Lösungshinweise zur Einsendearbeit 1: WS 2020/2021

„Finanz- und bankwirtschaftliche Modelle“, Kurs 42000

Inhaltlicher Bezug: KE 1

Aufgabe 1: Binomialmodell **30 Punkte**

a) Auf einem Markt existiert eine Option auf die ebenfalls auf diesem Markt gehandelte Aktie der ABSTURZ AG. Die Option hat eine Restlaufzeit von einer Periode. Eine Option berechtigt zum Kauf einer Aktie der ABSTURZ AG am Periodenende zum Basispreis von 300 GE. Die Ausübung kann nur zum Fälligkeitstermin erfolgen. **(10 P.)**

Der aktuelle Börsenkurs der Aktie der ABSTURZ AG beträgt in $t = 0$ $S_0 = 320$ GE. Es wird allgemein davon ausgegangen, dass der Wert der Aktie am Ende der Periode auf 384 GE gestiegen oder auf 160 gefallen sein wird.

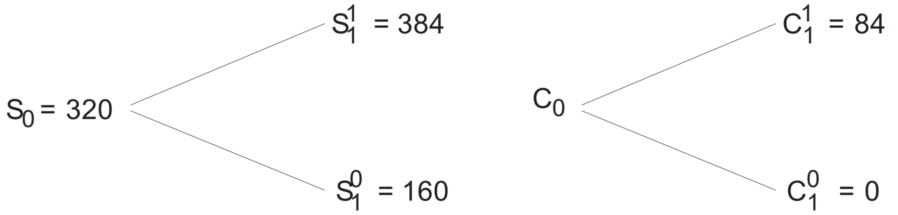
Der Periodenzins für eine festverzinsliche Geldaufnahme und für die Geldanlage beträgt $r = 10$ % pro Periode.

Auf dem Markt gelten die Annahmen des im Kurs vorgestellten Binomialmodells.

Bestimmen Sie den Wert der Option (in $t = 0$) der ABSTURZ AG mittels Duplikation! Bestimmen Sie dazu zunächst die Anzahl der Aktien im Duplikationsportfolio, anschließend die Höhe der festverzinslichen Aufnahme bzw. Anlage von Mitteln im Duplikationsportfolio und zuletzt den Wert des Duplikationsportfolios und der Option!

Lösung:

Die möglichen Entwicklungen des Aktienkurses und die Zahlungskonsequenzen der Option sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:



Um die Unsicherheit der mit der Kaufoption verbundenen Zahlung nachzubilden, muss ein Kauf der Aktie erfolgen. Um die Variationsbreite der Zahlung aus der Option in Höhe von 84 GE exakt nachzubilden, muss genau $\frac{C_1^1 - C_1^0}{S_1^1 - S_1^0} = \frac{84\ \text{GE}}{224\ \text{GE}} = 0{,}375$ Aktie in das Duplikationsportfolio aufgenommen werden. Ein Portfolio, welches genau 0,375 Aktie enthält, führt zu den folgenden Zahlungskonsequenzen:

$$
0{,}375 \cdot S_0 = 120 \quad
\begin{cases}
0{,}375 \cdot S_1^1 = 144 \\[2ex]
0{,}375 \cdot S_1^0 = 60
\end{cases}
$$

Diese Zahlungen übersteigen in beiden möglichen Zuständen die Zahlungen der zu duplizierenden Kaufoption um genau 60 GE. Um die Kaufoption exakt zu duplizieren, muss daher in $t = 0$ eine Mittelaufnahme in Höhe von $60\ \text{GE} \cdot 1{,}1^{-1} = 54{,}55$ GE erfolgen, die in $t = 1$ zu einer Auszahlung in Höhe von 60 GE führt.

Der Wert des Duplikationsportfolios im Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Wert von 0,375 Aktie im Zeitpunkt $t = 0$ abzüglich der Höhe der aufgenommenen Mittel, also: $0{,}375 \cdot 320\ \text{GE} + (-54{,}55\ \text{GE}) = 65{,}45$ GE. Aufgrund der Arbitragefreiheit des Marktes muss damit der Wert der Option C_0 genau 65,45 GE betragen.

