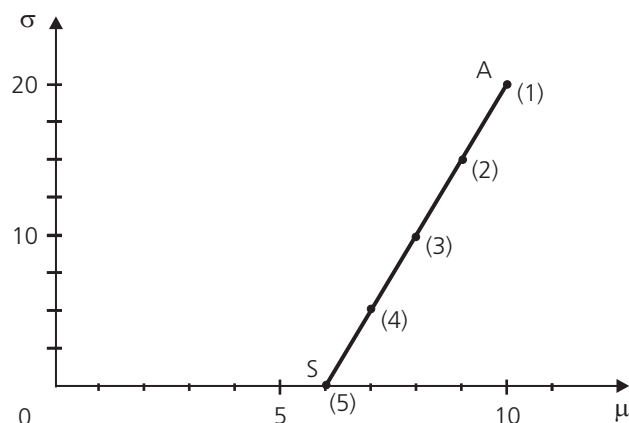
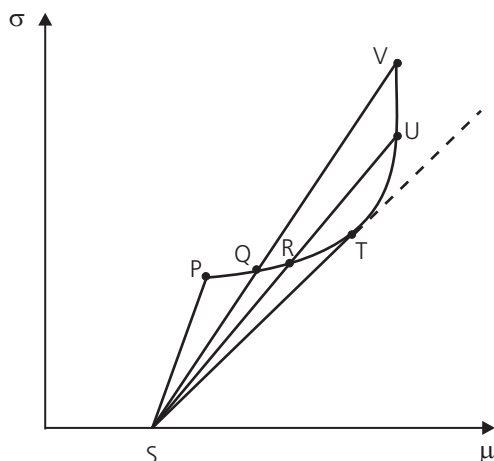


Abb. 16: Portfeuillelinie bei einer Aktie und einer sicheren Anlageform

Beispiel für eine
Portfeuillegerade

Selbstverständlich lassen sich alle nur denkbaren, ihrerseits bereits aus mehreren Wertpapieren bestehenden, Portefeuilles in der geschilderten Weise mit der sicheren Anlagealternative kombinieren, wobei jede dieser Kombinationsmöglichkeiten wiederum jeweils durch eine Portfeuillegerade verdeutlicht werden kann. Beschränken wir unsere Betrachtungen auf Kombinationen im bisherigen Sinne *effizienter* Portefeuilles mit der sicheren Anlagealternative, so lassen sich diese Zusammenhänge grafisch durch eine Darstellung nach Art von Abb. 17 verdeutlichen, in der der Kurvenzug PV den bisherigen effizienten Rand darstellen soll und die einzelnen Punkte P bis V einige beliebig herausgegriffene effiziente Portefeuilles.



Schar von
Portefeuillegeraden

Abb. 17: Effiziente Portefeuilles bei einer sicheren Anlagealternative

Wird nun etwa das Portefeuille R mit der sicheren Alternative (Punkt S in Abb. 17) kombiniert, so können auf diese Weise alle μ - σ -Kombinationen realisiert werden, denen Punkte auf der (sekundären) Portefeuillegeraden SR entsprechen. Das Analoge gilt für alle übrigen Portefeuilles von P bis V und darüber hinaus auch für alle sonstigen Portefeuilles.

Vergleichen wir nun beispielsweise die Portefeuillegeraden SP und SR, so erkennen wir, dass sich für jeden beliebigen μ -Wert, der durch Kombinationen von Portefeuille P und der sicheren Alternative S erreichbar ist, ein höheres Risiko ergibt, als wenn die gleiche Renditeerwartung durch eine Kombination von R und S realisiert wird. Alle Kombinationen R/S sind den Kombinationen P/S also eindeutig vorzuziehen. In ähnlicher Weise sind alle Kombinationen U/S den Kombinationen V/S oder die Kombinationen R/S den Kombinationen Q/S vorzuziehen. Ganz allgemein ist die Kombination eines Portefeuilles mit der sicheren Anlagealternative als umso günstiger zu beurteilen, je *flacher* die zugehörige Portefeuillegerade verläuft. Wir suchen somit das Portefeuille, das in Kombination mit der sicheren Anlage zu der am flachsten verlaufenden (sekundären) Portefeuillegeraden führt.

Aus all dem folgt, dass es für den Fall, dass überhaupt Kombinationen von einem Aktienportefeuille und der sicheren Alternative in Betracht gezogen werden, eindeutig am günstigsten ist, ausschließlich Kombinationen mit dem Portefeuille T vorzunehmen, also mit dem Portefeuille, dessen Portefeuillelinie gerade die *Tangente* an die Effizienzlinie darstellt. Man bezeichnet dieses Portefeuille deshalb auch als **Tangentialportefeuille**.¹⁾

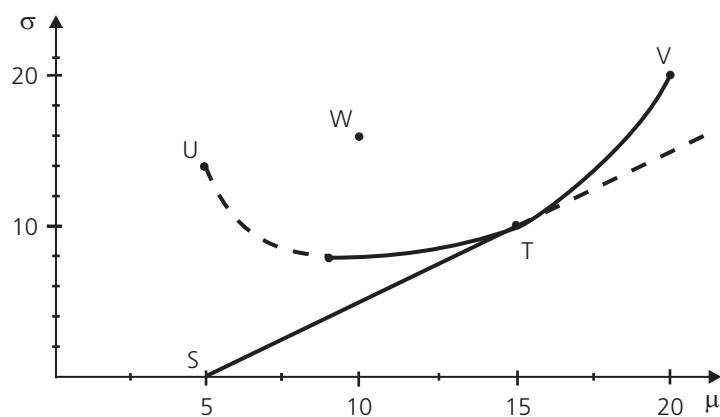
Tangentialportefeuille

1 Punkte auf der Verlängerung der Tangente über den Punkt T hinaus sind nicht realisierbar, da in diesem Kapitel die Kreditaufnahme zum risikolosen Zinssatz r ausgeschlossen ist.

Weiterhin wird deutlich, dass die durch Punkte auf dem Abschnitt PT der ursprünglichen Effizienzlinie gekennzeichneten Portefeuilles unter Einbeziehung der sicheren Anlagealternative nun gar nicht mehr effizient sind. An ihre Stelle treten jetzt vielmehr die alternativ möglichen Mischungen zwischen sicherer Alternative und dem Tangentialportefeuille. Die modifizierte Effizienzlinie wird jetzt also durch den Linienzug STV dargestellt. Die folgende Übungsaufgabe gibt Ihnen Gelegenheit, sich mit den Eigenheiten des soeben vorgestellten Konzeptes selbst etwas näher zu beschäftigen.

Übungsaufgabe 8:

Folgende Grafik verdeutlicht die Situation eines Anlegers, dem neben der sicheren Anlage S diverse Aktien, darunter die Aktie U (mit $\mu_U = 5$ und $\sigma_U = 14$), V (mit $\mu_V = 20$ und $\sigma_V = 20$) sowie W (mit $\mu_W = 10$ und $\sigma_W = 16$) zur Auswahl stehen.



