# Lösungshinweise zur Einsendearbeit 1: SS 2019

# „Finanz- und bankwirtschaftliche Modelle“, Kurs 42000

## Aufgabe 1: Portefeuilletheorie und Capital Asset Pricing Model **50 Punkte**

a) ÄNGSTLICH, ein im Sinne des μ-σ-Prinzips risikoscheuer Investor will einen fest vorgegebenen Geldbetrag für genau ein Jahr anlegen. Als Anlagemöglichkeit zieht er zunächst nur die Aktien der A-AG und B-AG sowie beliebige Mischungen in Betracht. ÄNGSTLICH geht von folgenden Renditen für die alleinige Anlage in die Aktien A oder B in Abhängigkeit von den vier von ihm für möglich gehaltenen Umweltentwicklungen aus: **(6 P.)**

| | $s_1$ $p_1 = 0{,}2$ | $s_2$ $p_2 = 0{,}1$ | $s_3$ $p_3 = 0{,}3$ | $s_4$ $p_4 = 0{,}4$ |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 20 | 10 | 6 | 8 |
| **B** | 8 | –2 | 10 | 24 |

Berechnen Sie für jedes der Wertpapiere den zugehörigen μ-, $\sigma^2$- und σ-Wert! Runden Sie Ihre Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen!

**Lösung:**

Ausgehend von

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot p_j \,, \quad \sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_j - \mu)^2 \cdot p_j \quad \text{und } \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

ergibt sich für die zu berechnenden Werte:

| | μ | σ | $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|
| A | 10 | 5,14 | 26,40 |
| B | 14 | 8,81 | 77,60 |

b) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen den Renditen der Aktien A und B sowie den zugehörigen Korrelationskoeffizienten! **(4 P.)**

**Lösung:**

Ausgehend von $\rho_{AB} = \dfrac{\mathrm{cov}_{AB}}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$ und

$\mathrm{cov}_{12} \ = \ \sigma^2_{AB} \ = \ \sum_{j=1}^{n} (e_{Aj} - \mu_A) \cdot (e_{Bj} - \mu_B) \cdot p_j$ ergibt sich:

$\mathrm{cov}_{AB} \ = \ -15{,}2$

$\rho_{AB} \ = \ -0{,}34$ .

c) Berechnen Sie für die folgenden Portefeuilleanteile ($x_A$ = 0,69 und $x_B$ = 0,31 bzw. $x_A$ = 0,5 und $x_B$ = 0,5) der Aktien A und B die sich ergebenden $\mu_p$-, $\sigma^2_p$- und $\sigma_p$- Werte für das Portfolio. Tragen Sie die von Ihnen ermittelten μ-σ-Kombinationen in die nachfolgende Tabelle ein! **(12 P.)**

| | $\mu_p$ | $\sigma^2_p$ | $\sigma_p$ |
|---|---|---|---|
| $x_A$ = 0,9; $x_B$ = 0,1 | 10,40 | 19,40 | 4,40 |
| $x_B$ = 0,69; $x_B$ = 0,31 | | | |
| $x_A$ = 0,5; $x_B$ = 0,5 | | | |
| $x_A$ = 0,3; $x_B$ = 0,7 | 12,80 | 33,94 | 5,83 |

Lösung:

Ausgehend von

$\sigma^2_p = x^2_A \cdot \sigma^2_A + x^2_B \cdot \sigma^2_B + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$ und $\mu_P = x_A \cdot \mu_A + x_B \cdot \mu_B$ ergibt sich:

| | μ | $\sigma^2$ | σ |
|---|---|---|---|
| $x_B$ = 0,69; $x_B$ = 0,31 | **11,24** | **13,45** | **3,67** |
| $x_A$ = 0,5; $x_B$ = 0,5 | **12** | **18,31** | **4,28** |

d) ÄNGSTLICH ist begeistert von den Aktien der A-AG und der B-AG. Berechnen Sie zunächst, welche Rendite er bei welchem Risiko erzielt, wenn er sein Erspartes so auf A uns B aufteilt, dass das durch die Standardabweichung gemessene Risiko minimal wird! Skizzieren Sie anschließend unter Nutzung aller angegebener und berechneter μ-σ-Werte die Portefeuillefunktion in einem μ-σ-Diagramm! **(12 P.)**

