

FernUniversität in Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik
Lehrgebiet Analysis

Bachelorarbeit

Zerbrechliche Mengen

Manuel Bruchmann

Datum: 11. April 2024

Betreuer

Erstgutachter: Dr. Matthias Täufer
Zweitgutachter: Prof. Dr. Delio Mugnolo

Danksagung

Ich möchte mich bei meinem Betreuer, **Dr. Matthias Täufer** für die hervorragende Betreuung meiner Bachelorarbeit bedanken und dafür, dass er dafür gesorgt hat, dass ich mit dem Umfang meiner Bachelorarbeit nicht über das Ziel hinausschieße.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Frau, **Jenjira Sukprasert**, bedanken, dass sie es problemlos hingenommen hat, dass ich in den letzten Wochen viele Stunden meiner Freizeit vor dem Computer beim Recherchieren und Verfassen der Arbeit verbracht habe.

Zerbrechliche Mengen

Manuel Bruchmann

11. April 2024

1 Einleitung

Als ich kürzlich den Kurs „**Topologische Räume**“ belegte, fand sich als Fragment ein Verweis auf ein Beispiel, genannt „**Der zerbrechliche Kegel**“ in einem nicht mehr angebotenen Kurs „**Metrische Räume**“. Bei Studententagen zu diesem Kurs kam die Frage auf, was es mit diesem Verweis auf sich habe und der Kursbetreuer **Dr. Matthias Täufer**, der auch Betreuer dieser Arbeit ist, erörterte kurz die etwas kuriosen Eigenschaften dieser Konstruktion; ein zusammenhängender topologischer Raum, der durch Wegnahme eines einzelnen Punktes, des Dispersionspunktes, total diskontinuierlich wird. Diese bedeutet, dass es dann kein Teilstück des Raumes mehr gibt, der zusammenhängend ist. Mein Interesse an einer solchen Konstruktion führte zu dieser Arbeit.

Bei einer zerbrechlichen Menge handelt es sich um eine Teilmenge der Trägermenge eines topologischen Raumes in der Teilraumtopologie. Streng genommen handelt es sich also um Teilräume größerer Räume. Jedoch werden diese Konstrukte auch in der recht umfangreichen Abhandlung zu diesem Thema, „*On biconnected sets with a dispersion point*“ von **Roman Duda**¹ „pulverable set“ und „biconnected set with a dispersion point“, also „Menge“ genannt ([8]). Aus diesem Grunde werden wir die Terminologie „zerbrechliche Menge“ beibehalten und sie sogar zum Titel dieser Arbeit gemacht.

In Prinzip ist es ganz einfach solche zerbrechlichen Mengen zu konstruieren. So gibt es einen topologischen Raum mit einer dreielementigen Grundmenge, der diese Eigenschaft besitzt. In Abschnitt 3 werden wir dies kurz zeigen. Tatsächlich kann man jede beliebige Menge X die eine Kardinalität $\text{card}(X) \geq 3$ besitzt in recht einfacher Weise mit einer Topologie versehen, sodass sie zerbrechlich wird. Interessant wird es, wenn man zusätzlich fordert, dass zerbrechliche Mengen metrisierbar sein sollen. Die einfachen Konstruktionen bauen in der Tat auf der Tatsache auf, dass dort die Menge, die nur den Dispersionspunkt enthält, nicht abgeschlossen ist. Für metrisierbare topologische Räume ist diese Eigenschaft ausgeschlossen, da aus der Metrisierbarkeit schon folgt, dass Mengen, die nur einen Punkt enthalten, abgeschlossen sind. Der zerbrechliche Kegel ist eine solche zerbrechliche Menge im \mathbb{R}^2 . Die Konstruktion basiert auf dem **Cantorschen Diskontinuum**² (oder auch **Cantor-Menge** genannt).

¹Roman Duda (geb. 1935)

²Georg Cantor (1845-1918)

Dieser war die erste derartige Konstruktion ([6]), und wurde erstmals von **Bronislaw Knaster** und **Kazimierz Kuratowski** in ihrer Veröffentlichung „Sur les ensembles connexes“ ([18]) erwähnt und wird daher auch „Knaster-Kuratowski-Fan“ ([7]) genannt. In [20] wird hingegen die Bezeichnung „Cantors leaky tent“ oder „Cantor’s teepee“ verwendet. Diese metrisierbare Konstruktion wird einerseits durch Wegnahme eines einzigen Punktes, des Dispersionspunktes, total diskontinuierlich. Dies bedeutet, dass die Zusammenhangskomponenten nach dessen Wegnahme einpunktig werden. Dies gilt jedoch keineswegs für die Quasikomponenten. Der zerbrechliche Kegel ist also nicht total separierbar.

Es stellten sich einige Fragen in Bezug auf zerbrechliche Mengen. Etwa:

1. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ zerbrechliche Mengen die ε -dicht in einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 liegen?
2. Falls ja, gibt zerbrechliche Mengen die dicht in einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 liegen?
3. Gibt es einen metrisierbaren zerbrechlichen Raum, der bei Wegnahme des Streupunktes total separierbar wird?
4. Falls 1. mit „Ja“ zu beantworten ist, gibt es dann für $\varepsilon > 0$ eine Konstruktion, die (ε) -dicht auf ganz \mathbb{R}^2 ist?

Bei der weiteren Literatursuche fand sich eine einzelne Konstruktion von **R. L. Wilder**³, die sich im Paper [23] findet und auf einem Schlag die Fragen 1 bis 3 positiv beantwortete. Wir haben uns dabei, um den Rahmen einer Bachelorarbeit nicht zu überschreiten, nicht näher mit Frage 3 beschäftigt und stattdessen versucht, Wilders Konstruktion auf die reelle Ebene hochzuziehen und somit Frage 4 positiv zu beantworten. Wilders zerbrechliche Menge ist zwar eine sehr mächtige Konstruktion. Ihr Nachteil im Vergleich mit dem zerbrechlichen Kegel liegt jedoch in der Tatsache, dass man, abgesehen vom Dispersionspunkt, keinen einzigen Punkt der Menge tatsächlich kennt. Wilder macht mehrfach von reinen Existenzaussagen gebrauch und verwendet bereits bei der Konstruktion das Auswahlaxiom.

³Raymond Louis Wilder (1896-1982)

2 Grundlegende Definitionen und Lemmata

Bevor wir die zerbrechlichen Mengen definieren können, benötigen wir Begriffe aus der Theorie der metrischen und topologischen Räume. Die Theorie dazu in den Unterabschnitten 2.1, 2.2, 2.3, 3.1 stammt, falls nicht anders angegeben, aus den Lehrbüchern [12] und [13] von **Horst Herrlich**⁴. Die Theorie zur Mengentheorie in Unterabschnitt 2.4 stammt, falls nicht anders angegeben, aus [15]

2.1 Metriken und Topologien

Definition 2.1 (Metrik, [12] S.2, 1.1.1). *Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Metrik** auf X , wenn für alle $x, y, z \in X$*

(M1) $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit),

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreieckungleichung).

Das Tupel (X, d) heißt **metrischer Raum**. Die zugehörige Metrik bezeichnen wir, falls nicht anders angegeben ab nun immer mit d .

Lemma 2.2 (Minkowskische Ungleichung Siehe [4] S.9-11 F.). *Sei n eine natürliche Zahl und für $1 \leq i \leq n$ seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, dann gilt folgende Ungleichung:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} \quad (1)$$

Sie heißt **Minkowskische⁵ Ungleichung**

Wir kommen nun zum Beispiel der wichtigsten Metriken auf \mathbb{R}^n :

Beispiel 2.3 (euklidische Metrik, Maximumsmetrik [12] S.2-3). *Seien $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y := (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ Die Abbildungen*

1. $d_2 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

2. $d_\infty : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

definieren Metriken auf \mathbb{R}^n . Wir nennen d_2 **euklidische Metrik** und d_∞ **Maximumsmetrik**.

Beweis. Die positive Definitheit und die Symmetrie sind jeweils leicht einzusehen. Sei $z := (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Für d_2 ist die Dreiecksungleichung durch die Minkowskische Ungleichung (1) gegeben, indem man dort $a_i := x_i - z_i$ und $b_i := z_i - y_i$ für $1 \leq i \leq n$ setzt.

Für d_∞ folgt die Dreiecksungleichung da $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_\infty(x, y)$ für $1 \leq i \leq n$ gilt. \square

⁴Horst Herrlich (1937-2015)

⁵Hermann Minkowski (1864-1909)

Bemerkung 2.4 (Siehe [12] S.2). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt $d_2(a, b) = |b - a| = d_\infty(a, b)$

Wenn wir von nun an Teilmengen des \mathbb{R}^n betrachten, seien sie, falls nicht anders angegeben, mit der euklidischen Metrik versehen.

Ein weiteres Beispiel für Metriken auf beliebigen Mengen:

Beispiel 2.5 (Diskrete Metrik, [12] S.2 Beispiel1.1.2). Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren folgende Metrik, die wir **diskrete Metrik** auf X nennen:

$$d_d : X \times X \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Die Eigenschaften (M1), (M2) und (M3) sieht man hierbei sofort ein.

Definition 2.6 (ε -Umgebung, [13] S.4). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Die Menge $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$ heißt **ε -Umgebung** von x .

Definition 2.7 (Umgebung und offene Menge, [12] S.14, 1.2.20). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subseteq X$. U heißt **Umgebung** von $x \in U$, falls es ein $\varepsilon > 0$ und eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(x)$ gibt, sodass $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt.

Wir bezeichnen eine Menge $V \subseteq X$ dann als **offen in** (X, d) (oder einfach **offen**, falls klar ist, welcher metrische Raum gemeint ist), wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist, also wenn es zu jedem $z \in V$ ein $\varepsilon_z > 0$ gibt, sodass $U_{\varepsilon_z}(z) \subseteq V$ ist.

Lemma 2.8 ([12] S.14, Satz 1.2.21). Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt:

1. ε -Umgebungen sind offen.
2. Sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x . Gilt $U \subseteq O \subseteq X$, dann ist O eine Umgebung von x .

Beweis.

1. Sei $\varepsilon > 0$, $x \in X$ und $y \in U_\varepsilon(x)$. Wir setzen $\varepsilon' := \varepsilon - d(x, y)$. Dann gilt $U_{\varepsilon'}(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$, denn sei $z \in U_{\varepsilon'}(y)$, dann gilt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon' = d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon$$

Folglich ist $U_\varepsilon(x)$ offen.

2. Gilt für ein $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(x) \subseteq U$, so auch $U_\varepsilon(x) \subseteq O$. Also ist O Umgebung von x . □

Lemma 2.9 ([12] S.15, 1.2.23). Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum und $\mathcal{A} := \{A \subseteq X \mid A \text{ offen in } \underline{X}\}$ die Menge aller offener Mengen in \underline{X} , dann erfüllt \mathcal{A} die folgenden Eigenschaften:

(T1) $X \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(T2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$,

(T3) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

Beweis.

(T1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, denn es gibt keine Elemente in \emptyset von denen zu zeigen wäre, dass es Umgebung davon ist.

$X \in \mathcal{A}$, denn für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt per Definition:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid |y - x| < \varepsilon\} \subseteq X$$

(T2) Seien $A, B \subseteq X$ offen in X und $x \in A \cap B$, dann gilt insbesondere $x \in A$ und $x \in B$, also gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$, sodass $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ und $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Wählen wir nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dann gilt $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ und $U_\varepsilon(x) \subseteq B$, also $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$. Da $x \in A \cap B$ beliebig war, ist $A \cap B$ Umgebung aller seiner Punkte, also offen. Somit gilt $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(T3) Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ und $x \in \bigcup \mathcal{B}$, dann gibt es ein $A \in \mathcal{B}$, sodass $x \in A$. Da $A \in \mathcal{A}$, ist A per Definition offen, also Umgebung von x . Nun gilt $x \in A \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Also ist \mathcal{B} Umgebung von x . Es folgt $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

□

Definition 2.10 (Topologie und topologischer Raum, [13] S.3, Definition 1.1.1).

1. Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Erfüllt \mathcal{T} die Eigenschaften (T1), (T2) und (T3) aus 2.9, nennen wir \mathcal{T} eine **Topologie**. Die Mengen in \mathcal{T} bezeichnen wir als **offen**.
2. Das Tupel (X, \mathcal{T}) , nennen wir einen **topologischen Raum**. Im weiteren Verlauf sei, falls nicht anders angegeben, mit \underline{X} immer ein topologischer Raum $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ bezeichnet.
3. Ist (X, d) ein metrischer Raum und \mathcal{T}_d die Menge aller bezüglich der Metrik d offenen Mengen in X , dann nennen wir \mathcal{T}_d die **von d induzierte Topologie**. Sei \mathcal{E} eine beliebige Eigenschaft topologischer Räume. Wir schreiben die Eigenschaft \mathcal{E} auch (X, d) zu, falls (X, \mathcal{T}_d) sie hat.
4. Gibt es zu einem topologischen Raum $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ eine Metrik, die \mathcal{T} induziert, so nennen wir \underline{X} **metrisierbar**.

Definition 2.11 (Umgebung in topologischen Räumen [13] S.13, 1.2.7). Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$, dann nennen wir U **Umgebung** von x , falls $x \in U$ und es ein $O \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $x \in O \subseteq U$ ist.

Bemerkung 2.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann offen in (X, d) , wenn sie in dem durch die Metrik d induzierten topologischen Raum (X, \mathcal{T}_d) offen ist.

Daraus folgt dass eine Menge $U \subseteq X$ genau dann Umgebung eines Punktes $x \in (X, d)$ ist, wenn U Umgebung von x in (X, \mathcal{T}_d) ist. Die Umgebungsbegriffe stimmen also überein.

Nun kommen wir zu einem trivialen Beispiel einer Topologie:

Beispiel 2.13 (Diskrete Topologie). Sei X eine beliebige Menge, dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X . Sie erfüllt trivialerweise die Eigenschaften (T1), (T2) und (T3), da $\mathcal{P}(X)$ bereits definitionsgemäß alle Teilmengen von X enthält.

Die diskrete Topologie wird von der diskreten Metrik induziert, denn sei X mit der diskreten Metrik d_d versehen, dann gilt für $x \in X$, $U_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. Es sind also alle einelementigen Teilmengen von X offen in (X, d_d) . Mit der Eigenschaft (T3) sind auch beliebige Vereinigungen von einelementigen Teilmengen von X , also alle Teilmengen von X , offen.

Definition 2.14 (Basis, [13] S.6). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt **Basis** von \mathcal{T} , wenn folgendes gilt: Für jedes $U \in \mathcal{T}$ gibt es eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, sodass $\bigcup \mathcal{A} = U$ ist.

Lemma 2.15 ([13] S.6-7). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum dann existiert eine Basis \mathcal{B} von \mathcal{T} und es gilt $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$.