Das Tangentialportefeuille setzt sich aus den Aktien U, V, und W zusammen und werde durch die Werte ($x_U = 30\%$; $x_V = 65\%$; $x_W = 5\%$) sowie $\mu_P = 15$ und $\sigma_P = 10$ bestimmt.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Portefeuillegeraden ST!
- b) Geben Sie die Anteilswerte (x_U , x_V , x_W , x_S) sowie die zugehörigen μ - und σ -Werte für die bei

- (1) $\mu_P = 5\%$
- (2) $\mu_P = 10\%$
- (3) $\mu_P = 15\%$
- (4) $\mu_P = 20\%$

jeweils effizienten Portefeuilles an!

3.4 Optimale Portefeuilles

Bei *gegebenen* Daten (Erwartungswerten, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten) stellt die Ableitung des Tangentialportefeuilles und der Effizienzlinie ein Rechenproblem dar, das mit objektiver Richtigkeit gelöst werden kann. Das heißt, wenn zwei Anleger in ihren Erwartungen übereinstimmen, werden die ihnen zur Auswahl stehenden effizienten Anlagemöglichkeiten durch eine identische Effizienzlinie verdeutlicht. Unterschiede in der persönlichen Risikoeinstellung spielen dabei keine Rolle.

Derartige subjektive Präferenzen sind jedoch dann von ausschlaggebender Bedeutung, wenn es darum geht, aus der Gesamtheit der effizienten Portefeuilles das letztlich optimale herauszusuchen. Ein pragmatisches Konzept, dieses Optimierungsproblem zu lösen, haben Sie schon im Abschnitt 2.4 kennengelernt. Die dort lediglich für Portefeuilles aus zwei Aktien verdeutlichte Möglichkeit, den effizienten Rand – bildlich gesprochen – „in kleinen Schritten abzuschreiten“, kann selbstverständlich auch auf die Beurteilung von Portefeuilles aus einer größeren Zahl von Aktien angewandt werden. In beiden Fällen geht es letztlich ja nur darum, sukzessive Erhöhungen des μ -Wertes mit der damit zwangsläufig verbundenen Steigerung von σ zu vergleichen, um so das nach dem eigenen subjektiven Ermessen optimale Chancen-Risiko-Verhältnis zu erreichen.

Subjektivität des
Optimalitätsbegriffs

Daneben finden bei der praktischen Umsetzung portefeuilletheoretischer Modellsätze – soweit erkennbar – gelegentlich zwei noch einfachere Konzepte Anwendung, die zum Abschluss kurz dargestellt werden sollen.

Zum einen besteht die Möglichkeit,

- einen Mindestwert $\hat{\mu}$ für die Renditeerwartung vorzugeben und
- aus allen Portefeuilles, deren Renditeerwartung diesen Mindestwert erreicht oder übersteigt, dasjenige mit dem geringsten Risiko herauszusuchen.

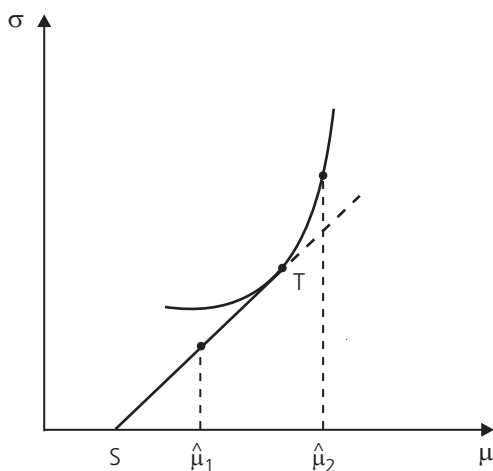


Abb. 18: Optimalportefeuilles bei Risikominimierung

Bedingte
Risikominimierung

Diese Zielfunktion sieht also die **Risikominimierung** und Einhaltung einer subjektiv vorgegebenen **Mindest-Renditeerwartung** vor. Wie Abb. 18 verdeutlicht, läuft dieser Ansatz formal darauf hinaus, auf der Effizienzlinie den Punkt zu bestimmen, der der vorgegebenen Mindest-Renditeerwartung $\hat{\mu}$ entspricht.

Dabei ist es möglich, dass der Optimalpunkt auf dem linearen Teilstück ST der Effizienzlinie liegt, das Optimalportefeuille also eine Mischung aus der sicheren Anlageform und dem Tangentialportefeuille darstellt ($\hat{\mu}_1$ in Abb. 18). Mit dieser Konstellation ist um so mehr zu rechnen, je niedriger die Renditevorgabe $\hat{\mu}$ angesetzt wird. Bei hinlänglich hohen Werten für $\hat{\mu}$ liegt der Optimalpunkt hingegen auf dem gekrümmten Abschnitt der Effizienzlinie. Das optimale Portefeuille enthält dann nur risikobehaftete Wertpapiere ($\hat{\mu}_2$ in Abb. 18).

Ein zweites einfaches Zielkonzept besteht darin,

- einen Höchstwert $\hat{\sigma}$ für das maximal tolerierbare Portefeullerisiko vorzugeben und
- unter allen Portefeuilles, deren Standardabweichung diesen Maximalwert nicht übersteigt, dasjenige mit der höchsten Renditeerwartung auszuwählen.

Bedingte
Renditemaximierung

Formal läuft diese Zielfunktion darauf hinaus, auf der Effizienzlinie den Punkt zu bestimmen, der der Risikovorgabe $\hat{\sigma}$ entspricht. Dabei wird dieser Punkt ebenfalls bei niedrigen $\hat{\sigma}$ -Werten auf dem linearen und bei hohen $\hat{\sigma}$ -Werten auf dem gekrümmten Abschnitt der Effizienzlinie liegen.

Im jeweils ersten Fall, wenn also das Optimalportefeuille durch einen Punkt auf dem linearen Teilstück ST verdeutlicht werden kann, wird ein Teil des Anlagebetrages in dem Tangentialportefeuille T, also einem Portefeuille unsicherer Wertpapiere angelegt, dessen Zusammensetzung unabhängig von den subjektiven Risikopräferenzen des jeweiligen Anlegers ist. In welchen Anteilen das Gesamtportefeuille jedoch dieses Tangentialportefeuille einerseits und die sichere Anlage andererseits umfasst, ist eine Frage der subjektiven Einstellung.

Übungsaufgabe 9:

Gehen Sie von den Daten und der Lösung der Übungsaufgabe 8 aus!

Bestimmen Sie jeweils das Aussehen des optimalen Portefeuilles für einen Anleger, dessen Zielfunktion

- (1) max: μ
- (2) min: σ
- (3) max: $\mu / \sigma \leq 4$
- (4) min: $\sigma / \mu \geq 13$

lautet!