**Lösungshinweise:**

Die Anteile der beiden Aktien bei minimalem Risiko lassen sich berechnen, indem die Formel für die Standardabweichung des Portfolios nach $x_A$ abgeleitet und gleich Null gesetzt wird. $x_A$ ist dabei der Anteil der A-Aktie am Portfolio, $(1 - x_A)$ der Anteil der B-Aktie.

$$\sigma_P^2 = x_A{}^2 \cdot \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot (1 - x_A) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial x_A} = 2 \cdot x_A \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1 - x_A) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} - 4 \cdot x_A \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}} \\ &= \frac{77{,}60 - 5{,}14 \cdot 8{,}81 \cdot (-0{,}34)}{26{,}40 + 77{,}60 - 2 \cdot 5{,}14 \cdot 8{,}81 \cdot (-0{,}34)} \\ &= 0{,}69\,. \end{aligned}$$

Der Anteil der A-Aktie beträgt also 69%.

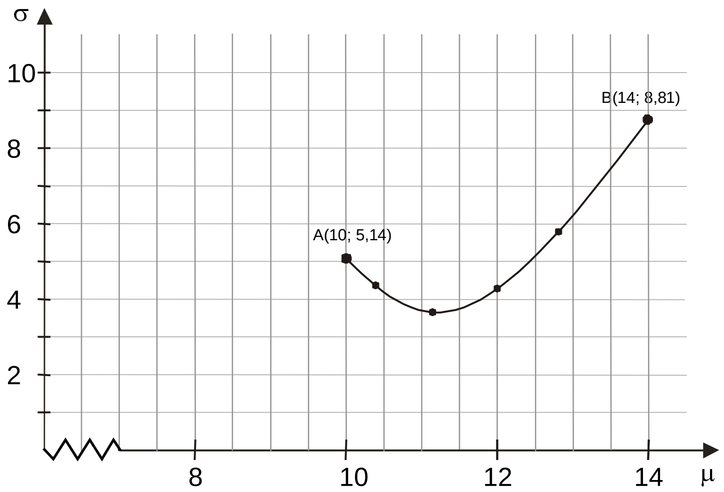
$$\begin{aligned} \mu_P &= x_A \cdot \mu_A + (1 - x_A) \cdot \mu_B \\ &= 0{,}69 \cdot 10 + 0{,}31 \cdot 14 \\ &= 11{,}24\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= x_A{}^2 \cdot \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot (1 - x_A) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} \\ &= 0{,}69^2 \cdot 26{,}40 + 0{,}31^2 \cdot 77{,}60 + 2 \cdot 0{,}69 \cdot 0{,}31 \cdot 5{,}14 \cdot 8{,}81 \cdot (-0{,}34) \\ &= 13{,}44\,. \end{aligned}$$

$$\sigma_P = \sqrt{13{,}44} = 3{,}67\,.$$

ÄNGSTLICH erzielt eine Rendite von $\mu$ = 11,24% bei einem Risiko von $\sigma$ = 3,67%.

Aus der Verbindung der vorgegebenen und berechneten Punkte resultiert folgende Skizze einer Portefeuillelinie im μ-σ-Diagramm.




e) Nachfolgend werden fünf mögliche, aus den Wertpapieren A und/oder B bestehende Portefeuilles betrachtet. Welche dieser Portefeuilles wird der risikoscheue ÄNGSTLICH auf keinen Fall realisieren? Welche wird er möglicherweise realisieren? Begründen Sie Ihre Einschätzungen! **(5 P.)**

1) Der Anteil von Wertpapier A am Gesamtportfolio beträgt 100%.

2) Der Anteil von Wertpapier A am Gesamtportfolio beträgt 0%.

3) Der Anteil von Wertpapier A am Gesamtportfolio beträgt 68%.

4) Der Anteil von Wertpapier A am Gesamtportfolio beträgt 75%.

5) Der Anteil von Wertpapier A am Gesamtportfolio ist kleiner als 73%.

