Modul 32521: Finanz- und bankwirtschaftliche Modelle (Kurs 42000)

Lösungshinweise zur Einsendearbeit Nr. 2 im SS 2021

Aufgabe 1: Bestimmung des optimalen Verkaufszeitpunktes **12 Punkte**

Sie betreiben einen Weinhandel und haben u. a. 1.000 Flaschen eines gefragten Rotweins auf Lager, den Sie sofort (t = 0) zu 20 Euro je Flasche verkaufen könnten. Sie können diesen Rotwein jedoch auch

Fall A: **ohne Lagerkosten** (L = 0)

Fall B: **mit Lagerkosten** von einem Euro pro Flasche und Jahr (L = 1)

lagern und am Jahresende der folgenden Jahre (t = 1, 2,…, 10) veräußern. Sie gehen (sicher) davon aus, dass der Verkaufspreis pro Flasche und Jahr um 3 Euro steigt. Der für Sie relevante Kalkulationszinssatz beträgt 8 % p. a.

Wann sollten Sie in den Fällen A und B den Wein verkaufen, wenn Ihre Zielsetzung Endvermögensmaximierung ist?

Tragen Sie für die Fälle A und B die von Ihnen ermittelten optimalen Verkaufszeitpunkte t*(A) bzw. t*(B) (jeweils als ganze Zahl ohne Nachkommastellen) in die Lösungsfelder ein und verdeutlichen Sie durch nachvollziehbare Berechnungen und/oder Erklärungen Ihren Lösungsweg bzw. Lösungsgedanken!

t*(A) =
t*(B) =

Lösungshinweis:

Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt t‘ (t‘ < T) ist die Verschiebung des Verkaufszeitpunktes um genau ein Jahr mit zwei bewertungsrelevanten Konsequenzen verbunden. Zum einen steigt der Verkaufserlös je Flasche durch die Laufzeitverlängerung um ein Jahr um einen konstanten Betrag von Y = 3 Euro und es fallen für die Lagerung Kosten in konstanter Höhe von L = 0 Euro (Fall A) bzw. L = 1 Euro (Fall B) an, zum anderen entfällt die Möglichkeit, den ohne Laufzeitverlängerung im Zeitpunkt t‘ zufließenden Verkaufserlös (abzüglich aller bis t‘ anfallender Lagerkosten und zugehöriger Zinskosten) für ein Jahr zum Zinssatz r = Z % = 8 % verzinslich anzulegen. Da die bis zum Zeitpunkt t‘ anfallenden Lagerkosten und darauf entfallende Zinskosten unabhängig von der Entscheidung über die Laufzeitverlängerung im Zeitpunkt t‘ anfallen und damit nicht entscheidungsrelevant sein können, ist der optimale Liquidationszeitpunkt folglich durch den Zeitpunkt t = t* bestimmt, für den erstmalig gilt:

$$(X + t^* \cdot Y) \cdot \frac{Z}{100} > Y - L,$$

für den also die Zinsen auf den Liquidationserlös des Zeitpunktes t* erstmalig größer werden als die im Falle des Verzichtes auf die Liquidation im Zeitpunkt t* realisierbare (Netto-) Erlössteigerung abzüglich der im Zeitpunkt t*+1 anfallenden Lagerkosten.

Formt man diese Relation um, so kann t* unmittelbar errechnet werden aus:

$$t^* > \frac{(Y - L) \cdot \frac{100}{Z} - X}{Y}.$$

Im Fall A gilt folglich: $t^*(A) > \frac{(3-0) \cdot \frac{100}{8} - 20}{3} = 5,83 \;\Rightarrow\; t^*(A) = 6.$

Im Fall B gilt folglich: $t^*(B) > \frac{(3-1) \cdot \frac{100}{8} - 20}{3} = 1,67 \;\Rightarrow\; t^*(B) = 2.$

In nachfolgender Tabelle wird die Lösung für Fall A nochmals numerisch verdeutlicht:

t*	Verkaufserlös in t* aufgezinst auf t*+1	Verkaufserlös in t*+1
0	21.600 <	23.000
1	24.840 <	26.000
2	28.080 <	29.000
3	31.320 <	32.000
4	34.560 <	35.000
5	37.800 <	38.000
6	**41.040 >**	**41.000**

Der Wein sollte im Fall A also im Zeitpunkt t* = 6 veräußert werden. Für t* = 6 gilt erstmalig: 41.000 / 38000 = 1,0789 < 1 + Z /100 = 1,08.