Anhang P₀: Herleitung von Relation (P3)

Bezeichnet Y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) die Zahl der von Wertpapier i erworbenen Stücke, so geben $Y_i \cdot P_i$ die in diesem Wertpapier angelegte Summe und $Y_i \cdot Q_i$ den daraus in $t = 1$ resultierenden Rückzahlungsbetrag an. Für die gesamte Anlagesumme A und das Endvermögen EV gelten mithin die Relationen

$$A = \sum_{i=1}^m Y_i \cdot P_i \quad \text{und} \quad EV = \sum_{i=1}^m Y_i \cdot Q_i .$$

Definiert man weiterhin den Anteil des gesamten Anlagebetrages A , der in ein einzelnes Wertpapier i ($i = 1, 2, \dots, m$) investiert wird, als x_i , so gilt

$$x_i = \frac{Y_i \cdot P_i}{A} \quad \text{oder} \quad Y_i/A = x_i/P_i .$$

Ersetzt man nun in der aus dem Text bekannten Formel für die **Gesamtrendite**

$$r = \frac{EV - A}{A}$$

im Zähler die Terme EV und A durch die soeben angegebenen Ausdrücke, so kann auch geschrieben werden:

$$r = \frac{\sum Y_i (Q_i - P_i)}{A} = \sum_{i=1}^m \frac{Y_i}{A} \cdot (Q_i - P_i) .$$

Ersetzt man nun weiter Y_i/A durch x_i/P_i , so kann geschrieben werden:

$$r = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \frac{Q_i - P_i}{P_i} .$$

Beachtet man schließlich, dass wir im Studentext die wertpapierindividuelle Rendite r_i schon durch

$$r_i = \frac{Q_i - P_i}{P_i}$$

definiert haben, so folgt daraus sofort die fragliche Relation

$$r = \sum_{i=1}^m x_i \cdot r_i .$$

Anhang P₁: Herleitung von Relation (P11)

Löst man die Relationen (P8') und (P10') zunächst nach x_A auf, so erhält man

$$x_A = \frac{\mu_P - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \quad \text{und}$$

$$x_A = \frac{\sigma_P - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} .$$

Setzt man die beiden für x_A gefundenen Terme gleich und löst diesen Ausdruck nach σ_P auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_P - \sigma_B &= \frac{\mu_P - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \cdot (\sigma_A - \sigma_B) \\ \sigma_P &= \mu_P \cdot \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} + \sigma_B - \frac{\mu_B \cdot (\sigma_A - \sigma_B)}{\mu_A - \mu_B} \\ \sigma_P &= \mu_P \cdot \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} + \frac{\sigma_B \cdot \mu_A - \sigma_B \cdot \mu_B - \sigma_A \cdot \mu_B + \sigma_B \cdot \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \\ \sigma_P &= \mu_P \cdot \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} + \frac{\sigma_B \cdot \mu_A - \sigma_A \cdot \mu_B}{\mu_A - \mu_B} . \end{aligned}$$

Multipliziert man schließlich in beiden Brüchen jeweils Zähler und Nenner gleichzeitig mit -1 , was ihren Wert ja unverändert lässt, so erhält man die im Text angegebene Relation (P11).

Anhang P₂: Herleitung der Portfeuillelinie für $\rho_{AB} = 0$

Den Ausgangspunkt der Herleitung bilden die bei $\rho_{AB} = 0$ für μ_P und σ_P^2 geltenden Relationen

$$\mu_P = 10 \cdot x_A + 20 \cdot x_B \quad \text{und}$$

$$\sigma_P^2 = 20^2 \cdot x_A^2 + 40^2 \cdot x_B^2 .$$

Substituiert man x_B durch $(1 - x_A)$ und löst die beiden Ausdrücke nach x_A auf, so folgt:

$$\mu_P = 10 \cdot x_A + 20 \cdot (1 - x_A) \quad \text{oder}$$

$$x_A = \frac{20 - \mu_P}{10}$$

$$\sigma_P^2 = 400 \cdot x_A^2 + 1.600 (1 - 2x_A + x_A^2)$$

$$\sigma_P^2 = 2.000 \cdot x_A^2 - 3.200 \cdot x_A + 1.600 .$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung x_A durch den zuvor gefundenen Ausdruck, so folgt weiter:

$$\sigma_P^2 = 20 \cdot (400 - 40\mu_P + \mu_P^2) - 320 \cdot (20 - \mu_P) + 1.600$$

$$\sigma_P^2 = 20 \cdot \mu_P^2 - 480 \cdot \mu_P + 3.200 ,$$

woraus sofort die im Text von Beispiel 8 für σ_P angegebene Formel folgt.

Anhang P₃: Herleitung von Relation (P13')

Aus Relation (P9') folgt bei $\rho_{AB} = -1$ für die Portefeuille-Varianz

$$\sigma_P^2 = (x_A \cdot \sigma_A)^2 + (x_B \cdot \sigma_B)^2 - 2(x_A \cdot \sigma_A) \cdot (x_B \cdot \sigma_B) .$$

Nach der zweiten binomischen Formel $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= (x_A \cdot \sigma_A - x_B \cdot \sigma_B)^2 \quad \text{oder} \\ \sigma_P &= \pm (x_A \cdot \sigma_A - x_B \cdot \sigma_B) . \end{aligned}$$

Als Ergebnis einer Wurzeloperation ist σ_P formal zweiwertig, wie das Zeichen \pm verdeutlicht. Inhaltlich macht allerdings nur der positive Wert Sinn, da die Standardabweichung ja nicht negativ werden kann. Für den Fall, dass $x_A \cdot \sigma_A > x_B \cdot \sigma_B$ gilt, kommt soweit nur das vorangestellte $+$ zum Tragen; gilt hingegen $x_A \cdot \sigma_A < x_B \cdot \sigma_B$, so wird das vorangestellte $-$ wirksam. Man kann für σ_P dementsprechend auch unter Verwendung des Absolutsymbols $|\dots|$

$$\sigma_P = |x_A \cdot \sigma_A - x_B \cdot \sigma_B|$$

schreiben. Das Zeichen $|\dots|$ bedeutet, dass unabhängig von dem Vorzeichen des umschlossenen Ausdrucks stets der absolute Wert anzusehen ist. So gilt etwa $|-3| = 3$ ebenso wie $|+3| = 3$.