Beweis. Die Existenz folgt sofort, da \mathcal{T} selbst die Basiseigenschaft erfüllt. Die Inklusion $\mathcal{T} \subseteq \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ folgt aus der Definition des Begriffs der Basis und $\{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{T}$, da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ und \mathcal{T} unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. \square

Folgendes Beispiel benötigen wir in einem späteren Kapitel nochmals, um zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n eine abzählbare Basis besitzt. Dazu benötigen wir jedoch noch ein paar Begriffe, die wir erst an späterer Stelle einführen.

Beispiel 2.16 ([13] S.7 Beispiel 1.1.10). Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum und \mathcal{T}_d die von d induzierte Topologie, dann ist die Menge $\mathcal{B} := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ eine Basis von \mathcal{T}_d .

Beweis. Sei $U \in \mathcal{T}_d$, dann gibt es per Definition von offenen Mengen in metrischen Räumen zu $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ ist. Die Aussage folgt daraus unmittelbar. \square

Definition 2.17 (abgeschlossene Menge, [13] S.11, 1.2.1). Sei $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir bezeichnen eine Menge $A \subseteq X$ als **abgeschlossen in X** (oder einfach **abgeschlossen**, wenn klar ist welcher topologische Raum gemeint ist), wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$ ist.

Lemma 2.18 ([13] S.12, Satz 1.2.3). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge aller in \underline{X} abgeschlossenen Mengen. Dann gilt:

1. X und \emptyset sind Elemente von \mathcal{A}
2. $\bigcap \mathcal{A}$ ist abgeschlossen.
3. Für $A, B \in \mathcal{A}$ ist $A \cup B$ abgeschlossen.
4. Für jede endliche Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist $\bigcup \mathcal{B}$ abgeschlossen.

Beweis.

1. Folgt, da X und \emptyset offen und die Komplementmengen voneinander sind.
2. Da $A \in \mathcal{A}$ abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen. Wir definieren $\mathcal{B} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$, dann ist $\bigcup \mathcal{B}$ offen, da jedes $B \in \mathcal{B}$ offen ist. Wegen $\bigcap \mathcal{A} = X \setminus \bigcup \mathcal{B}$ ist also $\bigcap \mathcal{A}$ abgeschlossen.
3. $X \setminus A, X \setminus B$ sind offen, also ist auch $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ offen und somit $X \setminus (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = A \cup B$ offen.
4. Folgt über Induktion über die Anzahl der Elemente aus 2. □

Definition 2.19 (Berührungspunkt, Häufungspunkt und Verdichtungspunkt, [13] S.16; S.20; S.30). *Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$:*

1. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von A , wenn für jede Umgebung U von x gilt. $U \cap A \neq \emptyset$
2. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von A , wenn für jede Umgebung U von x gilt $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.
3. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Verdichtungspunkt** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn in jeder Umgebung U von x unendlich viele Folgenglieder liegen.
4. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Konvergenzpunkt** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_k \in U$ für $k > n_0$. Wir sagen dann die Folge (a_n) **konvergiert** (gegen a).

Definition 2.20 (dist, [12] S.9). *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren die Funktion*

$$\mathbf{dist} : X \times \mathcal{P}(X) \mapsto \mathbb{R}, \mathbf{dist}(x, A) := \begin{cases} \infty & \text{falls } A = \emptyset \\ \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 2.21 ([13] S.16). *Sei $\underline{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$, dann ist $x \in X$ genau dann ein Berührungspunkt von A in \underline{X} , wenn $\mathbf{dist}(x, A) = 0$ und genau dann ein Häufungspunkt von A , wenn $\mathbf{dist}(x, A \setminus \{x\}) = 0$ ist.*

Lemma 2.22 ([13] S.17, Satz 1.2.22). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X , wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält.*

Beweis.

\Rightarrow Sei A abgeschlossen in X und x ein Berührungspunkt von A , dann gilt für jede Umgebung U von x , dass $U \cap A \neq \emptyset$. Insbesondere gilt dies für offene Mengen, die x enthalten. Da per Definition abgeschlossener Mengen $X \setminus A$ offen ist, kann $X \setminus A$ den Punkt x nicht enthalten. Es folgt $x \in A$.

\Leftarrow Sei A eine Teilmenge von X , die alle ihre Berührungspunkte enthält. Sei $x \in X \setminus A$, dann gibt es also eine Umgebung U , von x mit $U \cap A = \emptyset$. Daraus folgt $U \subseteq X \setminus A$. Mit Bemerkung 2.8 ist $X \setminus A$ Umgebung von x . Da $x \in X \setminus A$ beliebig war, ist $X \setminus A$ Umgebung aller Punkte und somit offen, weshalb A abgeschlossen ist. □

Definition 2.23 (Abschluss, Inneres, [13] S.13, Definition 1.2.7; S.16, 1.2.18). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

1. Wir nennen $\text{cl}_{\underline{X}} A := \{x \in X \mid x \text{ ist Ber\"uhrpunkt von } A\}$ den **Abschluss** von A .
2. Wir nennen $\text{int}_{\underline{X}} A := \{x \in X \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$ den **offenen Kern** oder **das Innere** von A .

Lemma 2.24 ([13] S.16, 1.2.17; S.18 1.2.24). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$.

1. $\text{cl}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} A = \text{cl}_{\underline{X}} A$
2. $\text{cl}_{\underline{X}} A$ ist abgeschlossen
3. Ist $A \subseteq B$ und B abgeschlossen, so gilt $\text{cl}_{\underline{X}} A \subseteq B$
4. Ist $A \subseteq B$, so folgt $\text{int}_{\underline{X}} A \subseteq \text{int}_{\underline{X}} B$

Beweis.

1. Die Inklusion $\text{cl}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} A \supseteq \text{cl}_{\underline{X}} A$ ist trivial.
Sei $x \in \text{cl}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} A$ und O eine offene Umgebung von x , dann ist $\text{cl}_{\underline{X}} A \cap O \neq \emptyset$, denn x ist Ber\"uhrpunkt von $\text{cl}_{\underline{X}} A$. Dies bedeutet, es gibt es ein $y \in \text{cl}_{\underline{X}} A \cap O$. Da O offen ist, ist O Umgebung von y . Wegen $y \in \text{cl}_{\underline{X}} A$ folgt dann $O \cap A \neq \emptyset$, denn da O offen ist, ist es auch Umgebung von y . Da jede Umgebung von x eine offene Umgebung von x als Teilmenge enth\"alt, gilt schon $x \in \text{cl}_{\underline{X}} A$.
2. Folgt direkt aus 1. und 2.22
3. Folgt da jede in \underline{X} abgeschlossene Menge B mit $A \subseteq B$ zumindest die Ber\"uhrpunkte von A enthalten muss.
4. Sei $x \in \text{int}_{\underline{X}} A$, dann gibt es ein $U \subseteq \mathcal{T}$ mit $x \in U \subseteq A$. Dann gilt aber auch $U \subseteq B$, woraus sofort $x \in \text{int}_{\underline{X}} B$ folgt. \square

Definition 2.25 (T1-Raum [13] S.53). Ein topologischer Raum $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ hei\u00dft **T1-Raum**, falls f\"ur jedes $x \in X$ gilt $\text{cl}_{\underline{X}} \{x\} = \{x\}$

Lemma 2.26 ([13] S.53). Ist ein topologischer Raum $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein T1-Raum, so gilt:

1. F\"ur jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.
2. F\"ur $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es eine (offene) Umgebung U_y von y sodass $x \notin U_y$ ist.

Beweis.

1. Folgt mit 2.24

2. Nehmen wir an, es gäbe für ein $y \in X$ keine solche Umgebung, dann würde also für jede Umgebung U von y gelten $x \in U$, also $U \cap \{x\} \neq \emptyset$. Folglich wäre y Berührungspunkt von $\{x\}$, also $y \in \text{cl}_X\{x\}$, im Widerspruch zur Annahme, dass \underline{X} T1-Raum ist. \square

Lemma 2.27 ([13] S.53 Satz 2.4.6). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist \underline{X} metrisierbar, so ist \underline{X} T1-Raum.*

Beweis. Sei \underline{X} metrisierbar und sei d die Metrik, die \mathcal{T} induziert und seien $x, y \in X$. Sei $\varepsilon := \frac{d(x,y)}{2}$, dann folgt $x \notin U_\varepsilon(y)$ und da x und y beliebig waren, folgt $\text{cl}_X\{x\} = \{x\}$ für alle $x \in X$. Also ist \underline{X} ein T1-Raum. \square

Definition 2.28 (Stetigkeit und Homöomorphismus, [13] S.59-62). *Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ und $\underline{Y} := (Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ eine Abbildung:*

1. *Wir nennen f **stetig**, falls für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt*

$$f^{-1}[S] := \{x \in X \mid f(x) \in S\} \in \mathcal{T}$$

2. *Ist f stetig und bijektiv und dessen Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig, so nennen wir f einen **Homöomorphismus***

Lemma 2.29 ([13] S.61, Satz 3.1.4). *Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ und $\underline{Y} := (Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ eine Abbildung. f ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Menge $B \subseteq Y$ die Menge $A := f^{-1}[B]$ abgeschlossen in X ist.*

Beweis.

\Rightarrow Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen und f stetig. Dann ist $Y \setminus B$ offen in \underline{Y} . Da f stetig ist, ist $f^{-1}[Y \setminus B]$ offen in X , also ist $X \setminus f^{-1}[Y \setminus B] = B$ abgeschlossen in X .

\Leftarrow Es sei für jede beliebige abgeschlossene Menge $B \subseteq Y$ die Menge $f^{-1}[B]$ abgeschlossen in X . Sei U eine offene Menge in Y , dann ist also $f^{-1}[Y \setminus U]$ abgeschlossen in X . Also ist $X \setminus f^{-1}[Y \setminus U] = f^{-1}[U]$ offen in X . Da U eine beliebige offene Menge in Y war, ist f stetig. \square

Folgendes Lemma zeigt, dass der Stetigkeitsbegriff auf topologischen Räumen mit dem aus der Analysis bekannten für metrische Räume übereinstimmt. Um später Wilders zerbrechliche Menge auf die reelle Ebene fortzusetzen, werden wir davon gebrauch machen, dass gewisse Eigenschaften zerbrechlicher Mengen unter surjektiven stetigen Abbildungen erhalten bleiben.

Lemma 2.30 ([10] S. 31 Satz 10). *Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ und $\underline{Y} := (Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ eine Abbildung. $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ ist genau dann stetig, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung V von $y := f(x) \in Y$ eine Umgebung U von x gibt, sodass $U \subseteq f^{-1}[V]$ ist.*

Beweis.

\Rightarrow Sei f stetig, $x \in X$ und V Umgebung von $y = f(x)$, dann gibt es ein $O \in \mathcal{S}$, sodass $y \in O \subseteq V$ ist. Da f stetig ist, ist $f^{-1}[O]$ offen in X , also Umgebung von x und es gilt $x \in f^{-1}[O] \subseteq f^{-1}[V]$.

\Leftarrow Es gebe zu jeder Umgebung V von $f(x) \in Y$ eine Umgebung U von $x \in X$, sodass $U \subseteq f^{-1}[V]$ ist. Da per Definitionen jede Umgebung eine offene Menge als Teilmenge enthält, können wir uns auf diese beschränken. Sei nun für O eine offene Menge in Y . Ist $f^{-1}[O] = \emptyset \in \mathcal{T}$ dann sind wir fertig. Wir können also annehmen, dass $f^{-1}[O] \neq \emptyset$. Sei $x \in f^{-1}[O]$, dann gibt es laut Voraussetzung eine offene Umgebung U_x von x , sodass $U_x \subseteq f^{-1}[O]$ ist. Wir wählen zu jedem $x \in f^{-1}[O]$ eine solche Umgebung U_x , dann ist nach Eigenschaft (T3) (Siehe 2.9) für Topologien auch

$$B := \bigcup_{x \in f^{-1}[O]} U_x$$

offen in X .

Da wir zu jedem $x \in f^{-1}[O]$ ein U_x gewählt haben, gilt $B \subseteq f^{-1}[O]$ und wegen $U_x \subseteq f^{-1}[O]$ gilt $f^{-1}[O] \subseteq B$, also gilt $f^{-1}[O] = B$. f ist also stetig. \square

Wenn man einen topologischen Raum $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ gegeben hat möchte man manchmal betrachten, wie sich Teilmengen von $A \subseteq X$ topologisch verhalten. Folgendes Lemma rechtfertigt erst, später so etwas wie zerbrechliche Mengen von \mathbb{R}^2 zu definieren.

Lemma 2.31 ([4], S.22; [13] S.103). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, dann ist $\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf A .*

Beweis.

(T1) Es gilt $\emptyset \cap A = \emptyset$ und $X \cap A = A \Rightarrow \emptyset, A \in \mathcal{T}_A$

(T2) Für $B, C \in \mathcal{T}$ gilt $(B \cap A) \cap (C \cap A) = (B \cap C) \cap A \in \mathcal{T}_A$

(T3) Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, dann gilt $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} (B \cap A) = (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \cap A \in \mathcal{T}_A$, denn $(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \in \mathcal{T}$. \square

Dies motiviert zur nächsten Definition.

Definition 2.32 (Teilraum, [4], S.22). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Wir nennen $\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ die **Teilraumtopologie** und $\underline{A} := (A, \mathcal{T}_A)$ den **durch A induzierten Teilraum** von \underline{X} .*

Wenn wir eine Topologie auf einem topologischen Raum \underline{X} gegeben haben und von einem topologischen Raum \underline{A} auf einer Teilmenge $A \subseteq X$ sprechen, ohne eine konkrete Topologie zu nennen, sei dieser immer mit der Teilraumtopologie versehen. Wenn wir von einem Teilraum eines metrischen Raumes (X, d) sprechen, meinen wir damit den Teilraum, der durch die von (X, d) induzierte Topologie (X, \mathcal{T}_d) induziert wird.

Bemerkung 2.33 ([13] S.103 Satz 4.3.3 (4)). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq B \subseteq X$ und \underline{B} Teilraum von \underline{X} , dann stimmt der durch A induzierte Teilraum von \underline{B} mit dem durch A induzierten Teilraum von \underline{X} überein.*

Lemma 2.34 ([13] S.103 Satz 4.3.3 (3)). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A offen in \underline{X} , dann ist $B \subseteq A$ genau dann offen in \underline{A} , wenn B offen in \underline{X} ist.*

Beweis.

\Rightarrow Sei B offen in A , dann gibt es per Definition der Teilraumtopologie eine offene Menge in C in \underline{X} , sodass $B = A \cap C \in \mathcal{T}$.