Aufgabe 2: Bestimmung der optimalen Nutzungsdauer

Teilaufgabe A

12 Punkte

Die Beschaffung und Nutzung einer Maschine mit einer Maximallaufzeit von t = 10 Jahren kann im Falle einer 10-jährigen Nutzung durch die Projektzahlungsreihe (e_0; e_1; e_2;…; e_{10}) abgebildet werden. Bekannt ist, dass der Einzahlungsüberschuss in t = 1 bei Investitionsdurchführung einen Wert von 5.000 Euro aufweist und für Folgezeitpunkte (bis zum Liquidationszeitpunkt L) gilt: $e_t = e_{t-1} - 400$, der Einzahlungsüberschuss also in jeder Periode um einen konstanten Betrag von 400 Euro sinkt.

Die Maschine kann an jedem Jahresende veräußert werden. Bei einer Veräußerung kann annahmegemäß jeweils ein Veräußerungserlös erzielt werden, der exakt dem Restbuchwert der Maschine bei linearem Abschreibungsverlauf auf der Grundlage einer Anschaffungsauszahlung der Maschine in Höhe von 20.000 Euro entspricht. Nach einer Veräußerung fallen keine weiteren mit der betrachteten Maschine verbundenen Ein- und Auszahlungen an. Der Kalkulationszinssatz beträgt durchgängig r = 5 % p. a.

Berechnen Sie die optimale Nutzungsdauer t* des Investitionsprojektes, also diejenige Laufzeit, die zum maximal möglichen Kapitalwert führt, sowie den zugehörigen Kapitalwert K(t*) und tragen Sie Ihre Ergebnisse (jeweils als ganze Zahl ohne Nachkommastellen) in die Lösungsfelder ein! Verdeutlichen Sie durch nachvollziehbare Berechnungen und/oder Erklärungen Ihren Lösungsweg bzw. Lösungsgedanken!

t*(A) =
t*(B) =

Lösungshinweis:

Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt t‘ (t‘ < T) ist die Verlängerung der Laufzeit um ein Jahr vorteilhaft (führt zu einer Erhöhung des Kapitalwertes), wenn der zusätzliche Vorteil (also der zusätzliche Einzahlungsüberschuss im Zeitpunkt t‘ + 1 zuzüglich des Liquidationserlöses L in t‘ + 1) größer als der mit der Verlängerung verbundene Nachteil (also der auf den Zeitpunkt t‘ + 1 aufgezinste Liquidationserlös L des Zeitpunktes t‘) ist.

Der optimale Liquidationszeitpunkt t* ist also (bei Vernachlässigung der Unterlassensalternative) durch den Zeitpunkt t = t* $(t^* \leq T)$ bestimmt, für den erstmalig gilt:

$$(20.000 - \frac{20.000}{10} \cdot t^*) \cdot 1{,}05 > (20.000 - \frac{20.000}{10} \cdot (t^* + 1)) + 5.000 - 400 \cdot t^*,$$

für den also der um eine Periode aufgezinste Liquidationserlös des Zeitpunktes t* erstmalig größer wird als der im Falle des Verzichtes auf die Liquidation im Zeitpunkt t* zusätzlich realisierbare Einzahlungsüberschuss, also $L_{t^*+1} + e_{t^*+1}$.

Eine einfache Umformung obiger Vorteilhaftigkeitsbedingung führt zu:

$$(20.000 - \frac{20.000}{10} \cdot t^*) \cdot 0{,}05 + \frac{20.000}{10} > 5.000 - 400 \cdot t^*.$$

Formt man diese Relation nach t* um, so ergibt sich: t* > 6,67. Die optimale Nutzungsdauer liegt im konkreten Fall folglich bei t* = 7 (Jahren). Der zugehörige Kapitalwert beträgt gerundet: K(t*=7) = 6.704.

In nachfolgender Tabelle wird die Lösung für Fall A nochmals numerisch verdeutlicht:

t*	Liquidationserlös in t* aufgezinst auf t*+1		Einzahlungsüberschuss in t*+1 zuzüglich Liquidationserlös im Zeitpunkt t*+1
1	18.900	<	16.000 + 4.600
2	16.800	<	14.000 + 4.200
3	14.700	<	12.000 + 3.800
4	12.600	<	10.000 + 3.400
5	10.500	<	8.000 +3.000
6	8.400	<	6.000 + 2.600
7	**6.300**	**>**	**4.000 + 2.200**
8	4.200	>	2.000 + 1.800
…			

Da gilt $t^* = 7 \leq T = 10$ und $K(t^*) = 6.704 > 0$, sollte das Projekt realisiert und im Zeitpunkt t* = 7 liquidiert werden.