Ersetzt man x_B durch $(1 - x_A)$ und löst den Ausdruck nach x_A auf, so folgt daraus

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \pm [x_A \cdot (\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B] \\ x_A &= \pm \frac{\sigma_P + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} . \end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus $\mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B$ bekanntlich

$$x_A = \frac{\mu_P - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} .$$

Setzt man die beiden für x_A gefundenen Ausdrücke gleich und löst die entsprechende Gleichung nach σ_P auf, so folgt daraus weiter:

$$\pm \frac{\sigma_P + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = \frac{\mu_P - \mu_B}{\mu_A - \mu_B}$$

$$\sigma_P = \pm \left[\mu_P \cdot \frac{\sigma_A + \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} - \mu_B \cdot \frac{\sigma_A + \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} - \sigma_B \right]$$

$$\sigma_P = \pm \left[\mu_P \frac{\sigma_A + \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} - \frac{\mu_B \cdot \sigma_A + \mu_A \cdot \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} \right].$$

Je nachdem, welchen Wert μ_P (als Folge von Variationen der Anteilswerte x_A , x_B) annimmt, kann der Inhalt der eckigen Klammer einen positiven oder einen negativen Wert annehmen. Da σ_P einerseits als Ergebnis einer Wurzeloperation formal zweiwertig definiert ist, andererseits aber inhaltlich nur für positive Werte sinnvoll definiert ist, kommt bei negativem (positivem) Klammerwert das negative (positive) Vorzeichen zum Tragen, so dass immer nur ein nicht-negativer Wert betrachtet wird. Unter Verwendung des Absolutzeichens kann dementsprechend auch geschrieben werden:

$$\sigma_P = \left| \mu_P \frac{\sigma_A + \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} - \frac{\mu_B \cdot \sigma_A + \mu_A \cdot \sigma_B}{\mu_A - \mu_B} \right|.$$

Setzt man die im Beispiel 9 maßgeblichen Werte $\mu_A = 10$; $\sigma_A = 20$; $\mu_B = 20$; $\sigma_B = 40$ ein, so erhält man mit

$$\sigma_P = \left| -6 \cdot \mu_P + 80 \right|$$

die im Text angegebene Gleichung.

Anhang P₄: A-B-D-Portefeuilles; Punktweise Bestimmung des effizienten Randes

A-B-D-Portefeuilles			μ	σ
$x_{(A)}$	$x_{(B)}$	$x_{(D)}$		
100,0%	0,0%	0,0%	10,00	20,00
90,0%	10,0%	0,0%	11,00	22,00
90,0%	0,0%	10,0%	10,50	18,44
80,0%	20,0%	0,0%	12,00	24,00
80,0%	10,0%	10,0%	11,50	20,40
80,0%	0,0%	20,0%	11,00	17,89
70,0%	30,0%	0,0%	13,00	26,00
70,0%	20,0%	10,0%	12,50	22,36
70,0%	10,0%	20,0%	12,00	19,70
70,0%	0,0%	30,0%	11,50	18,44
60,0%	40,0%	0,0%	14,00	28,00
60,0%	30,0%	10,0%	13,50	24,33
60,0%	20,0%	20,0%	13,00	21,54
60,0%	10,0%	30,0%	12,50	20,00
60,0%	0,0%	40,0%	12,00	20,00
50,0%	50,0%	0,0%	15,00	30,00
50,0%	40,0%	10,0%	14,50	26,31
50,0%	30,0%	20,0%	14,00	23,41
50,0%	20,0%	30,0%	13,50	21,63
50,0%	10,0%	40,0%	13,00	21,26
50,0%	0,0%	50,0%	12,50	22,36
40,0%	60,0%	0,0%	16,00	32,00
40,0%	50,0%	10,0%	15,50	28,28
40,0%	40,0%	20,0%	15,00	25,30
40,0%	30,0%	30,0%	14,50	23,32
40,0%	20,0%	40,0%	14,00	22,63
40,0%	10,0%	50,0%	13,50	23,32
40,0%	0,0%	60,0%	13,00	25,30
30,0%	70,0%	0,0%	17,00	34,00
30,0%	60,0%	10,0%	16,50	30,27
30,0%	50,0%	20,0%	16,00	27,20
30,0%	40,0%	30,0%	15,50	25,06
30,0%	30,0%	40,0%	15,00	24,08
30,0%	20,0%	50,0%	14,50	24,41
30,0%	10,0%	60,0%	14,00	26,00
30,0%	0,0%	70,0%	13,50	28,64
20,0%	80,0%	0,0%	18,00	36,00
20,0%	70,0%	10,0%	17,50	32,25
20,0%	60,0%	20,0%	17,00	29,12
20,0%	50,0%	30,0%	16,50	26,83
20,0%	40,0%	40,0%	16,00	25,61
20,0%	30,0%	50,0%	15,50	25,61
20,0%	20,0%	60,0%	15,00	26,83
20,0%	10,0%	70,0%	14,50	29,12
20,0%	0,0%	80,0%	14,00	32,25
10,0%	90,0%	0,0%	19,00	38,00
10,0%	80,0%	10,0%	18,50	34,23
10,0%	70,0%	20,0%	18,00	31,05
10,0%	60,0%	30,0%	17,50	28,64
10,0%	50,0%	40,0%	17,00	27,20
10,0%	40,0%	50,0%	16,50	26,91
10,0%	30,0%	60,0%	16,00	27,78
10,0%	20,0%	70,0%	15,50	29,73
10,0%	10,0%	80,0%	15,00	32,56
10,0%	0,0%	90,0%	14,50	36,06
0,0%	100,0%	0,0%	20,00	40,00
0,0%	90,0%	10,0%	19,50	36,22
0,0%	80,0%	20,0%	19,00	32,98
0,0%	70,0%	30,0%	18,50	30,46
0,0%	60,0%	40,0%	18,00	28,84
0,0%	50,0%	50,0%	17,50	28,28
0,0%	40,0%	60,0%	17,00	28,84
0,0%	30,0%	70,0%	16,50	30,46
0,0%	20,0%	80,0%	16,00	32,98
0,0%	10,0%	90,0%	15,50	36,22
0,0%	0,0%	100,0%	15,00	40,00