\Leftarrow Sei umgekehrt B schon offen in \underline{X} , dann ist wegen $B \subseteq A$, $B = B \cap A$ offen in A . \square

Definition 2.35 (Erblichkeit, [13] S.105, Definition 4.3.6). *Eine Eigenschaft eines topologischen Raumes $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ heißt (offen) **erblich**, wenn sie auch jedem (offenen) Teilraum von \underline{X} zukommt.*

Definition 2.36 (Einschränkung). *Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X), \underline{Y} := (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $A \subseteq X$. Sei $f : X \mapsto Y$ eine Abbildung. Wir nennen die Abbildung $f|_A : A \mapsto Y, x \mapsto f|_A(x) := f(x)$ die **Einschränkung** von X . Wir bezeichnen $f|_A$ als stetig, wenn $f|_A$ bezüglich der Teilraumtopologie stetig ist.*

Lemma 2.37 ([3] S.162, Beweis von Lemma 5.3.14). *Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X), \underline{Y} := (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $A \subseteq X$. Sei $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ eine Abbildung:*

1. *Ist f stetig, so auch $f|_A$.*
2. *Ist f stetig, so ist auch $\tilde{f} : \underline{X} \mapsto \underline{\text{Bild}}(f), x \mapsto \tilde{f}(x) := f(x)$.*

Beweis.

1. Sei B offen in \underline{Y} . Da f stetig ist, ist $f^{-1}[B]$ offen in \underline{X} . Wegen $f|_A^{-1}[B] = f^{-1}[B] \cap A$ ist aufgrund der Definition der Teilraumtopologie also $f|_A^{-1}[B]$ offen in \underline{A} , also $f|_A$ stetig.
2. Sei B eine offene Menge in $\underline{\text{Bild}}(f)$, dann gibt es eine offene Menge C in \underline{Y} mit $C \cap \underline{\text{Bild}}(f) = B$ und es gilt $\tilde{f}^{-1}[B] = f^{-1}[B \cap \underline{\text{Bild}}(f)] = f^{-1}[C] \in \mathcal{T}_X$. Folglich ist \tilde{f} stetig. \square

Wir werden wegen 2. in Zukunft nicht zwischen den oben definierten Abbildungen f und \tilde{f} unterscheiden, falls nur die Stetigkeitseigenschaft benötigt wird.

2.2 Kurzes über Kompaktheit und Vollständigkeit

In diesem Unterabschnitt stellen wir kurz die Begriffe Kompaktheit und Vollständigkeit dar. Viele der hier präsentierten Resultate sind Grundlagen aus der Analysis. Daher werden wir an einigen Stellen für den Beweis auf entsprechende Literatur verweisen.

Definition 2.38 (Cauchy-Folge, [10] S.23). *Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt **Cauchy-Folge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $k, l \geq n_0$ gilt: $d(a_k, a_l) < \varepsilon$.*

Definition 2.39 (Vollständigkeit, [10] S.24). *Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Bemerkung 2.40 ([10] S.24). *Die Umkehrung gilt immer. Es ist also jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge in (X, d) mit Grenzwert a , dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k, l > n_0$ gilt $d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(a_l, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt $d(a_k, a_l) \leq d(a_k, a) + d(a_l, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \square

Folgendes Axiom unterscheidet die reellen Zahlen von den rationalen Zahlen:

Axiom 1 (Vollständigkeit von \mathbb{R} , [9], S.50). (\mathbb{R}, d_2) ist vollständig.

Lemma 2.41 (Vollständigkeit von \mathbb{R}^n , Siehe dazu [10] S. 24, Satz 3). (\mathbb{R}^n, d_2) ist vollständig.

Definition 2.42 (Überdeckung [10] S.37). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum $A \subseteq X$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. \mathcal{A} heißt **Überdeckung** von A , falls $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ ist. \mathcal{A} heißt **offene Überdeckung**, falls darüber hinaus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ gilt.

Definition 2.43 (Kompaktheit, [10] S. 37; [1] S.49, Definition 7.2). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. \underline{X} heißt **kompakt**, falls zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ von \underline{X} eine endliche Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ existiert, sodass bereits \mathcal{B} Überdeckung von \underline{X} ist. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **kompakt**, falls der Teilraum \underline{A} kompakt ist.

Definition 2.44 (Bildtreue [13] S.174). Eine Eigenschaft topologischer Räume heißt **bildtreu**, wenn sie mit einem topologischen Raum \underline{X} auch automatisch einem weiteren topologischen Raum \underline{Y} zukommt, falls eine surjektive stetige Abbildung $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ existiert.

Lemma 2.45 ([13] S.206, Satz 7.1.6). *Kompaktheit ist bildtreu.*

Beweis. Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X)$ und $\underline{Y} := (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, \underline{X} kompakt und $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ eine surjektive stetige Funktion. Sei \mathcal{B} eine offene Überdeckung von Y . Da f stetig ist, gilt $\mathcal{A} := \mathcal{T}_X$, ist also eine offene Überdeckung von X . Da \underline{X} kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\tilde{\mathcal{A}} := \{A_1, A_2, \dots, A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ derart, dass $\bigcup \tilde{\mathcal{A}} = X$. Nun gilt aber für $1 \leq i \leq n$, dass $A_i = f^{-1}[B_i]$ für ein $B_i \in \mathcal{B}$. Da f surjektiv ist, gilt $\bigcup_{i=1}^n B_i = Y$. Wir haben also eine endliche Teilmenge von \mathcal{B} gefunden, die Überdeckung von Y ist. Folglich ist \underline{Y} kompakt. \square

Folgende für metrische Räume äquivalente Charakterisierung der Kompaktheit wird in [12] (S.85, 4.2.1) als Definition für die Kompaktheit metrischer Räume angegeben:

Satz 2.46 (Char. kompakter metrischer Räume [1] S. 49, Theorem 7.3). *Ein metrischer Raum $\underline{X} \subseteq (X, d)$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in \underline{X} einen Verdichtungspunkt besitzt.*

Beweis.

\Rightarrow Sei \underline{X} kompakt und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Nehmen wir an, dass (a_n) keinen Verdichtungspunkt hat. In diesem Fall gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U_x , die höchstens endlich viele Folgenglieder enthält. Wir setzen $\mathcal{A} := \{U_x \mid x \in X\}$. Da \underline{X} kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, die bereits Überdeckung von X ist. Die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \text{ ist Folgenglied von } (a_n) \text{ und } a_k \in \bigcup \mathcal{B}\}$ ist endlich. Ein Widerspruch dazu, dass \mathcal{B} Überdeckung von X ist. Jede Folge in \underline{X} hat also einen Verdichtungspunkt.

\Leftarrow Da der Beweis der Umkehrung sich sehr in die Länge zieht, verweisen wir dafür auf [1] S. 49, Theorem 7.3. \square

Definition 2.47 (Beschränktheit, vgl. [10] S.24, Definition(Durchmesser)). Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **beschränkt**, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \leq M$ ist.

Satz 2.48 (Siehe [10] S.40). Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum. Jede kompakte Teilmenge $A \subseteq X$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Die Umkehrung von Satz 2.48 gilt für allgemeine metrische Räume nicht, sondern nur für endlichdimensionale normierte Räume, was wir hier aber nicht weiter ausführen wollen. Es gilt aber folgendes Ergebnis:

Satz 2.49 (von Heine-Borel⁶, Siehe [1] S.51 Theorem 7.4). Sei \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik d_2 versehen und sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist A kompakt.

Satz 2.50 ([12] S.86, Satz 4.4.2). Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum. Ist (X, d) kompakt, so ist (X, d) vollständig.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) , dann besitzt (a_n) einen Verdichtungspunkt a . Sei $\varepsilon > 0$, dann liegen in $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n) . Es gibt also zu $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $k > n_0$, sodass $a_k \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$. Da (a_n) Cauchy-Folge ist können wir n_0 so groß wählen, dass für alle $l, m > n_0$ gilt $d(a_l, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen $m = k$ und erhalten:

$$d(a_l, a) \leq d(a_l, a_k) + d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da a_l mit $l > n_0$ hier beliebig wählen können, konvergiert die Folge (a_n) gegen a . (X, d) ist also vollständig. \square

2.3 Dichtheitsbegriffe und der Bairsche Kategoriensatz

Definition 2.51 (Dichtheit, [12] S.56, 3.2.1). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **dicht in \underline{X}** (oder nur **dicht**, falls klar ist, welcher topologische Raum gemeint ist), wenn $\text{cl}_{\underline{X}} A = X$ ist.

Lemma 2.52. Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann dicht in \underline{X} , wenn zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder Umgebung U von x ein $a \in A$ existiert, sodass $a \in U$ ist.

Beweis. Dies ist nur eine Umformulierung der Definition von Dichtheit, indem man die Definition des Abschlusses benutzt. \square

Lemma 2.53 ([13] S.64, 3.1.18(c)). Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X)$ und $\underline{Y} := (Y, \mathcal{T}_Y)$. Ist $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ stetig surjektiv und A eine in \underline{X} dichte Menge, dann ist $f[A]$ dicht in \underline{Y} .

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig und V eine offene Umgebung von y , dann ist $U := f^{-1}[V]$ offen in \underline{X} und nicht leer, da f surjektiv ist. Mit Bemerkung 2.52 ist $U \cap A \neq \emptyset$. Sei $a \in U \cap A$, dann liegt $f(a)$ in V . Also gilt $f[A] \cap V \neq \emptyset$. Da $y \in Y$ beliebig und V beliebige offene Umgebung von y war, gilt $\text{cl}_{\underline{Y}} f[A] = Y$, also ist $f[A]$ dicht in \underline{Y} . \square

⁶Eduard Heine (1821–1881) und Émile Borel (1871–1956)

Definition 2.54 (ε -dicht, [12] S.80, 4.1.1). Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum und $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt ε -**dicht** in \underline{X} , wenn für jeden Punkt $x \in X$ gilt, $\text{dist}(x, A) < \varepsilon$.

Bemerkung 2.55 (Vgl. etwa [12] 4.1.2). Eine Menge A ist mit Lemma 2.52 und Bemerkung 2.21 genau dann dicht in \underline{X} , wenn sie 0-dicht ist.

Definition 2.56 (Isolierter Punkt, in sich dicht, [12] S.66, 3.4.4). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum:

1. Ein Punkt $x \in X$ heißt **isoliert** in \underline{X} , falls $\{x\}$ offen in X ist.
2. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **in sich dicht**, falls die Teilraumtopologie \underline{A} keine isolierten Punkte enthält.

Es folgt noch ein weiterer Dichtheitsbegriff im Hinblick auf den Bairschen⁷ Kategoriensatz:

Definition 2.57 (Nirgendes dicht, 2. Kategorie [12] S.66, 3.4.1). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum

1. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **nirgendes dicht**, falls $\text{int}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} A = \emptyset$.
2. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **von 2. Kategorie**, falls es keine abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nirgendes dichter Mengen gibt, sodass $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Die Bedingung „nirgendes dicht“ für eine Menge $A \subseteq X$ bedeutet, dass $\text{cl}_{\underline{X}} A$ Umgebung keines seiner Punkte ist. Dies werden wir im nächsten Lemma präzisieren:

Lemma 2.58. Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ nirgendes dicht in \underline{X} .

1. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gilt $U_\varepsilon(x) \setminus \text{cl}_{\underline{X}} A \neq \emptyset$.
2. Ist $B \subseteq A$, so ist B nirgendes dicht in \underline{X} .

Beweis.

1. Nehmen wir an $U_\varepsilon(x) \setminus \text{cl}_{\underline{X}} A = \emptyset$, dann ist $U_\varepsilon(x) \subseteq \text{cl}_{\underline{X}} A$, woraus folgt $x \in \text{int}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} A$. Ein Widerspruch, denn A ist nirgendes dicht.
2. Mit Bemerkung 2.24 folgt $\text{cl}_{\underline{X}} B \subseteq \text{cl}_{\underline{X}} A$ und daraus mit selbiger Bemerkung $\text{int}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} B \subseteq \text{int}_{\underline{X}} \text{cl}_{\underline{X}} A = \emptyset$. \square

Der Bairsche Kategoriensatz wird uns zeigen, dass jede nichtleere offene Teilmenge des Cantorschen Diskontinuums, welches wir in Abschnitt 3 einführen, von 2. Kategorie ist. Dieses Ergebnis benötigen wir später um den Zusammenhang (Siehe Unterabschnitt 3.1) des zerbrechlichen Kegels⁸ zu zeigen:

⁷René Louis Baire (1874-1932)

⁸4.12

Satz 2.59 (Bairscher Kategoriensatz, [17] S.166, Theorem 8.2). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, dann ist jede nichtleere⁹, offene Teilmenge von X von 2. Kategorie.*

Beweis. Sei A offen in (X, d) . Wir nehmen an

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (2)$$

wobei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie nirgends dichter Teilmengen von X ist. Seien $a_0 \in A$ und $\varepsilon_0 > 0$ so gewählt, dass $U_{\varepsilon_0}(a_0) \subseteq A$ ist. Da nun A_1 nirgends dicht ist, ist $\text{cl}_X A_1$ keine Umgebung von a_0 , also gilt $U_{\varepsilon_0}(a_0) \setminus \text{cl}_X A_1 \neq \emptyset$. Wir wählen $a_1 \in U_{\varepsilon_0}(a_0) \setminus \text{cl}_X A_1$, dann gilt $a_1 \in A$. Da $a_1 \notin \text{cl}_X A_1$, gibt es ein $\tilde{\varepsilon}_1$, so dass $U_{\tilde{\varepsilon}_1}(a_1) \cap A_1 = \emptyset$ und $U_{\tilde{\varepsilon}_1}(a_1) \subseteq A$. Wir wählen ε_1 so, dass $0 < \varepsilon_1 < \min\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0 - d(a_0, a_1), \tilde{\varepsilon}_1\}$ gilt. Dann haben wir

1. $U_{\varepsilon_1}(a_1) \cap A_1 = \emptyset$,
2. $U_{\varepsilon_1}(a_1) \subseteq U_{\varepsilon_0}(a_0)$,
3. $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Wir nehmen nun an, dass wir für ein $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ bereits ε_k und a_k gewählt haben, sodass $U_{\varepsilon_k}(a_k) \cap A_k = \emptyset$, $U_{\varepsilon_k}(a_k) \subseteq U_{\varepsilon_{k-1}}(a_{k-1}) \subseteq U_{\varepsilon_0}(a_0)$ und $\varepsilon_k < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2} < 2^{-k} \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Wir wählen nun für $n+1$ ein $a_{n+1} \in U_{\varepsilon_n}(a_n) \setminus \text{cl}_X A_{n+1}$ und ein $\tilde{\varepsilon}_{n+1}$, sodass $U_{\tilde{\varepsilon}_{n+1}}(a_{n+1}) \cap A_{n+1} = \emptyset$, $U_{\tilde{\varepsilon}_{n+1}}(a_{n+1}) \subseteq A$, sowie

$$0 < \varepsilon_{n+1} < \min\left\{\frac{\varepsilon_n}{2}, \varepsilon_n - d(a_n, a_{n+1}), \tilde{\varepsilon}_{n+1}\right\}$$