Probe: Gemäß Formel (3.08) muss gelten:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1+r} \cdot \left(\lambda \cdot C_1^1 + (1-\lambda) \cdot C_1^0\right) \\
&\left[\text{mit } \lambda = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1{,}1-0{,}5}{1{,}2-0{,}5} = 0{,}8571\right] \\
&= \frac{1}{1{,}1} \cdot \left(0{,}8571 \cdot 84 + 0{,}1429 \cdot 0\right) = \frac{18}{1{,}1} = 65{,}45\ \text{GE}.
\end{aligned}
$$

b) Gehen Sie nun davon aus, dass die Laufzeit der Option nicht eine Periode, sondern zwei Perioden beträgt. **(10 P.)**

Der aktuelle Börsenkurs der Aktie der ABSTURZ AG sei wiederum $S_0 = 320$ GE. Es wird nun davon ausgegangen, dass der Wert der Aktie am Ende einer jeden Periode gegenüber dem Wert zu Beginn der Periode jeweils 20 % gestiegen oder um 50 % gefallen ist. Dies gilt unabhängig davon, ob der Wert der Aktie in der Periode zuvor gefallen oder gestiegen ist. Ermitteln Sie den Wert der Option im Zeitpunkt $t = 0$ durch (mehrfache) Anwendung der Bewertungsformel für den Einperioden-Fall!

Lösung:

Zunächst gilt:

$$
\begin{aligned}
C_2^2 &= (320 \cdot 1,2^2) - 300 = 160,8 \\
C_2^1 &= \max\{(320 \cdot 1,2 \cdot 0,5) - 300\,;\,0\} = 0 \\
C_2^0 &= \max\{(320 \cdot 0,5 \cdot 0,5) - 300\,;\,0\} = 0 \\
\lambda &= \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{1,1-0,5}{1,2-0,5} = 0,8571 \quad .
\end{aligned}
$$

Ermittelt man den Wert der Option im Zeitpunkt t = 0 durch schrittweise Rückrechnung unter zweimaliger Anwendung der Bewertungsformel (3.08), so ergibt sich unter Berücksichtigung der bereits ermittelten Werte $C_2^2 = 160,8$ und $C_2^1 = C_2^0 = 0$ sowie $\lambda = 0,8571$ für die zwei möglichen Optionswerte im Zeitpunkt t = 1:

$$C_1^1 = \frac{1}{1,1} \cdot \left(0,8571 \cdot 160,8 + 0,1429 \cdot 0\right) = 125,29$$

und

$$C_1^0 = \frac{1}{1,1} \cdot \left(0,8571 \cdot 0 + 0,1429 \cdot 0\right) = 0$$

und auf Basis dieser Werte für den Optionswert im Zeitpunkt t = 0:

$$C_0 = \frac{1}{1,1} \cdot \left(0,8571 \cdot 125,29 + 0,1429 \cdot 0\right) = 97,62.$$

Der Wert der Option beträgt also 97,62 GE.

c) Auf einem transaktionskostenfreien und informationseffizientem Finanzmarkt wird in t = 0 die X-Aktie sowie eine Kauf- und eine Verkaufsoption auf die X-Aktie gehandelt. Alle Marktteilnehmer gehen übereinstimmend davon aus, dass der Kurs der X-Aktie im nächsten Handelszeitpunkt t = 1 entweder 80 GE oder 40 GE betragen wird. Sie beobachten in t = 0, dass die Kaufoption mit einem Basispreis von 53 GE zu einem Preis von 11 GE und die Verkaufsoption mit einem Basispreis von 49 GE zu einem Preis von 4 gehandelt wird. Zwischen t = 0 und t = 1 können sichere Geldanlagen und Kreditaufnahmen zu r = 10 % getätigt werden. **(10 P.)**

Begründen Sie zunächst kurz, warum sich unter diesen Voraussetzungen der Finanzmarkt im Ungleichgewicht befindet! Geben Sie anschließend explizit an, durch welche konkreten Kauf-/Verkaufsoperationen und Anlage-/Verschuldungsoperationen Arbitragegewinne im Zeitpunkt t = 0 erzielt werden können! Bestimmen Sie abschließend die Höhe des maximal erzielbaren Arbitragegewinns, wenn in t = 0 maximal 20 Optionen gekauft bzw. (leer-) verkauft werden können!

Lösung:

Die folgende Tabelle beinhaltet jeweils in Abhängigkeit vom tatsächlichen Aktienkurs in t = 1 die Werte von Kaufoption und Verkaufsoption im Zeitpunkt t = 1 sowie den Wert eines Portfolios bestehend aus einer Kaufoption und drei Verkaufsoptionen:

	KO(BP=53)	**VKO(BP=49)**	**1 KO + 3 VKO**
Kurs X-Aktie 80	**27**	**0**	**27**
Kurs X-Aktie 40	**0**	**9**	**27**

Im Gleichgewicht müsste der Wert dieses Portfolios beim unterstellten sicheren Zinssatz von 10 % genau 24,55 GE (27/11=24,55) betragen.