A-B-D-Portefeuilles			μ	σ
$x_{(A)}$	$x_{(B)}$	$x_{(D)}$		
100,0%	0,0%	0,0%	10,00	20,00
90,0%	0,0%	10,0%	10,50	18,44
80,0%	0,0%	20,0%	11,00	17,89
90,0%	10,0%	0,0%	11,00	22,00
70,0%	0,0%	30,0%	11,50	18,44
80,0%	10,0%	10,0%	11,50	20,40
70,0%	10,0%	20,0%	12,00	19,70
60,0%	0,0%	40,0%	12,00	20,00
80,0%	20,0%	0,0%	12,00	24,00
60,0%	10,0%	30,0%	12,50	20,00
70,0%	20,0%	10,0%	12,50	22,36
50,0%	0,0%	50,0%	12,50	22,36
50,0%	10,0%	40,0%	13,00	21,26
60,0%	20,0%	20,0%	13,00	21,54
40,0%	0,0%	60,0%	13,00	25,30
70,0%	30,0%	0,0%	13,00	26,00
50,0%	20,0%	30,0%	13,50	21,63
40,0%	10,0%	50,0%	13,50	23,32
60,0%	30,0%	10,0%	13,50	24,33
30,0%	0,0%	70,0%	13,50	28,64
40,0%	20,0%	40,0%	14,00	22,63
50,0%	30,0%	20,0%	14,00	23,41
30,0%	10,0%	60,0%	14,00	26,00
60,0%	40,0%	0,0%	14,00	28,00
20,0%	0,0%	80,0%	14,00	32,25
40,0%	30,0%	30,0%	14,50	23,32
30,0%	20,0%	50,0%	14,50	24,41
50,0%	40,0%	10,0%	14,50	26,31
20,0%	10,0%	70,0%	14,50	29,12
10,0%	0,0%	90,0%	14,50	36,06
30,0%	30,0%	40,0%	15,00	24,08
40,0%	40,0%	20,0%	15,00	25,30
20,0%	20,0%	60,0%	15,00	26,83
50,0%	50,0%	0,0%	15,00	30,00
10,0%	10,0%	80,0%	15,00	32,56
0,0%	0,0%	100,0%	15,00	40,00
30,0%	40,0%	30,0%	15,50	25,06
20,0%	30,0%	50,0%	15,50	25,61
40,0%	50,0%	10,0%	15,50	28,28
10,0%	20,0%	70,0%	15,50	29,73
0,0%	10,0%	90,0%	15,50	36,22
20,0%	40,0%	40,0%	16,00	25,61
30,0%	50,0%	20,0%	16,00	27,20
10,0%	30,0%	60,0%	16,00	27,78
40,0%	60,0%	0,0%	16,00	32,00
0,0%	20,0%	80,0%	16,00	32,98
20,0%	50,0%	30,0%	16,50	26,83
10,0%	40,0%	50,0%	16,50	26,91
30,0%	60,0%	10,0%	16,50	30,27
0,0%	30,0%	70,0%	16,50	30,46
10,0%	50,0%	40,0%	17,00	27,20
0,0%	40,0%	60,0%	17,00	28,84
20,0%	60,0%	20,0%	17,00	29,12
30,0%	70,0%	0,0%	17,00	34,00
0,0%	50,0%	50,0%	17,50	28,28
10,0%	60,0%	30,0%	17,50	28,64
20,0%	70,0%	10,0%	17,50	32,25
0,0%	60,0%	40,0%	18,00	28,84
10,0%	70,0%	20,0%	18,00	31,05
20,0%	80,0%	0,0%	18,00	36,00
0,0%	70,0%	30,0%	18,50	30,46
10,0%	80,0%	10,0%	18,50	34,23
0,0%	80,0%	20,0%	19,00	32,98
10,0%	90,0%	0,0%	19,00	38,00
0,0%	90,0%	10,0%	19,50	36,22
0,0%	100,0%	0,0%	20,00	40,00

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Aus den im Text zu Beispiel 2 angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Renditen für die Papiere $i = 2$ und $i = 3$ ergeben sich nach den Formeln (P4) und (P5) die folgenden μ - und σ -Werte:

$$\mu_2 = 0,4 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot (-0,25) + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 1$$

$$\mu_2 = 0,2 \hat{=} 20\%$$

$$\sigma_2 = \left[0,4 \cdot (0 - 0,2)^2 + 0,2 \cdot (0,75 - 0,2)^2 + 0,2 \cdot (-0,25 - 0,2)^2 + 0,1 \cdot (1 - 0,2)^2 + 0,1 \cdot (0 - 0,2)^2 \right]^{0,5}$$

$$\sigma_2 = 0,43 \hat{=} 43\%$$

$$\mu_3 = 0,4 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot (-0,8) + 0,2 \cdot (-0,7) + 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot (-1)$$

$$\mu_3 = -0,25 \hat{=} -25\%$$

$$\sigma_3 = \left[0,4 \cdot (0,25 - (-0,25))^2 + 0,2 \cdot (-0,8 - (-0,25))^2 + 0,2 \cdot (-0,7 - (-0,25))^2 + 0,1 \cdot (0,5 - (-0,25))^2 + 0,1 \cdot (-1 - (-0,25))^2 \right]^{0,5}$$

$$\sigma_3 = 0,56 \hat{=} 56\%$$

Übungsaufgabe 2:

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der alternativ möglichen Renditen r ergeben sich nach der Formel

$$r = 2/3 \cdot r_A + 1/3 \cdot r_B$$

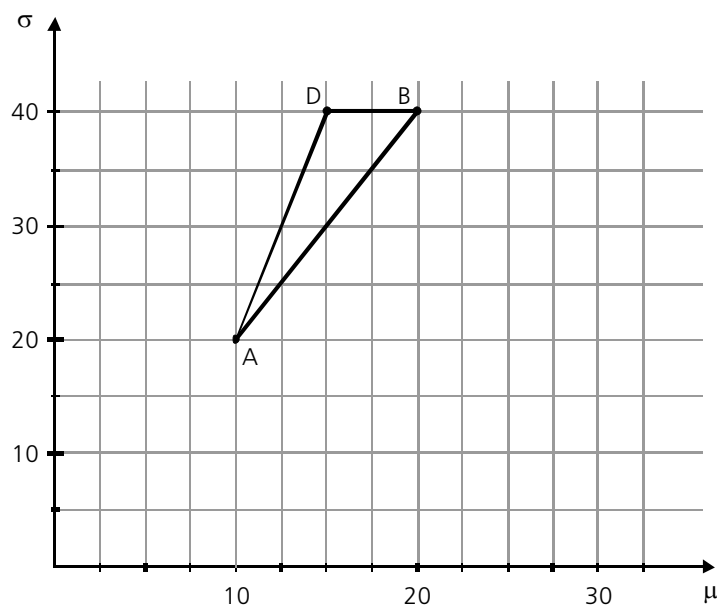
folgende Werte:

	S_1	S_2	S_3	S_4
r	$+13 \frac{1}{3}$	$+13 \frac{1}{3}$	$+13 \frac{1}{3}$	$+13 \frac{1}{3}$

Im Endeffekt ergibt sich aus der hier betrachteten ganz speziellen „Mischung“ der beiden unsicherheitsbehafteten Papiere A und B ein Portefeuille, das **mit Sicherheit** ($\sigma = 0$) eine Rendite von $13 \frac{1}{3}$ erbringt! Bei dem betrachteten Mischungsverhältnis von 2 : 1 gleichen sich die entgegengesetzten Abweichungen der szenario-abhängigen Einzelrenditen gerade in perfekter Weise gegenseitig aus.

Übungsaufgabe 3:

Für den hier betrachteten Fall $\rho_{AB} = \rho_{AD} = \rho_{BD} = 1$ stellen alle Portefeuillelinien **Geraden** dar, die die jeweils maßgeblichen Wertpapierpunkte A, B, D untereinander verbinden. Es ergibt sich somit folgende Abbildung.