Dann gilt:

1. $U_{\varepsilon_{n+1}}(a_{n+1}) \cap A_{n+1} = \emptyset$ (wegen $\varepsilon_{n+1} < \tilde{\varepsilon}_{n+1}$),
2. $U_{\varepsilon_{n+1}}(a_{n+1}) \subseteq U_{\varepsilon_n}(a_n) \subseteq U_{\varepsilon_0}(a_0)$ (wegen $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n - d(a_n, a_{n+1})$),
3. $\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n}{2} < 2^{-(n+1)} \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Damit haben wir induktiv eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert und weil $a_l \in U_{\varepsilon_{n-1}}(a_{n-1})$ für $l \geq n$ ist, folgt, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $l \geq n \Rightarrow d(a_l, a_{n-1}) \leq 2^{-(n-1)} \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Daraus folgern wir jetzt, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$, dann wählen wir ein n_0 so, dass $2^{-n_0} \frac{\varepsilon_0}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Seien nun $k, l \geq n_0$, dann gilt wegen $a_k, a_l \in U_{\varepsilon_{n_0}}(a_{n_0})$:

$$d(a_k, a_l) \leq d(a_k, a_{n_0}) + d(a_l, a_{n_0}) \leq \varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{n_0} \leq 2 \cdot 2^{-n_0} \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon$$

Da (X, d) vollständig ist, besitzt also die Folge (a_n) als Folge in X einen Grenzwert a in X und aufgrund der Konstruktion der Folge (a_n) muss $a \in U_{\varepsilon_n}(a_n) \subseteq U_{\varepsilon_0}(a_0) \subseteq A$ sein für alle $n \in \mathbb{N}$. Desweiteren haben wir diese auch so gewählt, dass $\text{cl}_X U_{\varepsilon_n}(a_n) \cap A_k = \emptyset$ ist, für $k \leq n$ und jedes feste $n \in \mathbb{N}$, weshalb dann auch $a \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Wegen (2) folgt also auch $a \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Ein Widerspruch. A ist also von 2. Kategorie. \square

⁹In [17] S.166, Theorem 8.2 fehlt die Voraussetzung "nichtleer", ist jedoch offenbar nötig, damit der Satz gültig ist

2.4 Etwas Mengentheorie

Wir benötigen im Hinblick auf die Konstruktion einer zerbrechlichen Menge in \mathbb{R}^2 von **R. L. Wilder**¹⁰, die wir später vorstellen werden noch etwas Mengentheorie. Falls nicht anders angegeben stammt die Theorie dazu in diesem Unterabschnitt 2.4 aus [15]. Insbesondere basiert die Konstruktion von Wilders zerbrechliche Menge, im Gegensatz zum zerbrechlichen Kegel, auf Bijektionen, deren Existenzbeweise nicht konstruktiv sind, sondern das Auswahlaxiom, das von **Ernst Zermelo**¹¹ erstmals in folgender Form formuliert wurde, verwenden:

„1) Es sei M eine beliebige Menge von der Mächtigkeit m , deren Elemente mit m bezeichnet werden mögen, M' von der Mächtigkeit m' , eine ihrer Teilmengen, welche mindestens ein Element m enthalten muss, aber auch alle Elemente von M enthalten darf und $M - M'$ ¹² die zu M' „komplementäre“ Menge. Zwei Teilmengen gelten als verschieden, wenn eine von ihnen irgend ein Element enthält, das in der anderen nicht vorkommt. Die Menge aller Teilmengen M' werde mit \mathcal{M} bezeichnet.

2) Jeder Teilmenge M' denke man sich ein Element m'_1 zugeordnet, das in M' selbst vorkomme und das ausgezeichnete Element von M' genannt mögen werde.“ [24] S.514

Wir wollen das Auswahlaxiom wie folgend definieren:

Axiom 2 (Auswahlaxiom, [14] S.5). *Sei X eine Menge und \mathcal{M} eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X mit $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Dann gibt es eine Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto X$ derart, dass für $M \in \mathcal{M}$ gilt $f(M) \in M$. Wir nennen eine solche Funktion f eine **Auswahlfunktion**. Das **Auswahlaxiom** besagt, dass eine solche Auswahlfunktion für beliebiges X und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ immer existiert.*

Daraus folgt eine etwas schwächere Aussage, mit der man jedoch etwa keine nicht messbaren Mengen aus den Vitali-Mengen, die wir später noch sehen werden, konstruieren kann. Wir wollen dies hier nur erwähnen und auf ([14]) verweisen, da es den Rahmen der Arbeit sprengen würde, darauf einzugehen:

Axiom 3 (Abzählbares Auswahlaxiom, [14] S.22). *Sei X eine Menge und \mathcal{M} eine abzählbare Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X mit $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Dann gibt es eine Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto X$ derart, dass für $M \in \mathcal{M}$ gilt $f(M) \in M$. Wir nennen eine solche Funktion f eine **abzählbare Auswahlfunktion**. Das **abzählbare Auswahlaxiom** besagt, dass eine solche Auswahlfunktion für beliebiges X und jede abzählbare Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ existiert.*

Bemerkung 2.60. *Das abzählbare Auswahlaxiom folgt direkt aus dem Auswahlaxiom.*

Folgendes Lemma kann man zeigen, indem man nur das abzählbare Auswahlaxiom voraussetzt:

¹⁰Raymond Louis Wilder, 1896-1982

¹¹Ernst Zermelo, 1871-1953

¹²In älteren mathematischen Texten verwendet man $M - M'$ anstatt $M \setminus M'$ als Notation für Differenzmengen

Lemma 2.61 ([15] S.141). *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbar unendlicher Mengen ist abzählbar unendlich.*

Beweis. Sei X eine unendliche Menge und $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen von X , derart, dass für $i \in \mathbb{N}$ gilt, A_i ist abzählbar unendlich und $\bigcup\{A_i\} = X$.

Sei für $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_i := \{(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N}) : a_j \in A_i, (\forall x \in A_i \exists j \in \mathbb{N}) : a_j = x\}$. Mithilfe des abzählbaren Auswahlaxioms und einer abzählbaren Auswahlfunktion können wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(a_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ wählen. Für jedes $x \in X$ gibt es nun per Konstruktion ein Tupel $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, sodass $x = a_{i,j}$, daher gibt es eine surjektive Funktion $g : \mathbb{N}^2 \mapsto X$. Da \mathbb{N}^2 abzählbar ist (Siehe etwa [15] S.75 Theorem 3.7), gibt es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^2$. Somit gibt es eine surjektive Funktion $g \circ f : \mathbb{N} \mapsto X$. X ist also höchstens abzählbar. Da X unendlich ist, folgt X ist abzählbar unendlich. \square

Im folgenden werden wir einigen Aufwand betreiben, um zu zeigen, dass eine bijektive Abbildung zwischen dem Intervall $[0, 1]$ und der Menge aller abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^2 existiert.

Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n mit euklidischer Metrik/Topologie eine abzählbare Basis besitzt:

Lemma 2.62 ([13] S.9, Satz 1.1.17). *Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum und \mathcal{T}_d die von d induzierte Topologie. Es existiere eine abzählbare in \underline{X} dichte Menge D . Dann gibt es für jedes $x \in \underline{X}$ und $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $C \subseteq D$, sodass gilt*

$$U_\varepsilon(x) = \bigcup_{c \in C} U_{\frac{1}{n_c}}(c)$$

mit $n_c \in \mathbb{N}$ für alle $c \in C$.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig und $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig. Da $U_\varepsilon(x)$ offen ist, gibt es ein $\delta_y > 0$, sodass $U_{\delta_y}(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$, etwa $\delta_y := \frac{\varepsilon - d(x,y)}{2}$. Wir wählen $n_y \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $\frac{1}{n_y} \leq \delta_y$ ist. In $U_{\delta_y}(y)$ gibt es nun, da D dicht in \underline{X} liegt, ein $c_y \in U_{\frac{1}{n_y}}(y)$ und es gilt andererseits auch $y \in U_{\frac{1}{n_y}}(c_y)$. Sei $z \in U_{\frac{1}{n_y}}(c_y)$, dann gilt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, c_y) + d(c_y, z) < d(x, y) + 2\delta_y = \varepsilon$$

Folglich ist $U_{\frac{1}{n_y}}(c_y) \subseteq U_\varepsilon(x)$. Daraus folgt

$$U_\varepsilon(x) = \bigcup_{y \in U_\varepsilon(x)} U_{\frac{1}{n_y}}(c_y)$$

Man beachte hier, dass wir, falls $U_\varepsilon(x)$ unendlich ist, das Auswahlaxiom benötigen, da wir für jedes $y \in U_\varepsilon(x)$ aus einer Umgebung von y ein Element der dichten Menge D wählen müssen. \square

Lemma 2.63 ([13] S.9, Satz 1.1.17). *Sei $\underline{X} := (X, d)$ ein metrischer Raum und \mathcal{T}_d die von d induzierte Topologie. Es existiere eine abzählbar unendliche in \underline{X} dichte Menge D , dann besitzt \mathcal{T}_d eine abzählbar unendliche Basis.*

Beweis. An Beispiel 2.16 haben wir gesehen, dass die Menge $\mathcal{B} := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ eine Basis eines metrischen Raumes darstellt. Sei also $U \in \mathcal{T}_d$, dann gibt es eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, sodass $U = \bigcup \mathcal{A}$. Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ gibt es nun eine Teilmenge $D_A \subseteq D$ und zu $c \in D_A$ ein $n_c \in \mathbb{N}$, sodass $A = \bigcup \mathcal{H}_A$, wobei $\mathcal{H}_A := \{U_{\frac{1}{n_c}}(c) \mid c \in D_A\}$. Es folgt

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bigcup \mathcal{H}_A.$$

Damit ist die Menge $\mathcal{D} := \bigcup_{a \in D} \{U_{\frac{1}{n}}(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von \mathcal{T}_d und mit Lemma 2.61 abzählbar. \square

Korollar 2.64 ([13] S.9). *Für $n \in \mathbb{N}$ hat \mathbb{R}^n mit der euklidischen Topologie eine abzählbar unendliche Basis.*

Lemma 2.65. *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und \mathcal{T} habe eine abzählbar unendliche Basis. Dann gibt es eine Bijektion zwischen \mathcal{T} und $\mathcal{S} := \{S \mid S \text{ ist Folge in } \{0, 1\}\}$*

Beweis. Sei $\mathcal{B} := \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$. Wir definieren eine Funktion $\Phi : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{S}$ wie folgt:

Für $U \in \mathcal{T}$ sei $\Phi(U) := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jene Folge mit $a_n = 1$, falls $B_n \subseteq U$ und $a_n = 0$ sonst. Φ ist offensichtlich bijektiv und leistet somit das geforderte. \square

Folgendes Lemma ist eine elementare Aussage über reelle Zahlen und rechtfertigt die Darstellung von Zahlen im Intervall $[0, 1]$ in verschiedenen Zahlensystemen und setzt diese in Relation zu Folgen in endlichen Mengen:

Lemma 2.66 (Siehe [9] S.53, Satz 5). *Für jedes $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 1$, lässt sich $x \in [0, 1]$ als Summe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b^{-i}$ darstellen, wobei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \dots, b-1\}$ ist.*

Lemma 2.67 ([7] S.30, Proposition 2.1.3). *Sei A die Menge aller Folgen in $\{0, 2\}$, dann gibt es zu $x \in [0, 1]$ höchstens eine Folge $(a_n) \in A$, sodass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.*

Beweis. Sei $(a_n) \in A$, sodass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Nehmen wir an, es gäbe noch eine zweite Folge $(b_n) \in A$ mit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$ und $(a_n) \neq (b_n)$. Wegen $(a_n) \neq (b_n)$ muss es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Sei n_0 so gewählt, dass es minimal in dieser Eigenschaft ist. Ohne Beschränkung nehmen wir an, dass dann $a_{n_0} = 0$ und $b_{n_0} = 2$. Dann gilt $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n}$. Daraus folgt $\frac{2}{3^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit 3^{n_0} und erhalten $2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Dies ist ein Widerspruch. \square

Lemma 2.68. *Es existiert eine Bijektion zwischen dem Intervall $]0, 1[$ und \mathbb{R}*

Beweis. $\Phi(x) :]0, 1[\mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \Phi(x) := \tan(-\frac{\pi}{2} + \pi x)$. \square

Lemma 2.69 ([15] S.67, Lemma 1.7). *Seien A_1, B, A Mengen mit $A_1 \subseteq B \subseteq A$ und es gebe eine injektive Funktion $\Phi : A \mapsto A_1$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen B und A .*

Beweis. Wir setzen $A_0 := A$ und $B_0 := B$. Wir definieren rekursiv Mengen $A_{n+1} = \Phi[A_n]$ und $B_{n+1} = \Phi[B_n]$ für $n \in \mathbb{N}$. Laut Voraussetzung galt $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$. Nun gilt wegen $A_{n+1} = \Phi[A_n]$ und da Φ eine Abbildung von A_0 nach A_1 ist, dass $A_{n+1} \subseteq A_n$. Da $B_0 \subseteq A_0$, gilt außerdem $B_n \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $C_n := A_n \setminus B_n$,

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$$

sowie $D := A \setminus C$. Laut Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $\Phi[C_n] = \Phi[A_n \setminus B_n] = \Phi[A_n] \setminus \Phi[B_n] = A_{n+1} \setminus B_{n+1} = C_n$. Daraus folgt

$$\Phi[C] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad (3)$$

Nun definieren wir die Funktion $\Psi : A \mapsto B, x \mapsto \Psi(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{falls } x \text{ in } C \\ x & \text{falls } x \text{ in } D \end{cases}$

Die Einschränkung von Ψ auf D bildet offensichtlich das Intervall D bijektiv auf sich ab und es gilt mit (3) $\Psi[C] \subseteq C$. Damit ist Ψ auf jeden Fall injektiv, denn Φ ist injektiv. Aber mit (3) ist Ψ auch surjektiv, denn $\Phi[C] \cup D = B$. \square

Korollar 2.70. *Es gibt eine Bijektion zwischen $[0, 1]$ und \mathbb{R} .*

Korollar 2.71 ([15] S.99 Theorem 2.3). *Es gibt eine injektive Funktion Θ von \mathbb{R} nach $\mathcal{S} := \{S \mid S \text{ ist Folge in } \{0, 1\}\}$.*

Beweis. Folgt mit Lemma 2.66 \square

Lemma 2.72 ([15], S.91). *Es gibt eine injektive Funktion*

$$\Psi : \mathcal{S} := \{S \mid S \text{ ist Folge in } \{0, 1\}\} \mapsto [0, 1]$$

Beweis. Sei $\mathcal{R} := \{R \mid R \text{ ist Folge in } \{0, 1, 2\}\}$ Wir definieren

$$\Theta : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \Theta((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \begin{cases} b_n = 2 & \text{falls } a_n = 1 \\ b_n = 0 & \text{falls } a_n = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist injektiv. Sei A die Menge aller Folgen in $\{0, 2\}$, dann gibt es mit Lemma 2.67 zu $x \in [0, 1]$ höchstens eine Folge $(a_n) \in A$, sodass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ und es gilt $A = \text{Bild}(\Theta)$. Also gibt es eine injektive Funktion $\Phi : \text{Bild}(\Theta) \mapsto [0, 1]$. Somit ist $\Psi := \Phi \circ \Theta : \mathcal{S} \mapsto [0, 1]$ injektiv. \square

Satz 2.73 (von Cantor-Bernstein¹³, [15] S.). *Seien A und B Mengen derart, dass eine injektive Funktion $\Phi : A \mapsto B$ und eine injektive Funktion $\Theta : B \mapsto A$ existiert, dann existiert eine bijektive Funktion $\Psi : B \mapsto A$.*

Beweis. Betrachten wir die Funktion $\Theta \circ \Phi$. Laut Voraussetzung gilt $\Phi[A] \subseteq B$ und $\Theta[B] \subseteq A$, also $\Theta(\Phi[A]) \subseteq \Theta[B] \subseteq A$. Aus Lemma 2.69 folgt dann, dass es eine Bijektion $\Omega : \Theta[B] \mapsto A$ gibt. Die Funktion $\Psi := \Omega \circ \Theta$ ist dann bijektiv und erfüllt somit das Gewünschte. \square

¹³Felix Bernstein 1878-1956

Korollar 2.74. *Es gibt eine bijektive Funktion zwischen*

$$\mathcal{S} := \{S \mid S \text{ ist Folge in } \{0, 1\}\}$$

und dem Intervall $[0, 1]$.