Teilaufgabe B **10 Punkte**

Die Beschaffung und Nutzung einer Maschine mit einer Maximallaufzeit von t = T Jahren kann im Falle einer T-jährigen Nutzung durch die Projektzahlungsreihe (e_0; e_1; e_2;…; e_T) abgebildet werden. Bekannt ist, dass der Einzahlungsüberschuss in t = 1 bei Investitionsdurchführung einen Wert von X aufweist und für Folgezeitpunkte (bis zum Liquidationszeitpunkt L) gilt: $e_t = e_{t-1} - Y$, der Einzahlungsüberschuss also in jeder Periode um einen konstanten Betrag Y sinkt.

Die Maschine kann an jedem Jahresende veräußert werden. Bei einer Veräußerung kann annahmegemäß jeweils ein Veräußerungserlös erzielt werden, der exakt dem Restbuchwert der Maschine bei linearem Abschreibungsverlauf auf der Grundlage einer Anschaffungsauszahlung der Maschine in Höhe von a_0 ($a_0 = -e_0$) entspricht. Nach einer Veräußerung fallen keine weiteren mit der betrachteten Maschine verbundenen Ein- und Auszahlungen an. Der Kalkulationszinssatz beträgt durchgängig r % p. a.

Auf Basis konkreter Vorgaben für a_0, T, X, Y und r wurde für das Investitionsprojekt ein optimaler Liquidationszeitpunkt t* und damit eine optimale Laufzeit t* ermittelt, für die gilt: $1 < t^* < T$.

Nachfolgend finden Sie in den zu beurteilenden Aussagen B1 bis B5 jeweils Informationen zu konkret vorgegebenen Änderungen der Ausgangsparameter. Geben Sie unter Berücksichtigung der jeweils vorliegenden Informationen an, ob Sie folgende Aussage

– für eindeutig richtig halten (R),

– für eindeutig falsch halten (F) oder

– nicht eindeutig als richtig oder falsch beurteilen können, da Ihnen beurteilungsrelevante Angaben fehlen (?)!

	Aussage	Beurteilung der Aussage (R / F / ?)
B1	Die Erhöhung der Anschaffungsauszahlung a_0 bei gleichzeitiger Verkürzung der Projektlaufzeit T führt von der Tendenz her c. p. zu einem späteren Liquidationszeitpunkt t*.	
B2	Die Verminderung der Anschaffungsauszahlung a_0 bei gleichzeitiger Verminderung des Kalkulationszinssatzes r führt von der Tendenz her c. p. zu einem späteren Liquidationszeitpunkt t*.	
B3	Die Erhöhung des ersten Einzahlungsüberschusses X bei gleichzeitiger Verminderung der periodisch konstanten Einzahlungsminderung Y führt von der Tendenz her c. p. zu einem späteren Liquidationszeitpunkt t*.	
B4	Die Erhöhung der Anschaffungsauszahlung a_0 bei gleichzeitiger Erhöhung der Projektlaufzeit T führt von der Tendenz her c. p. zu einem späteren Liquidationszeitpunkt t*.	
B5	Die Erhöhung des ersten Einzahlungsüberschusses X bei gleichzeitiger Erhöhung der periodisch konstanten Einzahlungsminderung Y führt von der Tendenz her c. p. zu einem späteren Liquidationszeitpunkt t*.	

Lösungshinweis:

Der optimale Liquidationszeitpunkt ist durch den Zeitpunkt t = t* bestimmt, für den erstmalig gilt:

$(a_0 - \frac{a_0}{T} \cdot t^*) \cdot (1+r) > (a_0 - \frac{a_0}{T} \cdot (t^*+1)) + X - Y \cdot t^*,$ Eine einfache Umformung führt zu:

$$(a_0 - \frac{a_0}{T} \cdot t^*) \cdot r + \frac{a_0}{T} > X - Y \cdot t^*.$$

Auf der linken Seite der Ungleichung wird der aus einer Liquidation in t* resultierende Vorteil einer frühzeitigen Liquidation bezogen auf den Zeitpunkt t*+1 abgebildet, auf der rechten Seite der Ungleichung der Vorteil einer um eine Periode verschobenen Liquidation.