Der aktuelle Preis P des Portfolios aus 1 KO und 3 VKO in t = 0 beträgt: $1 \cdot 11 + 3 \cdot 4 = 23$.
Es besteht folglich ein Marktungleichgewicht, da ein sicherer Rückfluss von 27 an einem gleichgewichtigen Markt nicht zwei unterschiedlich hohe Preise aufweisen kann.

(Hinweis: Alternativ hätten aus den Angaben zu den beiden Optionen auch die implizierten Pseudowahrscheinlichkeiten für Kauf- und Verkaufsoption abgeleitet werden können. Da diese voneinander abweichen, kann der Markt nicht im Gleichgewicht sein.)

Es existieren Arbitragemöglichkeiten, da gilt: P < M. Bei Kauf von 5 KO und 15 VKO zum Gesamtkaufpreis von 115 GE in Verbindung mit einer Kreditaufnahme von 122,73 GE (Rückzahlungsbetrag des Kredits in t = 1 beträgt 135 GE) kann in t = 0 unter Berücksichtigung der Handelsbeschränkung ein Arbitragegewinn von 7,73 GE erzielt werden.

Aufgabe 2: Modigliani-Miller-Modellwelt

20 Punkte

a) Die Kapitalkosten der A-AG, B-AG und C-AG folgen dem Modigliani-Miller-Theorem. Für die Erwartungswerte μ der jährlichen Gesamtrückflüsse der drei Unternehmen, deren Standardabweichungen σ und deren Gesamtkapitalkosten f gilt: **(10 P.)**

$$\mu_A = 100 \qquad \mu_B = 60 \qquad \mu_C = 140$$
$$\sigma_A = 200 \qquad \sigma_B = 90 \qquad \sigma_C = 280$$
$$f_A = 0{,}09 \qquad f_B = 0{,}12 \qquad f_C = 0{,}10\,.$$

Begründen Sie kurz, warum sich unter diesen Voraussetzungen der Finanzmarkt im Ungleichgewicht befindet! Geben Sie anschließend explizit an, welche Relationen zwischen dem sicheren Marktzinssatz r und den drei Gesamtkapitalkostensätzen in einem Marktgleichgewicht zwingend Gültigkeit haben müssen!

Lösung:

Im Marktgleichgewicht müssen Unternehmen der gleichen Risikoklasse, also Unternehmen mit übereinstimmendem Variationskoeffizienten V, zwingend den gleichen Gesamtkapitalkostensatz f aufweisen. Mit steigendem V muss f steigen. f muss zwingend größer als der Marktzinssatz r sein.

$$V_A = \frac{200}{100} = 2 \qquad V_B = \frac{90}{60} = 1{,}5 \qquad V_C = \frac{280}{140} = 2$$

$$V_A = V_C \;\Rightarrow f_A = f_C \;(aber: 0{,}09 \neq 0{,}10 \Rightarrow Ungleichgewicht)$$
$$V_B < V_A \;\Rightarrow f_B < f_A \;(aber: 0{,}12 > 0{,}09 \Rightarrow Ungleichgewicht)\,.$$

b) Die Kapitalkosten der XY-AG folgen dem Modigliani-Miller-Theorem. Die XY-AG ist in der Ausgangssituation durch folgende Daten gekennzeichnet (alle nachfolgenden Angaben in Mio. GE): **(10 P.)**

$$D_E = 150 \quad M_E = 1.000 \quad D_F = 200 \quad M_F = 2.000 .$$

Durch eine Zusatzinvestition mit einer in t = 0 zu leistenden einmaligen Auszahlung von 2.000 könnte der Erwartungswert der (unendlich anfallenden) jährlichen Einzahlungsüberschüsse bei unverändertem Gesamtrisiko von 350 auf 570 erhöht werden.

Angenommen, die Zusatzinvestition könnte in vollem Umfang durch einen risikolosen Kredit zum geltenden Marktzins oder durch die Ausgabe neuer Aktien finanziert werden.

- Sollte die XY-AG das Projekt durchführen? Ist diese Entscheidung von der Finanzierungsentscheidung abhängig?
- Wie hoch ist im Falle einer kreditfinanzierten Investitionsdurchführung der neue Marktwert des Eigenkapitals?

Lösung:

$$f_E = \frac{150}{1.000} = 0{,}15 \ ; \ f_F = \frac{200}{2.000} = 0{,}1$$

$$f = 0{,}15 \cdot \frac{1.000}{3.000} + 0{,}1 \cdot \frac{2.000}{3.000} = 0{,}116666$$

$$K = -2.000 + \frac{570 - 350}{0{,}116666} = -114{,}29 < 0 \Rightarrow \mathrm{Pr}\,\textit{ojekt unvorteilhaft}\,!!!$$

$$M_E^{neu} = M_E^{alt} + K = 1.000 - 114{,}29 = 885{,}71 .$$