Die Grafik zeigt, dass das Papier D nach wie vor für ein optimales Portefeuille **nicht** in Frage kommt, denn

- jede A-D-Mischung wird jeweils durch eine bestimmte A-B-Mischung dominiert, die bei gleichem σ -Wert zu einem höheren μ führt, und
- alle A-B-Mischungen werden aus dem gleichen Grund durch die reine B-Anlage dominiert.

Übungsaufgabe 4:

- a) Nach den Formeln (P8) und (P12) ergeben sich für die fraglichen Portefeuilles folgende Kennzahlenwerte:

I: ($x_A \hat{=} 80\%$; $x_D \hat{=} 20\%$)

$$\mu = 0,8 \cdot 10 + 0,2 \cdot 15 = 11\%$$

$$\sigma = [0,8^2 \cdot 20^2 + 0,2^2 \cdot 40^2]^{0,5} = 17,89\%$$

II: ($x_A \hat{=} 50\%$; $x_D \hat{=} 50\%$)

$$\mu = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 15 = 12,5\%$$

$$\sigma = [0,5^2 \cdot 20^2 + 0,5^2 \cdot 40^2]^{0,5} = 22,36\%$$

III: ($x_A = 20\%$; $x_D = 80\%$)

$$\mu = 0,2 \cdot 10 + 0,8 \cdot 15 = 14\%$$

$$\sigma = [0,2^2 \cdot 20^2 + 0,8^2 \cdot 40^2]^{0,5} = 32,25\%$$

IV: ($x_B = 80\%$; $x_D = 20\%$)

$$\mu = 0,8 \cdot 20 + 0,2 \cdot 15 = 19\%$$

$$\sigma = [0,8^2 \cdot 40^2 + 0,2^2 \cdot 40^2]^{0,5} = 32,98\%$$

V: ($x_B = 50\%$; $x_D = 50\%$)

$$\mu = 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 15 = 17,5\%$$

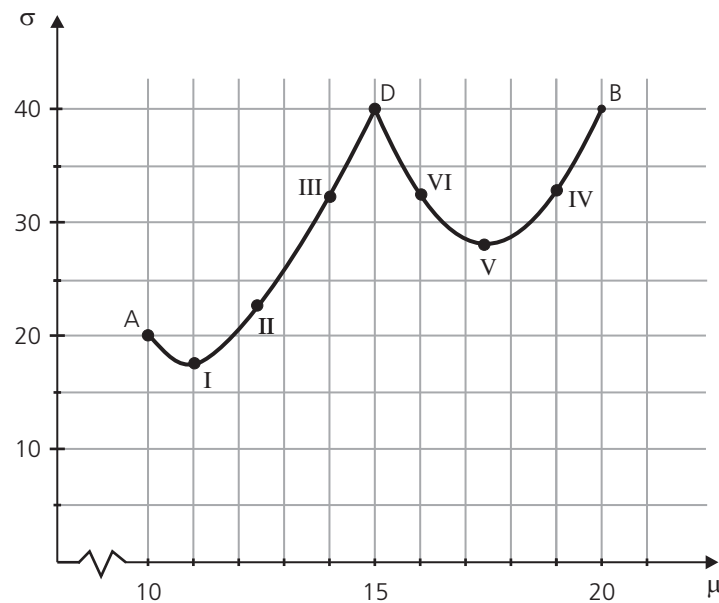
$$\sigma = [0,5^2 \cdot 40^2 + 0,5^2 \cdot 40^2]^{0,5} = 28,28\%$$

VI: ($x_B = 20\%$; $x_D = 80\%$)

$$\mu = 0,2 \cdot 20 + 0,8 \cdot 15 = 16\%$$

$$\sigma = [0,2^2 \cdot 40^2 + 0,8^2 \cdot 40^2] = 32,98\%$$

- b) Auf der Basis der unter a) errechneten Werte kann der Verlauf der Portfeuillelinien AD und DB wie folgt skizziert werden:



Übungsaufgabe 5:

- a) Folgende Aufstellung zeigt zunächst die Zeitreihe der Renditewerte (e_F , e_G) der beiden Aktien sowie die Differenzen der Renditewerte der einzelnen Jahre zu den Erwartungswerten ($\mu_F = 15$; $\mu_G = 8$).

	1	2	3	4	5	6	7
e_F	-18	-3	33	10	15	23	45
e_G	8	30	16	-4	-8	10	4
$e_F - \mu_F$	-33	-18	18	-5	0	8	30
$e_G - \mu_G$	0	22	8	-12	-16	2	-4

Um die Kovarianz zu ermitteln, multiplizieren wir die in den letzten beiden Zeilen angegebenen Differenzen je paarweise und addieren die Ergebnisse auf, um sie abschließend durch 7 zu dividieren. So erhält man

$$\text{cov}_{FG} = \frac{-296}{7} = -42,29 .$$

Mithin erhält man für den Korrelationskoeffizienten unter Beachtung von $\sigma_F = 19,73$ und $\sigma_G = 11,76$:

$$\rho_{FG} = \frac{\text{cov}_{FG}}{\sigma_F \cdot \sigma_G} = \frac{-42,29}{19,73 \cdot 11,76} = -0,18 .$$

Die Renditen der FLORA- und GLÜCKKAUF-Aktie sind also (schwach) negativ korreliert.

- b) In Abhängigkeit von den FLORA- und GLÜCKKAUF-Anteilen (x_F, x_G) gilt für die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Portefeuilles gem. (P8) und (P9):

$$\mu_P = 15 \cdot x_F + 8 \cdot x_G$$

$$\sigma_P = \left[(19,73 \cdot x_F)^2 + (11,76 \cdot x_G)^2 - 2 \cdot 42,29 \cdot x_F \cdot x_G \right]^{0,5} .$$

Rechnet man diese Ausdrücke für die vorgegebenen Anteilsquoten aus, so erhält man folgende Ergebnisse:

x_F	x_G	μ_P	σ_P
0%	100%	8,0	11,76
10%	90%	8,7	10,41
20%	80%	9,4	9,52
30%	70%	10,1	9,22
40%	60%	10,8	9,58
50%	50%	11,5	10,52
60%	40%	12,2	11,92
70%	30%	12,9	13,62
80%	20%	13,6	15,53
90%	10%	14,3	17,58
100%	0%	15,0	19,73

Von einem reinen GLÜCKKAUF-Portefeuille ($x_F = 0; x_G = 1$) ausgehend wird durch die sukzessive Aufnahme der FLORA-Aktie in das Portefeuille also zunächst erreicht, dass bei ständig wachsender Renditeerwartung das Risiko dennoch zurückgeht. Bei einer Quote in der Größenordnung von 30% für die FLORA-Aktie wird bei einer Renditeerwartung von rd. 10%

mit einem σ -Wert um 9,2% das insgesamt niedrigste Risiko erreicht. Soll die Renditeerwartung durch zusätzliche Aufnahme von FLORA-Aktien weiter gesteigert werden, ist dies nur möglich, wenn auch ein steigendes Risiko in Kauf genommen wird.