**Lösung:**

Da das risikominimale Portefeuille gerade zu 69% aus Wertpapier A besteht, lässt sich mit Bezug auf die Abbildung der Portefeuillelinie im μ-σ-Diagramm unmittelbar ableiten:

- Für alle Portefeuilles auf dem steigenden Ast der Portefeuillelinie gilt: a < 0,69.
- Für alle Portefeuilles auf dem fallenden Ast der Portefeuillelinie gilt: a > 0,69.

Aufgrund des – für einen risikoscheuen Anleger zwingend – steigenden Verlaufes der Indifferenzkurven kann aus Sicht von ÄNGSTLICH ein Portefeuille überhaupt nur dann optimal sein (also zum höchsten erreichbaren Präferenzwert führen), wenn es auf dem ansteigenden Teil der in Aufgabenteil d) skizzierten Portefeuillelinie liegt. Zu jedem Portefeuille auf dem fallenden Ast der Portefeuillelinie existiert ein Portefeuille auf dem steigenden Ast, das bei gleichem Risiko einen höheren Erwartungswert aufweist und somit von einem risikoscheuen Anleger auf jeden Fall vorgezogen wird.

Daraus folgt nun unmittelbar, dass die auf dem fallenden Ast der Portefeuillelinie liegenden Portefeuilles (1) und (4) auf keinen Fall als Optimalalternative in Betracht kommen. Da die Portefeuilles (2) und (3) auf dem steigenden Ast der Portefeuillelinie liegen, also zu den aus Sicht eines risikoscheuen Anlegers effizienten Portefeuilles gehören, kommen beide, da ja die konkrete Präferenzfunktion von ÄNGSTLICH unbekannt ist, als Optimalalternative in Frage. Ob Portefeuille (5) zu den effizienten Portefeuilles gehört, lässt sich nicht eindeutig beantworten. Gilt für Portefeuille (5) $a < 0{,}69$, so liegt es auf dem aufsteigenden Ast der Portefeuillelinie und kommt damit als Optimalalternative für ÄNGSTLICH in Betracht. Gilt hingegen $0{,}69 < a < 0{,}73$, so liegt es auf dem fallenden Ast der Portefeuillelinie und kommt damit in diesem Fall als Optimalalternative für ÄNGSTLICH nicht in Betracht.

f) Gehen Sie davon aus, dass auf einem Markt, der der CAPM-Welt entspricht, folgende Daten gelten:

$$\sigma_M = 4\%, \qquad \mu_M = 12\%, \qquad r = 8\%.$$

(Hinweis: Diese Datenkonstellation stimmt nicht mit den bisher angegebenen und ermittelten Werten überein!)

Ein Anleger will die Hälfte seines zu investierenden Vermögens in die sichere Anlage und die andere Hälfte in das Marktportefeuille anlegen.

i) Ermitteln Sie die Kapitalmarktlinie und erläutern Sie allgemein deren Aussagegehalt! **(7 P.)**

ii) Welche Rendite $\mu$ und welches Risiko $\sigma$ realisiert der Anleger? **(4 P.)**

**Lösungshinweis:**

i) Für die Kapitalmarktlinie gilt:

$$\begin{aligned} \mu &= r + \frac{\mu_M - r}{\sigma_M} \cdot \sigma \\ &= 0{,}08 + \frac{0{,}12 - 0{,}08}{0{,}04} \cdot \sigma = 0{,}08 + \sigma. \end{aligned}$$

Zum Begriff der Kapitalmarktlinie vgl. Kurs 42000, KE 1, Kapitel 2.2.2.

ii) Für die Rendite des Anlegers gilt:

$$\mu = 0{,}5 \cdot \mu_M + 0{,}5 \cdot r = 0{,}5 \cdot 0{,}12 + 0{,}5 \cdot 0{,}08 = 0{,}10 .$$

Setzt man diesen Wert in die Funktion der Kapitalmarktlinie ein und löst nach $\sigma$ auf, so erhält man:

$$0{,}10 = 0{,}08 + \sigma \Leftrightarrow \sigma = 0{,}02 .$$