Beweis. Mit Lemma 2.66 existiert eine injektive Funktion von $[0, 1]$ nach \mathcal{S} und mit Lemma 2.72 von \mathcal{S} nach $[0, 1]$. Mit dem Satz von Cantor-Bernstein folgt daraus die Behauptung. \square

Korollar 2.75. *Es gibt eine Bijektion zwischen dem Intervall $[0, 1]$ und der euklidischen Topologie \mathcal{T} auf \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Mit Korollar 2.64 hat \mathbb{R}^2 eine abzählbare Basis und mit Lemma 2.65 existiert dann eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{S} := \{S \mid S \text{ ist Folge in } \{0, 1\}\}$ und \mathcal{T} . Mit Korollar 2.74 existiert eine Bijektion zwischen \mathcal{S} und dem Intervall $[0, 1]$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. \square

Damit erhalten wir das Ergebnis, das wir später sowohl bei der Konstruktion von Wilders zerbrechlicher Menge, als auch bei den darauf basierenden weiterführenden Konstruktionen benötigen:

Korollar 2.76. *Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Topologie versehen, dann existiert eine Bijektion zwischen dem Intervall $[0, 1]$ und der Menge aller abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^2 .*

3 Zusammenhang und Zerbrechliche Mengen

3.1 Zusammenhang in topologischen Räumen

Wir wollen in diesem Kapitel den für diese Arbeit entscheidenden Begriff des Zusammenhangs definieren. Dabei gibt es auch noch weitere Zusammenhangskonzepte, von denen wir hier den Wegzusammenhang einführen werden.

Definition 3.1 (Zerlegungsmenge [13] S.169). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt **Zerlegungsmenge** von X , wenn Z offen und abgeschlossen ist. Sei $B \subseteq X$. Wir sagen Z ist Zerlegungsmenge von B , wenn $Z \cap B$ gleichzeitig offen und abgeschlossen im Teilraum \underline{B} ist.*

Bemerkung 3.2. *Zerlegungsmengen treten immer paarweise auf. Ist in einem topologischen Raum (X, \mathcal{T}) die Menge Z Zerlegungsmenge, so ist auch $X \setminus Z$ Zerlegungsmenge, denn Z ist offen, also ist $X \setminus Z$ abgeschlossen und Z ist abgeschlossen, also ist $X \setminus Z$ offen.*

Das motiviert zu folgender Definition:

Definition 3.3 (Komplementäre Zerlegungsmenge). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und Z eine Zerlegungsmenge von X , dann nennen wir $X \setminus Z$ die zu Z **komplementäre Zerlegungsmenge** und bezeichnen $X \setminus Z$ mit Z^C .*

Definition 3.4 (Zusammenhang [13] S.169). *Wir nennen einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) **zusammenhängend**, wenn \emptyset und X die einzigen Zerlegungsmengen in \underline{X} sind und eine Teilmenge $A \subseteq X$ **zusammenhängend**, wenn der Teilraum \underline{A} **zusammenhängend** ist.*

Lemma 3.5 ([3] S.230 Lemma 6.1.2). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$. A ist genau dann **zusammenhängend** in \underline{X} , wenn für zwei beliebige nichtleere in \underline{X} offene Mengen U_1, U_2 mit $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ und jede Teilmenge $Z \subseteq A$ gilt:*

$$Z \subseteq U_1 \text{ und } A \setminus Z \subseteq U_2 \Rightarrow Z = \emptyset \text{ oder } Z = A$$

Beweis.

\Rightarrow Sei $A \subseteq X$ **zusammenhängend** und seien U_1, U_2 offen in \underline{X} und nichtleer und $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$. Sei $\emptyset \neq Z \subseteq A$ mit $Z \subseteq U_1$ und $Z^C := A \setminus Z \subseteq U_2$. Dann sind $Z = Z \cap U_1$ und $A \setminus Z = (A \setminus Z) \cap U_2$ per Definition der Teilraumtopologie offen in \underline{A} . Damit ist Z Zerlegungsmenge von \underline{A} und da $Z \neq \emptyset$, folgt $Z = A$.

\Leftarrow Sei $A \subseteq X$ nicht **zusammenhängend**, dann gibt es eine Zerlegungsmenge $\emptyset \neq Z \neq A$ in \underline{A} . Dies bedeutet Z ist offen und abgeschlossen. Also ist $Z^C := A \setminus Z \neq \emptyset$ ebenfalls offen in \underline{A} . Dies bedeutet nach Definition der Teilraumtopologie, dass es in \underline{X} offene Mengen U_1 und U_2 gibt, mit $Z = A \cap U_1$ und $Z^C = A \cap U_2$. Es gilt nun $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$, $Z \subseteq U_1$ und $Z^C \subseteq U_2$, aber $\emptyset \neq Z \neq A$. \square

Definition 3.6 (Kette, Verkettung [13] S.170). *Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $n \in \mathbb{N}$*

1. *Ein n -Tupel (A_1, A_2, \dots, A_n) mit $A_i \in \mathcal{A}$ für $1 \leq i \leq n$ heißt **Kette**, falls für alle $1 \leq i \leq n - 1$ gilt: $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$.*
2. *Wir nennen \mathcal{A} **verkettet**, wenn zu beliebigen $A, B \in \mathcal{A}$ eine Kette mit $A_1 = A$ und $A_n = B$ existiert.*

Lemma 3.7 (Zusammenhang verketteter Mengen, [13] S.173). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ derart, dass jedes $A \in \mathcal{A}$ **zusammenhängend** ist und \mathcal{A} **verkettet** ist, dann ist $\bigcup \mathcal{A}$ **zusammenhängend**.*

Beweis. Sei $\emptyset \neq Z \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ eine Zerlegungsmenge von $\bigcup \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$, dann ist $Z \cap A$ Zerlegungsmenge von A , denn $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Es folgt also entweder $A \subseteq Z$ oder $A \subseteq \bigcup \mathcal{A} \setminus Z$, denn A ist **zusammenhängend**. Ohne Beschränkung können wir annehmen $A \subseteq Z$ (sonst vertauschen wir eben die Benennung von Z und $\bigcup \mathcal{A} \setminus Z$). Sei nun $B \in \mathcal{A}$, dann gibt es eine Kette $(A = A_1, A_2, \dots, A_n = B)$ in \mathcal{A} . Für jedes A_i , $1 \leq i \leq n$ gilt dann analog zu A , dass $A_i \subseteq Z$ oder $A_i \subseteq \bigcup \mathcal{A} \setminus Z$ ist. Damit gilt für $1 \leq i \leq n - 1$: $A_i \subseteq Z \Rightarrow A_{i+1} \cap Z \neq \emptyset$, weil $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ gilt. Daraus folgt dann $A_{i+1} \in Z$. Da $A_1 = A \subseteq Z$ folgt so also $B = A_n \subseteq Z$.

Wir haben somit folgendes gezeigt:

Ist für ein $A \in \mathcal{A}$ und eine Zerlegungsmenge Z von $\bigcup \mathcal{A}$ $A \cap Z \neq \emptyset$, so folgt $A \subseteq Z$ woraus für beliebiges $B \in \mathcal{A}$ folgt, dass $B \subseteq Z$, also insgesamt $\bigcup \mathcal{A} \subseteq Z$. Wegen $Z \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ folgt $\bigcup \mathcal{A} = Z$. Somit ist $\bigcup \mathcal{A}$ **zusammenhängend**. \square

Lemma 3.8 ([4] S.52 Theorem 2.A.8). *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall im metrischen Raum (\mathbb{R}, d_2) , dann ist $[a, b]$ zusammenhängend.*

Beweis. Nehmen wir an $[a, b]$ sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine Zerlegungsmenge Z von $[a, b]$, sodass $\emptyset \neq Z \neq [a, b]$ ist. Dann gibt es zwei offene Mengen $A, B \in \mathbb{R}$, sodass $A \cap [a, b] = Z$ und $\emptyset \neq [a, b] \setminus Z = [a, b] \cap B$. Wir können nun ohne Beschränkung annehmen $b \notin Z$ (sonst betrachten wir eben $[a, b] \setminus Z$). Dann gilt $s := \sup A < b$, denn dann gilt $b \in B$ und B ist offen. Nehmen wir nun an $s \in Z$, dann wäre s das Maximum von Z . Für $0 < \varepsilon < \min\{d_2(b, s), d_2(a, s)\}$ beliebig wäre dann also $U_\varepsilon(s) \subseteq [a, b]$, aber $U_\varepsilon(s) \not\subseteq Z$. Deshalb gilt $U_\varepsilon(s) \not\subseteq A$ im Widerspruch dazu, dass A offen ist. Andererseits ist s Supremum von Z und $Z \neq \emptyset$. Dies bedeutet insbesondere $a < s$. Damit gilt insgesamt $a < s < b$ und $s \notin Z$. Daraus folgt $s \in [a, b] \setminus Z \subseteq B$. Genauso wie wir gefolgert haben $s \notin A$, folgert man $s \notin B$. Ein Widerspruch. $[a, b]$ muss also zusammenhängend sein. \square

Bemerkung 3.9. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Lemma 3.8 gilt auch für Intervalle der Form $]a, b[$, $[a, b[$ oder $]a, b]$, indem man an den entsprechenden Stellen im Beweis das Intervall $[a, b]$ ersetzt.*

Auch die Umkehrung von Lemma 3.8 gilt:

Lemma 3.10 ([4] S.52 Theorem 2.A.8). *Sei A eine zusammenhängende Menge in \mathbb{R} mit mehr als einen Punkt, dann ist A ein Intervall.*

Beweis. Wir beweisen mit Kontraposition.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann gibt es Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, c \in A$ und $b \notin A$, sodass $a < b < c$ gilt. Dann ist jedoch $a \in]-\infty, b[=: U$ und $c \in]b, \infty[=: V$. U, V sind offen in \mathbb{R} und es gilt $U \cap V = \emptyset$. Mit Lemma 3.5 folgt daraus, dass A nicht zusammenhängend ist, denn U und V enthalten jeweils einen Punkt aus A . \square

Proposition 3.11 ([13] S.58, 3.0.2 (5)). *Sei $f : X \mapsto Y$ eine Abbildung, $B \subseteq Y$ und $A := f^{-1}[B]$, dann gilt $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus A$.*

Beweis. $x \in f^{-1}[Y \setminus B] \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in X \setminus A$ \square

Satz 3.12 ([13] S.174 Satz 6.1.16). *Zusammenhang ist bildtreu.*

Beweis. Wir beweisen mittels Kontraposition:

Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X)$ und $\underline{Y} := (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : \underline{X} \mapsto \underline{Y}$ stetig und surjektiv. Sei \underline{Y} nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine nichtleere Zerlegungsmenge $\emptyset \neq B \subsetneq Y$. Dann sind also sowohl B , als auch B^C , nicht leer und offen in \underline{Y} . $A := f^{-1}[B]$ und $f^{-1}[B^C]$ sind dann aufgrund der Stetigkeit von f offen und aufgrund der Surjektivität von f nicht leer. Mit Proposition 3.11 gilt außerdem $f^{-1}[B^C] = X \setminus A$. Also ist $A \neq X$ und auch abgeschlossen und somit eine nichtleere Zerlegungsmenge von \underline{X} . Folglich ist \underline{X} nicht zusammenhängend. \square

Definition 3.13 (Wegzusammenhang [13] S.186). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$*

1. Seien $x, y \in X$. Eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \mapsto X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ heißt **Weg** zwischen x und y . Für $A \subseteq X$ sagen wir, dass der Weg f in A liegt, wenn $\text{Bild}(f) \subseteq A$
2. \underline{X} heißt **wegzusammenhängend**, wenn zu allen $x, y \in X$ ein Weg zwischen x und y existiert, der in X liegt.
3. $A \subseteq X$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn der Teilraum \underline{A} wegzusammenhängend ist.

Lemma 3.14 ([4] S.57, 2.C.3). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $a, b, c \in X$. Existiert ein Weg f von a nach b und ein Weg g von b nach c in X , so existiert ein Weg h von a nach c .

Beweis. Wir definieren $h : [0, 1] \mapsto X, x \mapsto h(x) := \begin{cases} f(2x) & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2x - 1) & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$
 Da $f(\frac{1}{2}) = b = g(\frac{1}{2})$, ist h wohldefiniert und stetig, also ein Weg in X . \square

Nach allen Vorbereitungen lässt sich folgender Satz einfach beweisen:

Satz 3.15 ([13] S.186). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist \underline{X} wegzusammenhängend, so ist \underline{X} zusammenhängend.

Beweis. Sei \underline{X} wegzusammenhängend und für $x, y \in X$ sei $W(x, y)$ ein Weg zwischen x und y . Mit Lemma 3.8 ist $[0, 1]$ zusammenhängend und da Zusammenhang bildtreu ist, ist für $x, y \in X$, $W(x, y)$ zusammenhängend. Die Menge $\mathcal{A} := \{W(x, y) \mid x, y \in X\}$ ist verkettet und mit Lemma 3.7 ist $X = \bigcup \mathcal{A}$ somit zusammenhängend. \square

Zerbrechliche Mengen in T_1 -Räumen sind gerade Gegenbeispiele, die zeigen, dass die Umkehrung des letzten Satzes nicht gilt.