Eine Erhöhung der Anschaffungsauszahlung a_0 bei gleichzeitiger Verminderung der maximalen Projektlaufzeit T führt c. p. zu einer Erhöhung des links vom Relationszeichen stehenden Ausdrucks und damit tendenziell zu einem niedrigeren t*. Aussage B1 ist folglich falsch.

Eine Verminderung der Anschaffungsauszahlung a_0 bei gleichzeitiger Verminderung des Kalkulationszinssatzes r führt c. p. zu einer Verminderung des links vom Relationszeichen stehenden Ausdrucks und damit tendenziell zu einem höheren t*. Aussage B2 ist folglich richtig.

Eine Erhöhung des Einzahlungsüberschusses der ersten Periode X bei gleichzeitiger Verminderung der konstanten jährlichen Rückflussminderung Y führt c. p. zu einer Erhöhung des rechts vom Relationszeichen stehenden Ausdrucks und damit tendenziell zu einem höheren t*. Aussage B3 ist folglich richtig.

Eine Erhöhung der Anschaffungsauszahlung a_0 bei gleichzeitiger Erhöhung der maximalen Projektlaufzeit T führt c. p. zu keiner eindeutigen Erhöhung oder Verminderung des links vom Relationszeichen stehenden Ausdrucks. Ob t* sich vermindert oder erhöht hängt nicht nur von den konkreten Wertänderungen der betrachteten Parameter a_0 und T ab, sondern auch von den ebenfalls nicht bekannten Ausprägungen der anderen Parameter X, Y und r. Aussage B4 kann folglich nicht eindeutig als richtig oder falsch beurteilt werden.

Eine Erhöhung des Einzahlungsüberschusses der ersten Periode X bei gleichzeitiger Erhöhung der konstanten jährlichen Rückflussminderung Y führt c. p. zu keiner eindeutigen Erhöhung oder Verminderung des rechts vom Relationszeichen stehenden Ausdrucks. Ob t* sich vermindert oder erhöht hängt nicht nur von den konkreten Wertänderungen der betrachteten Parameter X und Y ab, sondern auch von den ebenfalls nicht bekannten Ausprägungen der anderen Parameter a_0, T und r. Aussage B5 kann folglich nicht eindeutig als richtig oder falsch beurteilt werden.

Aufgabe 3: Bestimmung der Kennzahlen Kapitalwert und äquivalente Annuität einfacher Investitionsketten

Teilaufgabe A

10 Punkte

Ein Investitionsprojekt mit einer Projektlaufzeit von 5 Jahren führt bei einem konstanten Kalkulationszinssatz in Höhe von 6 % zu einem Kapitalwert in Höhe von 100.

Berechnen Sie die Annuität e* der Investition bei einmaliger Durchführung (n = 1) und anschließend die Annuität e**(n) und den Kapitalwert KK(n) einer Investitionskette, bei der das betrachtete Investitionsprojekt als vierfache Kette durchgeführt wird. Tragen Sie die Ergebnisse (gerundet auf zwei Nachkommastellen) in die zugehörigen Lösungsfelder ein! Machen Sie Ihren Rechengang deutlich!

e* =
e**(n) =
KK(n) =

Lösungshinweis:

Die gesuchten Kennzahlen errechnen sich allgemein aus den Formeln:

$$e^* = K \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-T}}$$

$$\mathrm{e}^{**}(\mathrm{n}) = \mathrm{K} \cdot \frac{\mathrm{r}}{1-(1+\mathrm{r})^{-\mathrm{T}}}$$

$$\mathrm{KK}(\mathrm{n}) = \mathrm{K} \cdot \frac{1-(1+\mathrm{r})^{-\mathrm{n} \cdot \mathrm{T}}}{1-(1+\mathrm{r})^{-\mathrm{T}}}.$$

Setzt man in diese Formeln die Werte T = 5, n = 4, r = 0,06 und K = 100 ein, so ergeben sich als Ergebnisse:

e* =	23,74
e**(n) =	23,74
KK(n) =	272,29

Teilaufgabe B

6 Punkte

Ein Investor kann ein Investitionsprojekt mit einem positiven Nominalwert durchführen, bei dem auf eine Anfangsauszahlung über mehrere Jahre hinweg nur noch Einzahlungsüberschüsse folgen. Auf Basis des für den Investor maßgeblichen positiven Kalkulationszinssatzes r weist das Projekt einen positiven Kapitalwert auf. Der Investor hat nun die Möglichkeit, das Projekt bei unveränderter Zahlungsreihe n-mal (n > 1) hintereinander als „Kette“ durchzuführen.