- c) Ein in dem definierten Sinn risikoscheuer Anleger wird seine Auswahlüberlegungen nur noch auf die effizienten Portefeuilles konzentrieren. Das sind im vorliegenden Fall alle „Mischungen“, in denen die FLORA-Aktie mit ca. 30% und mehr enthalten ist, einschließlich des Grenzfalles der ausschließlichen Anlage in FLORA-Aktien. Die ausschließliche Anlage in GLÜCKAUF-Aktien hingegen wäre nicht effizient.

Übungsaufgabe 6:

- a) Die Portefeuilles E und F sind durch die Anteilsquoten ($x_A = 30\%$, $x_B = 0\%$; $x_D = 70\%$) bzw. ($x_A = 0\%$; $x_B = 40\%$; $x_D = 60\%$) gekennzeichnet. Für eine 80 : 20- sowie eine 20 : 80-Mischung dieser beiden Portefeuilles gilt mithin:

$$\begin{aligned} \text{I (80 : 20):} \quad x_A &= 0,8 \cdot 30 + 0,2 \cdot 0 = 24\% \\ x_B &= 0,8 \cdot 0 + 0,2 \cdot 40 = 8\% \\ x_D &= 0,8 \cdot 70 + 0,2 \cdot 60 = 68\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II (20 : 80):} \quad x_A &= 0,2 \cdot 30 + 0,8 \cdot 0 = 6\% \\ x_B &= 0,2 \cdot 0 + 0,8 \cdot 40 = 32\% \\ x_D &= 0,2 \cdot 70 + 0,8 \cdot 60 = 62\% \end{aligned}$$

Für die μ - σ -Werte gilt dann unter Beachtung der Ausgangsdaten $\mu_A = 10$, $\sigma_A = 20$; $\mu_B = 20$, $\sigma_B = 40$; $\mu_D = 15$, $\sigma_D = 40$; $\rho_{AB} = 1$, $\rho_{AD} = \rho_{BD} = 0$ gem. (P14) und (P15)

$$\mu_I = 0,24 \cdot 10 + 0,08 \cdot 20 + 0,68 \cdot 15 = \mathbf{14,2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \left[(0,24 \cdot 20)^2 + (0,08 \cdot 40)^2 + (0,68 \cdot 40)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (0,24 \cdot 20) \cdot (0,08 \cdot 40) \right]^{0,5} \\ &= \mathbf{28,35} \end{aligned}$$

$$\mu_{II} = 0,06 \cdot 10 + 0,32 \cdot 20 + 0,62 \cdot 15 = \mathbf{16,3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{II} &= \left[(0,06 \cdot 20)^2 + (0,32 \cdot 40)^2 + (0,62 \cdot 40)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (0,06 \cdot 20) \cdot (0,32 \cdot 40) \right]^{0,5} \\ &= \mathbf{28,48}\end{aligned}$$

- b) Bezeichnen α und $(1 - \alpha)$ die Anteile der Portefeuilles E bzw. F an dem durch ihre Mischung neu entstehenden Portefeuille, so gilt für die darin enthaltenen Anteile der ursprünglichen Wertpapiere A, B und D:

$$\begin{aligned}x_A &= \alpha \cdot 0,3 + (1 - \alpha) \cdot 0 = 0,3 \cdot \alpha \\ x_B &= \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot 0,4 = 0,4 - 0,4 \cdot \alpha \\ x_D &= \alpha \cdot 0,7 + (1 - \alpha) \cdot 0,6 = 0,6 + 0,1 \cdot \alpha\end{aligned}$$

Für die Varianz dieses Portefeuilles gilt dann analog zu (P15):

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (0,3 \cdot \alpha \cdot 20)^2 + ((0,4 - 0,4 \cdot \alpha) \cdot 40)^2 + ((0,6 + 0,1 \cdot \alpha) \cdot 40)^2 \\ &\quad + 2 \cdot (0,3 \cdot \alpha \cdot 20) \cdot (0,4 - 0,4 \cdot \alpha) \cdot 40 \\ &= (6\alpha)^2 + (16 - 16\alpha)^2 + (24 + 4\alpha)^2 + (192\alpha - 192\alpha^2)\end{aligned}$$

Um das risikominimierte Mischungsverhältnis $\alpha^*/(1 - \alpha^*)$ zu ermitteln, wird die erste Ableitung von σ^2 nach α gebildet und gleich null gesetzt:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha} = 12\alpha - 2 \cdot (16 - 16\alpha) - 2 \cdot (24 + 4\alpha) + 192 - 384\alpha = 0.$$

Nach Zusammenfassung und Auflösung nach α folgt daraus:

$$\alpha^* = \frac{128}{232} = \mathbf{55,2\%}.$$

Für die zugehörigen Anteilswerte der ursprünglichen Wertpapiere A, B und D gilt dann:

$$\begin{aligned}x_A &= 16,56\% \\ x_B &= 17,92\% \\ x_D &= 65,52\%\end{aligned}$$

Für die entsprechenden μ - σ -Werte gilt dann schließlich gemäß (P14) und (P15):

$$\mu^* = \mathbf{15,07} \quad \sigma^* = \mathbf{28,23}$$

Übungsaufgabe 7:

Der Punkt Z_4 entspricht der 50 : 50-Mischung der Wertpapiere D und B. Also gilt $x_B = x_D = 0,5$ und somit auch

$$\begin{aligned}\mu_4 &= 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 15 = 17,5 \\ \sigma_4 &= \left[(0,5 \cdot 40)^2 + (0,5 \cdot 40)^2 \right]^{0,5} = 28,28 .\end{aligned}$$

Für ein aus den Wertpapieren A, B und D zusammengesetztes Portefeuille mit dem Erwartungswert von 17,5% muss unter Berücksichtigung von $x_A + x_B + x_D = 1$ bzw. $x_A = 1 - x_B - x_D$ gelten:

$$(1) \quad 10 \cdot (1 - x_B - x_D) + 20 x_B + 15 x_D = 17,5 .$$

Daraus folgt nach geeigneter Umstellung:

$$(2) \quad x_B = 0,75 - 0,5 x_D .$$

Nach Einsetzen in (1) folgt daraus weiter:

$$(3) \quad x_A = 0,25 - 0,5 x_D .$$

Für die zugehörige Varianz gilt dann

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 20^2 \cdot (0,25 - 0,5 \cdot x_D)^2 + 40^2 \cdot (0,75 - 0,5 \cdot x_D)^2 \\ &\quad + 1.600 \cdot x_D^2 + 2 \cdot 20 \cdot (0,25 - 0,5 \cdot x_D) \cdot 40 \cdot (0,75 - 0,5 \cdot x_D) .\end{aligned}$$