Lemma 3.16 ([13] S.187, Satz 6.3.5). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist \underline{X} zusammenhängend und jeder Punkt von X besitzt eine wegzusammenhängende Umgebung, so ist \underline{X} wegzusammenhängend.

Beweis. Sei \underline{X} zusammenhängend und jeder Punkt von X besitze eine wegzusammenhängende Umgebung. Seien $x \in X$ und

$$A := \{y \in X \mid \text{Es gibt einen Weg zwischen } x \text{ und } y\},$$

dann ist A nicht leer, denn $x \in A$. Wir wollen zeigen, dass A Zerlegungsmenge in \underline{X} ist, dann folgt $A = X$, denn \underline{X} ist zusammenhängend. Sei also $y \in \text{cl}_{\underline{X}} A$. y besitzt eine wegzusammenhängende Umgebung U und wegen $y \in \text{cl}_{\underline{X}} A$ gilt $U \cap A \neq \emptyset$. Sei also $z \in U \cap A$, f ein Weg von x nach z und g ein Weg von z nach y . Wir definieren:

$$\Phi : [0, 1] \mapsto X, t \mapsto \Phi(t) := \begin{cases} f(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Φ ist dann ein Weg zwischen x und y und folglich war y bereits in A . Da $y \in \text{cl}_X A$ beliebig war, enthält A all seine Berührungspunkte, ist also abgeschlossen. Sei nun y ein beliebiger Punkt in A , dann hat y eine wegzusammenhängende Umgebung U . Sei $z \in U$, dann existiert ein Weg von y nach z . Völlig analog zu vorhin lässt sich also ein Weg von x nach z konstruieren. Es folgt $U \subseteq A$. Folglich ist A offen, insgesamt also Zerlegungsmenge. Es folgt also $A = X$. Damit gibt es einen Weg zwischen x und jedem Punkt in X . Damit ist X wegzusammenhängend. \square

Korollar 3.17 ([13] S.187, Satz 6.3.5). *Sei A ein offener Teilraum von \mathbb{R}^2 mit euklidischer Metrik. Dann ist A genau dann zusammenhängend, wenn A wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Sei $x = (x_1, x_2)^T \in A$. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$. Sei weiters $y = (y_1, y_2)^T \in U_\varepsilon(x)$. Die Funktion $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2, \lambda \mapsto f(\lambda) := \lambda x + (1 - \lambda)y$ ist ein Weg zwischen x und y und es gilt für $a := \lambda x + (1 - \lambda)y$ mit festem $\lambda \in [0, 1]$, $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)y_1)^2 + (x_2 - \lambda x_2 - (1 - \lambda)y_2)^2} = (1 - \lambda)\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = (1 - \lambda)d(x, y) \leq d(x, y) < \varepsilon$. Also ist $a \in U_\varepsilon(x)$ und somit $\text{Bild}(f) \subseteq U_\varepsilon(x)$. Mit Lemma 3.14 ist $U_\varepsilon(x)$ wegzusammenhängend und damit besitzt jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung. Daraus folgt mit Lemma 3.16 die Behauptung. \square

Definition 3.18 (Zusammenhangskomponente, [13] S.173 Definition 6.1.10). *Sei $X := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Wir nennen*

$$K(x) := \bigcup \{A \subseteq X \mid x \in A \text{ und } A \text{ ist zusammenhängend}\}$$

die **Zusammenhangskomponente von x** .

Lemma 3.19 ([13] S.173). *Sei $X := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x, y \in X$ dann gilt:*

1. Die Zusammenhangskomponente $K(x)$ ist zusammenhängend.
2. Ist A eine zusammenhängende Menge, die x enthält, so gilt $A \subseteq K(x)$
3. Es gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$

Beweis. Wir definieren dazu

$$\mathcal{A}(x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \text{ und } A \text{ ist zusammenhängend}\}$$

1. Folgt, da $\mathcal{A}(x)$ verkettet ist, mit Lemma 3.7.
2. Ist $x \in A$ und A zusammenhängend, dann gilt $A \in \mathcal{A}(x)$, also $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}(x)$.
3. Sei $K(x) \cap K(y) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $z \in K(x) \cap K(y)$ und es gilt mit 2. $K(x) \subseteq K(z)$ und $K(y) \subseteq K(z)$, denn $K(x)$ und $K(y)$ sind zusammenhängende Mengen, die z enthalten. Dies bedeutet aber $x, y \in K(z)$, woraus wiederum mit 2. $K(z) \subseteq K(x)$ und $K(z) \subseteq K(y)$ folgt. Es gilt also $K(x) = K(z) = K(y)$. \square

Definition 3.20 (Totale Diskontinuirlichkeit [13] S.191, 6.5.1). *Ein topologischer Raum $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ heißt **total diskontinuierlich**, wenn für jedes $x \in X$ die Zusammenhangskomponente $K(x) = \{x\}$ ist.*

Beispiel 3.21 ([13] S.191, 6.5.2). 1. *Die diskrete Topologie auf einer beliebigen Menge X ist total diskontinuierlich, da dort jede Teilmenge von X offen und somit auch abgeschlossen ist, also insbesondere für beliebiges $x \in X$ die Menge $\{x\}$.*

2. *\mathbb{Q} ist ebenfalls total diskontinuierlich. Sei etwa $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist $\mathbb{Q} \subseteq]-\infty, r[\cup]r, \infty[$ und $]-\infty, r[\cap]r, \infty[= \emptyset$. Da wir für beliebige $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ein solches r mit $q_1 < r < q_2$ finden können ist \mathbb{Q} mit Lemma 3.5 total diskontinuierlich.*

Lemma 3.22 ([13] S.192, 6.5.3). *Jede stetige Abbildung von einem zusammenhängenden in einen total diskontinuierlichen Raum ist konstant.*

Beweis. Dies folgt direkt daraus, dass Zusammenhang bildtreu ist. □

Lemma 3.23 ([13] S.194, 6.5.11). *Totale Diskontinuirlichkeit ist erblich.*

Beweis. Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Die Abbildung $\text{inj} : \underline{A} \mapsto \underline{X}, x \mapsto \text{inj}(x) := x$ ist stetig. Dies folgt direkt aus der Definition der Teilraumtopologie. Mit Lemma 3.22 folgt die Behauptung. □

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Grundbegriffe und nun Elemente des Zusammenhangs festgelegt haben, wollen wir in diesem Unterabschnitt den Begriff der „zerbrechlichen Menge“, aufbauend auf dem im letzten Unterabschnitt beschriebenen Begriff des Zusammenhangs, einführen.

3.2 Zerbrechliche Mengen und ihre Eigenschaften

Definition 3.24 (zerbrechlicher Raum, Dispersionspunkte, zerbrechliche Menge Siehe etwa [8] S.3).

1. *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum, sodass X mit mindestens 3 Elemente enthält. Wir nennen \underline{X} **zerbrechlichen Raum**, falls es ein $p \in X$ gibt, sodass $\underline{X} \setminus \{p\}$ total diskontinuierlich ist. Wir nennen p dann **Dispersionspunkt** von \underline{X} .*
2. *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Wir nennen A eine **zerbrechliche Menge** in \underline{X} , wenn der Teilraum \underline{A} von \underline{X} eine zerbrechlicher Raum ist.*

In der englischsprachigen Literatur werden zerbrechliche Mengen meist „set with a dispersion point“ genannt. Im umfangreichen Paper [8] von **Roman Duda** zum Thema „zerbrechliche Mengen“ werden sie „pulverable sets“ genannt.

Zerbrechliche Mengen kann man recht einfach konstruieren:

Beispiel 3.25. Sei $X := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, dann ist X eine zerbrechliche Menge mit Dispersionspunkt 2, denn $X \setminus \{2\}$ als Teilraum von \underline{X} trägt dann die diskrete Topologie und diese ist total diskontinuierlich. Viel allgemeiner kann man eine beliebige Menge Y mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(Y)$ versehen und dann für einen Punkt $p \notin Y$ die Menge $Y \cup \{p\}$ mit der Topologie $\mathcal{S} := \{A \cup \{p\} \mid A \in \mathcal{P}(Y)\} \cup \emptyset$ versehen. $Y \cup \{p\}$ ist dann eine zerbrechliche Menge.

In dieser Hinsicht ist es sinnvoll, zu untersuchen, was geschieht, wenn man allgemein zu einem total diskontinuierlichen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) einen Punkt p hinzufügt, derart, dass dann der Raum $(X \cup \{p\}, \mathcal{S})$ mit einer passenden Topologie \mathcal{S} zusammenhängend ist. Man erhält daraus folgendes Lemma:

Lemma 3.26. Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zerbrechlicher Raum und p sein Dispersionspunkt. \tilde{Z} sei eine Zerlegungsmenge von $X \setminus \{p\}$. Ist $\tilde{Z} \cup \{p\}$ offen in X , so gilt für jede Zerlegungsmenge $Z \in \underline{X \setminus \{p\}}$, dass $Z \cup \{p\}$ offen in \underline{X} ist.

Beweis. Sei $Y := X \setminus \{p\}$ und \tilde{Z} eine Zerlegungsmenge von \underline{Y} und $\tilde{Z} \cup \{p\}$ offen in X . Dann ist auch Z^C Zerlegungsmenge und somit offen in \underline{Y} . Also gibt es eine offene Menge A in \underline{X} , sodass $\tilde{Z}^C = A \cap Y$. Daraus folgt entweder $A = \tilde{Z}^C$ oder $A = \tilde{Z}^C \cup \{p\}$. Falls $A = Y \setminus \tilde{Z}$ wäre, wären jedoch A und $X \setminus A = \tilde{Z} \cup \{p\}$ offen, A also Zerlegungsmenge von \underline{X} , im Widerspruch dazu, dass \underline{X} zusammenhängend ist. Es folgt also $A = \tilde{Z}^C \cup \{p\}$. Daraus folgt $\{p\} = A \cap (\tilde{Z} \cup \{z\}) \in \mathcal{T}$, also offen. Sei nun Z eine beliebige von Z verschiedene Zerlegungsmenge von \underline{Y} . Mit dem selben Argument wie vorhin ist dann entweder $Z \cup \{p\}$ oder Z offen in X . Mit dem bereits gezeigten folgt, dass $Z \cup \{p\}$ genau dann offen in X ist, wenn $Z^C \cup \{p\}$ offen in X ist.

Nehmen wir nun an Z sei offen in \underline{X} , dann ist also Z^C auch offen in \underline{X} und damit auch $Z \cup Z^C = X \setminus \{p\}$. Also wäre $\{p\}$, von dem wir ja bereits gezeigt haben, dass es offen in \underline{X} ist, eine Zerlegungsmenge von \underline{X} im Widerspruch zum Zusammenhang von \underline{X} . Es folgt $Z \cup \{p\}$ ist offen in \underline{X} \square

Korollar 3.27. Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zerbrechlicher T1-Raum und p sein Dispersionspunkt. \tilde{Z} sei eine Zerlegungsmenge von $\underline{X \setminus \{p\}}$. Dann ist $\tilde{Z} \cup \{p\}$ nicht offen in X .

Beweis. Ist \underline{X} ein zerbrechlicher T1-Raum, dann ist $\{p\}$ abgeschlossen. Wäre $\tilde{Z} \cup \{p\}$ offen in X , dann wäre mit dem Beweis der vorhergehenden Lemmas auch $\{p\}$ offen, also $\{p\}$ eine Zerlegungsmenge von \underline{X} im Widerspruch zum Zusammenhang von \underline{X} . \square

Im letzten Lemma haben wir von „dem“ Dispersionspunkt gesprochen. Im folgenden werden wir zeigen, dass dies wirklich gerechtfertigt ist und dieser tatsächlich eindeutig ist. Dazu beweisen wir zuerst folgendes:

Proposition 3.28 ([4] S.57, 2.B.10). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und A eine zusammenhängende Teilmenge von \underline{X} . Sei Z eine Zerlegungsmenge von $\underline{X \setminus A}$. Dann ist $Z \cup A$ zusammenhängend in \underline{X} .

Beweis. Ist A leer, so ist $Z = X$ oder $Z = \emptyset$ und somit nichts zu zeigen. Wir nehmen also an $A \neq \emptyset$. Wir setzen $Y := A \cup Z$. Sei nun \tilde{Z} eine Zerlegungsmenge von Y , dann gilt entweder $A \subseteq \tilde{Z}$ oder $A \cap \tilde{Z} = \emptyset$, denn A ist zusammenhängend. Wir können ohne Beschränkung Zweiteres annehmen (sonst betrachten wir eben \tilde{Z}^C). Dann gilt $\tilde{Z} \subseteq Z$ und \tilde{Z} ist offen und abgeschlossen in \underline{Y} . Es gibt also offene Teilmengen B und C in \underline{X} , sodass $Y \cap B = \tilde{Z}$ und $Y \cap C = \tilde{Z}^C$. Das gleiche Argument kann man auch für Z^C anwenden. Sei \hat{Z} eine Zerlegungsmenge von $\hat{Y} := A \cup Z^C$ mit $\hat{Z} \cap A = \emptyset$, dann gibt es in \underline{X} offene Mengen D, E mit $\hat{Z} = D \cap \hat{Y}$ und $\hat{Z}^C = D \cap \hat{Y}^C$.

Insgesamt sind wir also in folgender Situation: B, C, D, E sind alle offen in \underline{X} , $B \cup C \cup D \cup E = X$ und es gilt $A \subseteq C \cap E = X \setminus (B \cup D)$. Also ist $C \cap E$ nichtleere Zerlegungsmenge in \underline{X} , also gilt $C \cap E = X$. Daraus folgt sofort, dass $(B \cup D) = \emptyset$, also war $\tilde{Z} = \emptyset$ und somit $Z \cup A$ zusammenhängend. \square

Daraus folgt unmittelbar:

Korollar 3.29 ([8] S.15). *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zerbrechlicher Raum mit Dispersionspunkt p und Z eine Zerlegungsmenge von $\underline{X \setminus \{p\}}$, dann gilt:*

1. $Z \cup \{p\}$ zusammenhängend.
2. $Z \cup \{p\}$ ist eine zerbrechliche Menge.

Beweis.