Geben Sie an, ob Sie die auf diese Ausgangssituation bezogenen Aussagen für eindeutig richtig (R), eindeutig falsch (F) oder in Abhängigkeit von nicht näher spezifizierten – aber durchaus beurteilungsrelevanten – Rahmendaten für nicht eindeutig als richtig oder falsch (?) beurteilbar halten!

	Aussage	Beurteilung der Aussage (R / F / ?)
B1	Der Nominalwert der Kette ist größer als der Kapitalwert der Kette.	
B2	Der Nominalwert der Kette ist größer als der Endwert der Kette.	
B3	Die Annuität der Kette ist größer als die Annuität des Einzelprojektes.	
B4	Die Annuität der Kette ist größer als der Nominalwert des Einzelprojektes.	
B5	Der Endwert des Einzelprojektes ist größer als die Annuität der Kette.	
B6	Der interne Zinsfuß der Kette ist größer als der Kalkulationszinssatz.	

Lösungshinweis:

Der Nominalwert einer n-fachen Investitionskette entspricht dem n-fachen Nominalwert des Einzelprojektes. Der Nominalwert des Einzelprojektes entspricht der einfachen Summe aller mit dem Projekt verbundenen Ein- und Auszahlungen. Der Kapitalwert des Einzelprojektes entspricht der Summe aller mit dem Zinssatz r auf den Zeitpunkt t = 0 abgezinsten Projektzahlungen. Für r > 0 ist der Kapitalwert des Einzelprojektes folglich zwingend kleiner als der Nominalwert des Einzelprojektes und damit ist auch der Nominalwert der Kette zwingend größer als der Kapitalwert der Kette. Aussage B1 ist folglich richtig.

Der Endwert einer n-fachen Kette entspricht der Summe der auf den Endzeitpunkt $T' = n \cdot T$ aufgezinsten (Einzel-) Endwerte und kann abhängig von der Anzahl der Kettenglieder n und damit der Gesamtlaufzeit der Investitionskette T‘ sowohl größer als auch kleiner als der Nominalwert der Investitionskette sein. Da weder T‘ noch r bekannt sind, kann Aussage B2 nicht eindeutig beurteilt werden.

Unter Beachtung von q = 1 + r gilt unabhängig von n, r, T und K:

$$e^{**}(n) = KK(n) \cdot \frac{r}{1-q^{-n \cdot T}} = K \cdot \frac{1-q^{-n \cdot T}}{1-q^{-T}} \cdot \frac{r}{1-q^{-n \cdot T}} = K \cdot \frac{r}{1-q^{-T}} = e^{*} .$$

Die äquivalente Annuität einer Investitionskette stimmt zwingend mit der äquivalenten Annuität des Einzelprojektes überein und ist für r > 0 zwingend kleiner als der (als positiv vorgegebene) Nominalwert, Kapitalwert und Endwert des Einzelprojektes und der Investitionskette. Aussage B3 und B4 ist folglich falsch. Aussage B5 ist richtig.

Jede Investitionskette kann als (gemeinsame) Zahlungsreihe aller in der Kette enthaltenen Einzelprojekte dargestellt werden. Dabei werden die Einzelzahlungen aller Einzelprojekte zeitpunktgenau abgebildet und die Schlusszahlung des Vorgängerprojekts mit der Startzahlung des jeweiligen Nachfolgeprojekts saldiert. Eine so konstruierte Zahlungsreihe weist für den vorausgesetzten Fall, dass das der Kette zugrundeliegende Einzelprojekt eine Zahlungsreihe aufweist, bei der auf eine anfängliche Auszahlung nur noch Einzahlungen folgen, zwingend den gleichen internen Zinsfuß wie das Einzelprojekt auf. Da das Einzelprojekt dem Typ einer Normalinvestition entspricht und einen positiven Kapitalwert aufweist, gilt zwingend: r* > r. Aussage B6 ist folglich richtig.