Daraus folgt nach geeigneter Auflösung und Umordnung:

$$(4) \quad \begin{aligned}\sigma^2 &= (5 - 10 \cdot x_D)^2 + (30 - 20 \cdot x_D)^2 + 1.600 \cdot x_D^2 \\ &\quad + (300 - 800 \cdot x_D + 400 \cdot x_D^2) .\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der minimalen Varianz und damit zugleich der minimalen Standardabweichung wird die erste Ableitung von σ^2 nach x_D gebildet und gleich null gesetzt. So folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_D} &= -20 \cdot (5 - 10 \cdot x_D) - 40 \cdot (30 - 20 \cdot x_D) \\ &\quad + 3.200 \cdot x_D - 800 + 800 \cdot x_D = 0 .\end{aligned}$$

nach geeigneter Umformung

$$(5) \quad x_D^* = \frac{2.100}{5.000} = 0,42 \hat{=} 42\% .$$

Nach (2) und (3) muss dann weiter auch

$$x_B^* = 0,54 \hat{=} 54\%$$

$$x_A^* = 0,04 \hat{=} 4\%$$

gelten. Gemäß (P14) und (P15) folgt daraus schließlich:

$$\mu^* = 17,5\%$$

$$\sigma^* = 28,0\%$$

Das zuletzt ermittelte Portefeuille weist bei übereinstimmendem Erwartungswert von $\mu = 17,5$ also mit $\sigma^* = 28$ einen niedrigeren σ -Wert auf als das dem Punkt Z_4 entsprechende Portefeuille. Mithin liegt der Punkt Z_4 **nicht** auf dem effizienten Rand mit $\sigma_4 = 28,28$; dieser muss vielmehr (knapp) unterhalb dieses Punktes verlaufen. Der durch den Übergang des effizienten Randes in die ursprüngliche Portefeuillelinie DB charakterisierte Punkt Z_6 muss dementsprechend rechts oberhalb des Punktes Z_4 liegen.

Übungsaufgabe 8:

- a) Die gesuchte Gerade hat allgemein die Form $\sigma = \alpha + \beta \cdot \mu$. Sie durchläuft dabei die Punkte S (mit $\mu = 5$; $\sigma = 0$) und T (mit $\mu = 15$; $\sigma = 10$). Mithin muss

$$0 = \alpha + \beta \cdot 5 \quad \text{sowie}$$

$$10 = \alpha + \beta \cdot 15$$

gelten. Daraus ergibt sich dann, dass

$$\alpha = -5 \quad \text{und} \quad \beta = 1$$

gilt, die gesuchte Gerade also der Gleichung

$$\sigma = -5 + \mu \quad \text{für} \quad 5 \leq \mu \leq 15$$

folgt.

- b) Nach der unter a) ermittelten Funktion ergeben sich für die alternativ vorgegebenen μ -Werte (1) bis (3) die folgenden σ -Werte (Angaben in %):

$$(1) \quad \mu = 5 \rightarrow \sigma = 0$$

$$(2) \quad \mu = 10 \rightarrow \sigma = 5$$

$$(3) \quad \mu = 15 \rightarrow \sigma = 10$$

Der im Fall (4) vorgegebene μ -Wert kann demgegenüber nicht durch eine S-T-Mischung erreicht werden, sondern nur bei der reinen V-Anlage. Also gilt

$$(4) \quad \mu = 20 \rightarrow \sigma = 20 .$$

Die Portefeuilles (1) und (3) entsprechen gerade den beiden Extremen, die gesamte Anlagesumme nur in die sichere Anlage S bzw. das Tangentialportefeuille zu investieren. Portefeuille (2) kann demgegenüber als 50 : 50-Mischung aus sicherer Anlage und Tangentialportefeuille interpretiert werden. Die Papiere U, V und W sind dementsprechend in diesem Portefeuille gerade nur zur Hälfte des Prozentsatzes enthalten, mit dem sie in das Tangentialportefeuille eingehen.

Zusammenfassend kann für die drei Portefeuilles geschrieben werden:

	μ	σ	x_U	x_V	x_W	x_S
(1)	5	0	0%	0%	0%	100%
(2)	10	5	15%	32,5%	2,5%	50%
(3)	15	10	30%	65%	5%	0%
(4)	20	20	0%	100%	0%	0%

Übungsaufgabe 9:

- (1) Ein Anleger, der den Erwartungswert seines Portefeuilles maximieren will, wird seinen gesamten Anlagebetrag in das Wertpapier mit dem höchsten Erwartungswert, also in das Papier V mit $\mu = 20$ und $\sigma = 20$, investieren (Vgl. Fall (4) in Übungsaufgabe 8).
- (2) Ein Anleger, der die Standardabweichung seines Portefeuilles minimieren will, wird seinen gesamten Anlagebetrag in die sichere Anlage S investieren, bei der er $\mu = 5$ und $\sigma = 0$ realisiert (Vgl. Fall (1) in Übungsaufgabe 8).

- (3) Der Höchstwert für das maximal tolerierbare Portefeullerisiko beträgt hier 4. Der unter dieser Restriktion maximal erzielbare Erwartungswert beträgt gemäß der Portefeullegeraden an dieser Stelle 9.

Der Erwartungswert des Portefeulles (3) ergibt sich aus $\mu_3 = x_S \cdot 5 + x_P \cdot 15$, so dass sich ein Erwartungswert von 9 durch folgende Aufteilung der Anlagesumme ergibt:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= (1 - x_P) \cdot 5 + x_P \cdot 15 \\ \Leftrightarrow 9 &= (1 - x_P) \cdot 5 + x_P \cdot 15 \\ \Rightarrow x_P &= 0,4 \end{aligned}$$

Der Anleger investiert also 40% in das Tangentialportefeulle und 60% in die sichere Anlage.

- (4) Der Mindestwert für die Renditeerwartung beträgt hier 13. Die unter dieser Restriktion minimal zu erzielende Standardabweichung beträgt gemäß der Portefeullegeraden an dieser Stelle 9.

Der Erwartungswert des Portefeulles (4) ergibt sich aus $\mu_4 = x_S \cdot 5 + x_P \cdot 15$, so dass sich ein Erwartungswert von 13 durch folgende Aufteilung der Anlagesumme ergibt:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= (1 - x_P) \cdot 5 + x_P \cdot 15 \\ \Leftrightarrow 13 &= (1 - x_P) \cdot 5 + x_P \cdot 15 \\ \Rightarrow x_P &= 0,8 \end{aligned}$$

Der Anleger investiert also 80% in das Tangentialportefeulle und 20% in die sichere Anlage.

Zusammenfassend kann für die vier Portefeulles geschrieben werden:

	μ	σ	x_U	x_V	x_W	x_S
(1)	20	20	0%	100%	0%	0%
(2)	5	0	0%	0%	0%	100%
(3)	15	10	12%	26%	2%	60%
(4)	20	20	24%	52%	4%	20%