1. Folgt aus 3.28
2. Folgt aus 1. und Lemma 3.23 \square

Außerdem lässt sich mit Proposition 3.28 folgendes Lemma beweisen:

Lemma 3.30 ([4] S.61 2.D.6¹⁴). *Jeder topologische Raum hat höchstens einen Dispersionspunkt.*

Beweis. Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zerbrechlicher Raum. Nehmen wir an es würden zwei Dispersionspunkte p, q existieren. Sei $\emptyset \neq Z \neq X \setminus \{p\}$ eine Zerlegungsmenge von $\underline{X \setminus \{p\}}$. Wir können annehmen, dass $q \in Z^C$, sonst vertauschen wir eben die Benennung von Z und Z^C . Mit Proposition 3.28 ist $Z \cup \{p\}$ zusammenhängend. Sei $K(p)$ die Zusammenhangskomponente von $p \in \underline{X \setminus \{q\}}$, dann gilt also $Z \cup \{p\} \subseteq K(p)$. Also ist $\underline{X \setminus \{q\}}$ nicht total diskontinuierlich, im Widerspruch zu Annahme, q sei Dispersionspunkt von \underline{X} . Jeder topologische Raum kann also höchstens einen Dispersionspunkt haben. \square

Nun untersuchen wir den Wegzusammenhang in zerbrechlichen Räumen und werden zeigen, dass zerbrechliche T1-Räume nicht wegzusammenhängend sind. Man kann davon ausgehen, dass dies jenen, die sich in der Vergangenheit mit zerbrechlichen Mengen beschäftigt haben, klar war, da der entsprechende Beweis recht einfach ist, aber es nicht möglich war ein entsprechendes allgemeines Ergebnis in der Literatur zu

¹⁴Ein entsprechender Beweis ließ sich in der Literatur nicht finden, die Aussage dieses Lemmas findet sich jedoch in der gegebenen Literaturstelle

finden.

Zumindest für den Spezialfall des zerbrechlichen Kegels, den wir später als einen unserer beiden zentralen Konstruktionen einführen werden, war dieses Ergebnis bekannt. Man siehe dazu etwa [13] S.186, Beispiel 6.3.3.

Proposition 3.31. *Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zerbrechlicher Raum und p sein Dispersionspunkt. Seien $x, y \in X$ und sei f ein Weg zwischen x und y . Sei $[a, b] \subseteq [0, 1]$. Enthält $f[a, b] \subseteq X$ mehr als ein Element, so gilt $p \in f[a, b]$*

Beweis. Seien $c, d \in [a, b]$ mit $c \neq d$. Ist $c = p$ oder $d = p$, so sind wir fertig. Ansonsten betrachten wir das Intervall $[c, d]$. Wir definieren die stetige Funktion:

$$\Phi : [0, 1] \mapsto [c, d], t \mapsto \Phi(t) := c + t(d - c)$$

Dann ist die Verkettung $f \circ \Phi : [0, 1] \mapsto X$ ein Weg zwischen $f(c)$ und $f(d)$. Nehmen wir an, $p \notin \text{Bild}(f \circ \Phi)$, dann wäre $f \circ \Phi$ wegen Lemma 2.37 ein Weg zwischen $f(c)$ und $f(d)$ in $\underline{X} \setminus \{p\}$ und $\text{Bild}(f \circ \Phi)$ aufgrund der Bildtreue des Zusammenhangs zusammenhängend. Dies kann aber nicht sein, denn $\underline{X} \setminus \{p\}$ ist total diskontinuierlich. Folglich ist $p \in [c, d]$. \square

Damit können wir bereits folgendes Lemma beweisen:

Lemma 3.32. *Zerbrechliche T1-Räume sind nicht wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zerbrechlicher T1-Raum und p sein Dispersionspunkt. Seien $x, y \in X \setminus \{p\}$ mit $x \neq y$. Solche x, y existieren, da jeder zerbrechliche Raum mindestens 3 Punkte enthält. Nehmen wir an es existiert ein Weg f zwischen x und y . Mit Proposition 3.31 gibt es ein $z \in [0, 1]$ mit $f(z) = p$. Die Menge $A := \{q \in [0, 1] \mid f(q) = p\}$ ist also nicht leer. Sei $s = \inf(A)$. s kann nicht 0 sein, denn nehmen wir an $s = 0$, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon := [0, \varepsilon]$, dass $p \in f[B_\varepsilon]$. Andererseits gibt es, da X ein T1-Raum ist, eine Umgebung U von x mit $p \notin U$. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von f . Es ist also $s > 0$. Sei nun $0 < \varepsilon < s$, dann folgt aus Proposition 3.31, dass $f[B_\varepsilon] = \{x\}$, also gilt für jedes $z < s$, dass $f(z) = x$. Nun gibt es wieder wegen Proposition 3.31 nur die Möglichkeiten $f(s) = p$ oder $f(s) = x$. Nehmen wir an $f(s) = x$. Wir definieren die Funktion $\Phi : [0, 1] \mapsto [s, 1], t \mapsto \phi(t) := s + (1-s)t$. Diese ist stetig, es gilt $\Phi(0) = s$ und $\Phi(1) = 1$ und da f ebenfalls stetig ist, ist die Funktion $\tilde{f} := f \circ \Phi$ ebenfalls stetig und es gilt $\tilde{f}(0) = f(\Phi(0)) = f(s) = x$ und $\tilde{f}(1) = f(\Phi(1)) = f(1) = y$, also ist \tilde{f} ein Weg von x nach y . Nun gilt $\inf(\{q \in [0, 1] \mid \tilde{f}(q) = p\}) = 0$, was wir vorhin jedoch ausgeschlossen hatten. Damit folgt $f(s) \neq x$. Es bleibt nur noch die Möglichkeit $f(s) = p$ übrig. Aber auch das kann nicht sein, denn da \underline{X} T1-Raum ist, gibt es eine Umgebung V von p mit $x \notin V$, aber für jedes $z < s$ gilt, dass $f(z) = x$, was mit 2.30 ein Widerspruch zur Stetigkeit von f ist. Es folgt, dass ein solcher Weg f zwischen x und y nicht existieren kann. Es existiert also für beliebige Punkte $x, y \in X \setminus \{p\}$ kein Weg zwischen x und y , was impliziert, dass X nicht wegzusammenhängend ist. \square

Korollar 3.33. *Metrisierbare zerbrechliche Räume sind nicht wegzusammenhängend.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 2.27 □

Korollar 3.34. *Zerbrechliche Mengen in \mathbb{R}^2 sind nicht offen.*

Beweis. Folgt aus Lemma 2.27 und 3.17 das besagt, dass offene zusammenhängende Mengen in \mathbb{R}^2 schon wegzusammenhängend sind. □

4 Das Cantorsche Diskontinuum und der zerbrechliche Kegel

4.1 Cantorsches Diskontinuum

Folgende Konstruktion nennt sich das Cantorsche Diskontinuum und wird die Grundlage einer unserer beiden zentralen Konstruktionen einer metrisierbaren zerbrechlichen Menge, des zerbrechlichen Kegels, sein:

Definition 4.1 (Cantorsches Diskontinuum, [12] S.114). *Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Mengen*

$$\mathfrak{C}_n := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \{0, 1, 2\}, (\forall i \in \mathbb{N}) : i \leq n \Rightarrow a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

Das *Cantorsche Diskontinuum* \mathfrak{C} definieren wir als

$$\mathfrak{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{C}_n = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \{0, 2\} \right\}$$



Abbildung 1: Konstruktionsschema des Cantorschen Diskontinuums

Notation 4.2. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $C := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \{0, 2\}^n$, mit $\{0, 2\}^0 := \emptyset$ schreiben wir*

$$A_C^n := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \{0, 1, 2\}, a_1 = c_1, \dots, a_n = c_n \right\}$$

Lemma 4.3 (Siehe etwa [7] S.29). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und \mathfrak{C}_n wie in 4.1, dann gilt:*

1. \mathfrak{C}_n ist eine disjunkte Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen $[a_C, b_C]$ für die gilt $[a_C, b_C] = A_C^n$ für $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \{0, 2\}^n$. Es gilt $d(a_C, b_C) = \frac{1}{3^n}$.
2. $\mathfrak{C}_{n+1} = \bigcup \left\{ [a, a + \frac{1}{3^{n+1}}] \cup [b - \frac{1}{3^{n+1}}, b] \mid [a, b] \subseteq \mathfrak{C}_n, d(a, b) = \frac{1}{3^n} \right\}$

Beweis. Wir halten fest, dass für $n \in \mathbb{N}$ per Definition von \mathfrak{C}_n gilt $\mathfrak{C}_n = \bigcup_{C \in \{0, 2\}^n} A_C^n$.

Was wir zeigen müssen ist, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $C \in \{0, 2\}^n$ gilt, dass $A_C = [a_C, b_C]$ für ein abgeschlossenes Intervall $[a_C, b_C]$ mit $d(a_C, b_C) = \frac{1}{3^n}$ ist und für $C_1 := (C^T, 0)^T \in \{0, 2\}^{n+1}$ und $C_2 := (C^T, 2)^T \in \{0, 2\}^{n+1}$ gilt $A_{C_1}^{n+1} = [a_C, a_C + \frac{1}{3^{n+1}}]$ beziehungsweise $A_{C_2}^{n+1} = [b_C - \frac{1}{3^{n+1}}, b_C]$.

Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Wir stellen fest, dass

$$\mathfrak{C}_0 := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \{0, 1, 2\} \right\} = A^0 = [0, 1]$$

denn diese Darstellung ist mit Lemma 2.66 die zum Dezimalsystem alternative Darstellung des Intervalls $[0, 1]$ im Zahlensystem zur Basis 3. Damit haben wir einen Induktionsanfang für 1.

Wir zeigen damit 2., und den Induktionsschluss. Nehmen wir nun für ein $n \geq 0$ an, dass 1. gilt. Sei $C := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \{0, 2\}^n$. Laut Voraussetzung ist $[a_C, b_C] = A_C^n$ und $[a_C, b_C] \in \mathfrak{C}_n$. Wir betrachten die Menge $A_{C_1}^{n+1}$, dann wissen wir $\min(A_{C_1}^{n+1}) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} = a_C$. Wir definieren die Funktion

$$f : A_{C_1}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := 3x - a_1,$$

dann gilt $\text{Bild}(f) = A_{\tilde{C}}^n = [a_{\tilde{C}}, b_{\tilde{C}}] \subseteq \mathfrak{C}_n$, mit $\tilde{C} = (c_2, c_3, c_4, \dots, c_n, 0)^T \in \{0, 2\}^n$, wobei die Gleichung $A_{\tilde{C}}^n = [a_{\tilde{C}}, b_{\tilde{C}}]$ aus der Induktionsvoraussetzung folgt. f ist als affin lineare Funktion stetig und auf $\text{Bild}(f)$ existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \text{Bild}(f) \mapsto A_{C_1}^{n+1}, y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{y + a_1}{3},$$

die ebenfalls affin linear ist. Da $\text{Bild}(f)$ als Intervall zusammenhängend ist und Zusammenhang bildtreu ist, ist auch $A_{C_1}^{n+1}$ zusammenhängend und mit Lemma 3.8 ein Intervall. Desweiteren ist aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} mit $A_{\tilde{C}}^n$ auch $A_{C_1}^{n+1}$. Wir haben also gezeigt, dass $A_{C_1}^{n+1}$ ein abgeschlossenes Intervall mit Anfangspunkt a_C ist. Außerdem gilt laut Induktionsvoraussetzung $d(a_{\tilde{C}}, b_{\tilde{C}}) = \frac{1}{3^n}$. Aus der Konstruktion von f folgt daraus $d(a_C, \max(A_{C_1}^{n+1})) = \frac{1}{3} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n+1}}$, woraus folgt $A_{C_1}^{n+1} = [a_C, a_C + \frac{1}{3^{n+1}}]$. Für $A_{C_2}^{n+1}$ ist damit alles gezeigt. Für $A_{C_2}^{n+1}$ geht man entsprechend analog vor, um zu zeigen, dass $A_{C_2}^{n+1} = [b_C - \frac{1}{3^{n+1}}, b_C]$. Es gilt offenbar $A_{C_1}^{n+1} \cap A_{C_2}^{n+1} = \emptyset$. Da für $C'', C' \in \{0, 2\}^n$ per Induktionsannahme gilt, dass $A_{C'}^n \cap A_{C''}^n = \emptyset$ und \mathfrak{C}_n laut Induktionsannahme Vereinigung von 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen ist, folgt, dass \mathfrak{C}_{n+1} Vereinigung aus 2^{n+1} disjunkten abgeschlossenen Intervallen ist, die die Form wie in 2. besitzen.

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgen Aussagen 1. und 2. \square

Mit dem letzten Lemma folgt der nächste Satz einfach:

Satz 4.4 ([12] S.115). *Das Cantorsche Diskontinuum \mathfrak{C} ist mit euklidischer Metrik kompakt.*

Beweis. Offensichtlich ist \mathfrak{C} als Teilmenge des Intervalls $[0, 1]$ beschränkt. Wir müssen noch zeigen, dass \mathfrak{C} abgeschlossen ist. Dazu sei für $n \in \mathbb{N}_0$, \mathfrak{C}_n wie in 4.1. In Lemma 4.3 haben wir gezeigt, dass \mathfrak{C}_n endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist und mit Lemma 2.22 ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ also \mathfrak{C}_n abgeschlossen. Wieder mit Lemma 2.22 ist \mathfrak{C} als Schnitt aller \mathfrak{C}_n abgeschlossen und mit dem Satz 2.49 von Heine-Borel ist \mathfrak{C} kompakt. \square

Korollar 4.5. *Das Cantorsche Diskontinuum mit euklidischer Metrik ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Folgt mit Satz 2.50 der besagt, dass kompakte metrische Räume vollständig sind. \square

Definition 4.6 (fast konstant [12] S.122). *Eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt **fast konstant**, wenn es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $i > i_0$ gilt $a_i = a_{i_0}$.*

Definition 4.7. *Wir definieren*

$$\mathfrak{H} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{C} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist fast konstante Folge in } \{0, 2\} \right\}$$

Bemerkung 4.8. *Sei $\mathfrak{H} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{C} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist fast konstante Folge in } \{0, 2\} \right\}$, dann ist $x \in \mathfrak{H}$ ein Randpunkt eines Intervalls $A_C^{n_0} \in \mathfrak{C}_{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Für $n > n_0$ gibt es jeweils ein $C' \in \{0, 2\}^n$, sodass x Randpunkt des Intervalls $A_{C'}^n$ ist.*

Beweis. Sei $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{H}$, dann ist $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine fast konstante Folge in $\{0, 2\}$ und es gibt nach Definition ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $i \geq n_0$ gilt $a_i = a_{i+1}$. Sei $C := (a_1, a_2, \dots, a_{n_0})$. Mit dem Beweis von Lemma 4.3 folgt sofort, dass $x = \min A_C^{n_0}$, falls $a_{n_0} = 0$ und $x = \max A_C^{n_0}$, falls $a_{n_0} = 2$, also ist x ein Randpunkt von $A_C^{n_0}$. Der zweite Teil der Aussage folgt aus der Tatsache, dass der Beweis immer noch gültig ist, wenn wir n_0 beliebig vergrößern. \square

Lemma 4.9 ([13] S.116 5.3.3).

1. *Das Cantorsche Diskontinuum \mathfrak{C} ist überabzählbar.*
2. *Die Menge $\mathfrak{H} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist fast konstante Folge in } \{0, 2\} \right\}$ ist abzählbar.*

Beweis.

1. Es gilt $\mathfrak{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \{0, 2\} \right\}$ Die Menge aller Folgen in $\{0, 2\}$ ist überabzählbar (Siehe [5]). Daraus folgt sofort, dass \mathfrak{C} überabzählbar ist.

2. Sei für $i_0 \in \mathbb{N}$:

$$M_{i_0} := \left\{ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{H} \mid i_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\forall k \in \mathbb{N}) : a_{i_0} = a_{i_0+k}\} \right\}$$

Die Menge M_{i_0} enthält dann 2^{i_0} Elemente und es gibt eine Bijektion Φ_{i_0} zwischen $\{1, 2, \dots, 2^{i_0}\}$ und M_{i_0} .

Da für $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ mit $i_0 \neq i_1$ gilt $M_{i_0} \cap M_{i_1} = \emptyset$, können wir folgende bijektive Abbildung definieren:

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathfrak{H}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} f(x) = 0 & \text{falls } x = 0 \\ f(x) = 1 & \text{falls } x = 1 \\ f(x) = 2^{i_0-1} + \Phi_{i_0}(x) & \text{für } x \in M_{i_0}, i_0 \neq 1 \end{cases}$$

Damit ist \mathfrak{H} abzählbar. □

Außer der Kompaktheit besitzt das Cantorsche Diskontinuum noch folgende Eigenschaften, die auch bei der Konstruktion des zerbrechlichen Kegels entscheidend sind:

Lemma 4.10 ([12] S.115).

1. Das Cantorsche Diskontinuum ist in sich dicht
2. Das Cantorsche Diskontinuum ist total diskontinuierlich
3. Das Cantorsche Diskontinuum ist nirgends dicht in \mathbb{R}

Beweis.

1. Sei für eine Folge in $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \{0, 2\}$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{C}$, dann müssen wir zeigen, dass $\{x\}$ nicht offen in \mathfrak{C} (als Teilraum von (\mathbb{R}, d_2)) ist, also, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in \mathfrak{C}$ mit $x \neq y$ gibt, sodass $d_2(x, y) = |x - y| < \varepsilon$ ist.
Zu beliebigem ε gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Wir wählen dazu $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{C}$. Nun gilt $d(x, y_n) = |x - y_n| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \leq \frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Diese Abschätzung gilt wegen $3^n d(x, y_n) = 3^n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}}{3^i} \in \mathfrak{C} \subseteq [0, 1]$. Also ist $0 \leq d(x, y_n) \leq \frac{1}{3^n}$. Damit gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $U_\varepsilon(x) \not\subseteq \{x\}$. Also ist $\{x\}$ kein isolierter Punkt von \mathfrak{C} . Wegen $x \in \mathfrak{C}$ beliebig ist \mathfrak{C} in sich dicht.
2. Seien $x, y \in \mathfrak{C}$ mit $x < y$. Da alle zusammenhängenden Mengen in \mathbb{R} , die mehr als einen Punkt enthalten, mit Lemma 3.10 Intervalle sind, müssen wir zeigen, dass es kein Intervall $I \subseteq \mathfrak{C}$ gibt, mit $a, b \in I$. Dazu reicht es zu zeigen, dass es ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathfrak{C}$ gibt mit $x < z < y$. Wegen $x, y \in \mathfrak{C}$, ist $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ und $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ für Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i, b_i \in \{0, 2\}$ für $1 \leq i \leq n$. Wegen $x < y$ gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{i_0} = 0$ und $b_{i_0} = 2$. Wir nehmen i_0 minimal in dieser Eigenschaft an. Wir werden zeigen, dass dann für alle $j < i_0$ gilt $a_j = b_j$. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, dann gibt es ein $j_0 < i_0$, sodass $2 = a_{j_0} > b_{j_0} = 0$. Wir nehmen an j_0 sei minimal in

dieser Eigenschaft. Dann gilt aber $x - y = \frac{2}{3^{j_0}} + \sum_{i=j_0+1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{3^i}$. Nun muss wegen $x < y$ gelten

$$0 \leq -3^{j_0} \sum_{i=j_0+1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{3^i} = 3^{j_0} \sum_{i=j_0+1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_{j_0+i} - b_{j_0+i}|}{3^i} \in \mathfrak{C},$$

also $3^{j_0} \sum_{i=j_0+1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{3^i} \geq 1$ und somit $\sum_{i=j_0+1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{3^i} \geq \frac{1}{3^{j_0}}$. Daraus folgt aber $x - y \geq -\frac{1}{3^{j_0}} > 0$ im Widerspruch zu $x < y$. Es folgt also, dass i_0 der kleinste Index eines Folgengliedes ist, an dem die Folgen (a_i) und (b_i) nicht übereinstimmen und wie vorhin gilt $d(x, y) = x - y > \frac{1}{3^{i_0}}$. Sei $A := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m = 2, m > i_0\}$

$$(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ mit } c_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = i_0 \\ 0 & \text{für } i = k := \min A, \text{ falls } A \neq \emptyset \\ a_i & \text{sonst} \end{cases},$$

dann gilt für $z := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$ per Konstruktion $x < z$. Falls $A \neq \emptyset$, gilt $d(x, z) = z - x = \frac{1}{3^{i_0}} - \frac{2}{3^k}$ und es folgt

$$y - z = y - x + x - z = (y - x) - (z - x) > \frac{1}{3^{i_0}} - \left(\frac{1}{3^{i_0}} - \frac{2}{3^k}\right) = \frac{2}{3^k} > 0.$$

Es gilt also $y > z$, was zu zeigen war. Ansonsten gilt $A := \emptyset$ was äquivalent ist zu $a_m = 0$ für $m > i_0$. In diesem Fall gilt $y - x > \frac{2}{3^{i_0}}$ und $z - x = \frac{1}{3^{i_0}}$, woraus sofort $y > z$ folgt. Wir haben also zu beliebigen $x, y \in \mathfrak{C}$ ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathfrak{C}$ gefunden mit $x < z < y$, woraus sofort folgt, dass es kein Intervall $I \subseteq \mathfrak{C}$ gibt. Somit kann es wegen Lemma 3.10 keine zusammenhängenden Mengen in \mathfrak{C} geben, die mehr als einen Punkt enthalten.

3. \mathfrak{C} ist bereits abgeschlossen und enthält, wie wir im Beweis von 2. schon gezeigt haben, kein Intervall. Insbesondere gilt dann für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathfrak{C}$, dass $U_\varepsilon(x) \not\subseteq \mathfrak{C}$. Folglich ist $\text{int}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C} = \emptyset$, was zu zeigen war. \square

4.2 Der zerbrechliche Kegel¹⁵

Bevor wir den zerbrechlichen Kegel definieren, führen wir noch ein wenig Notation ein, die wir auch bei der Konstruktion von Wilders zerbrechliche Menge beibehalten werden:

Notation 4.11.

1. Seien $a := (a_1, a_2)^T$, $b := (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$, dann bezeichnen wir die Strecke $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists \lambda \in [0, 1]) : x = \lambda a + (1 - \lambda)b\}$ zwischen a und b mit $\mathcal{S}(a, b)$.
2. Für $t \in [0, 1]$ setzen wir

$$l_t := \mathcal{S}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, (t, 0)^T\right) = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, y = \frac{x-t}{1-2t} \right\}$$

¹⁵[7] S.90-93, [12] S.122-124, [20] S.145-147

Wir kommen nun zum ältesten [6] und dem ersten unserer beiden zentralen Beispiele einer zerbrechlichen Menge in der reellen Ebene, dem zerbrechlichen Kegel. Er hat im Vergleich zu Wilders zerbrechliche Menge den klaren Vorteil, dass bei der Konstruktion nicht von reinen Existenzaussagen und dem Auswahlaxiom Gebrauch gemacht wird. Wenn wir von den Punkten im Intervall $[0, 1]$ die Darstellung im Ternärsystem kennen, können wir überprüfen, ob ein Punkt im zerbrechlichen Kegel liegt, indem wir eine Gerade durch diesen Punkt und den Dispersionspunkt des zerbrechlichen Kegels legen und uns ansehen, an welchem Punkt er die entsprechende Koordinatenachse schneidet. Eine derartige Möglichkeit wird bei Wilders zerbrechliche Menge nicht mehr gegeben sein.

Definition 4.12 (Zerbrechlicher Kegel [7] S.90-93). Sei \mathfrak{C} das Cantorsche Diskontinuum und $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$. Für $c \in \mathfrak{C}$ betrachten wir $l_c = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, y = \frac{x-c}{1-2c}\}$, die Strecke die die Punkte $(0, c)^T$ und p verbindet. Sei $\mathfrak{H} := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ fast konstant}\}$ und sei $F := \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{H}$. Für $c \in \mathfrak{H}$ sei $L_c := \{(x, y)^T \in l_c \mid y \in \mathbb{Q}\}$, für $c \in F$ sei $L_c := \{(x, y)^T \in l_c \mid y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Wir setzen

$$\mathbb{K} := \bigcup_{c \in \mathfrak{C}} L_c$$

und definieren den **zerbrechlichen Kegel** \mathbb{K} als den durch \mathbb{K} induzierten Teilraum von (\mathbb{R}, d_2) . Den durch $\hat{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \setminus \{p\}$ induzierten Teilraum von (\mathbb{R}, d_2) nennen wir den **punktierten zerbrechlichen Kegel**.

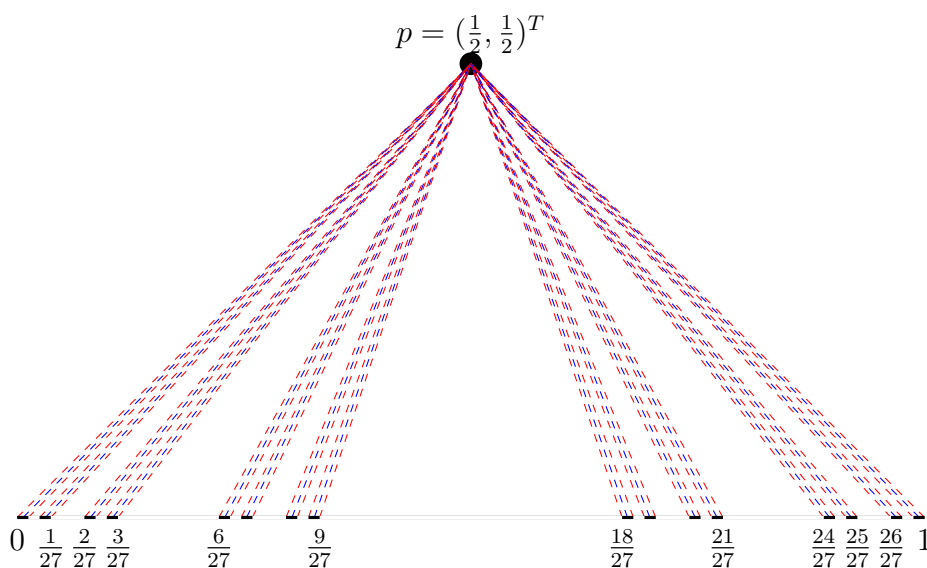


Abbildung 2: Skizze des zerbrechlichen Kegels.

Für den Rest dieses Unterabschnittes seien nun, falls nicht explizit anders angegeben, die Bezeichnungen wie in Definition 4.12. Weiters seien alle metrischen bzw. topologischen Räume in diesem Unterabschnitt immer mit der euklidischen Metrik beziehungsweise der dadurch induzierten Topologie versehen, falls nicht anders angegeben.

Satz 4.13 ([7] S.91, 5.2.1). *Der punktierte zerbrechliche Kegel ist total diskontinuierlich.*

Beweis. Für $c \in \mathfrak{C}$ bezeichnen wir $L'_c := L_c \setminus \{p\}$ und $F := \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{H}$. Weiters seien $c_1, c_2 \in \mathfrak{C}$ mit $c_1 < c_2$. Falls $c_1 < \frac{1}{2}$ und $c_2 > \frac{1}{2}$, definieren wir $A := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x < \frac{1}{2}\}$ und $B := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x > \frac{1}{2}\}$. Dann sind A und B offen, $A \cap B = \emptyset$, $L'_{c_1} \subseteq A$ und $L'_{c_2} \subseteq B$. Also ist $L'_{c_1} \cup L'_{c_2}$ mit Lemma 3.5 nicht zusammenhängend und L'_{c_1} ist Zerlegungsmenge. Ansonsten gibt es wegen Lemma 4.10, das besagt, dass \mathfrak{C} nirgends dicht ist, ein $c_0 \in [0, 1] \setminus \mathfrak{C}$ mit $c_1 < c_0 < c_2$ woraus dann $c_0 \neq \frac{1}{2}$ folgt. Wir definieren $A := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{x-c_0}{1-2c_0}\}$ und $B := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{x-c_0}{1-2c_0}\}$. Dann sind A und B offen und $A \cap B = \emptyset$. Ist nun $c_2 < \frac{1}{2}$, so gilt $L'_{c_1} \subseteq A$ und $L'_{c_2} \subseteq B$ und im Falle $c_1 > \frac{1}{2}$ gilt $L'_{c_1} \subseteq B$ und $L'_{c_2} \subseteq A$. Also ist $L'_{c_1} \cup L'_{c_2}$ wie vorhin mit Lemma 3.5 nicht zusammenhängend und L'_{c_1} ist auch hier Zerlegungsmenge davon.

Für festes $c \in \mathfrak{C}$ und $a = (x_a, y_a)^T \in L'_c$ gilt also $K(a) \subseteq L'_c$, wobei hier $K(a)$ die Zusammenhangskomponente von a in \mathbb{K} ist.

Nun betrachten wir noch einen beliebigen weiteren Punkt $b = (x_b, y_b)^T \in L'_c$ mit $a \neq b$ und zeigen, dass $K(a) \neq K(b)$. Dazu können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $y_a < y_b$. Nun können wir ein $z \in \mathbb{R}$ mit $y_a < z < y_b$ so wählen, dass $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ falls $c \in \mathfrak{H}$ und $z \in \mathbb{Q}$ falls $c \in F$. Dann gibt es per Konstruktion von L'_c kein $r \in \mathbb{R}$ derart, dass $(r, z)^T \in L'_c$. Für $U_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < z\}$ und $U_2 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > z\}$ gilt dann also $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $L'_c \subseteq U_1 \cup U_2$, $a \in U_1$ und $b \in U_2$. Wieder mit Lemma 3.5 folgt sofort $K(a) \neq K(b)$. Damit folgt, dass der punktierte zerbrechliche Kegel \mathbb{K} total diskontinuierlich ist. \square

Proposition 4.14 ([12] S.122 Beweis von 5.4.3). *Die Menge*

$$\mathfrak{H} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist fast konstante Folge in } \{0, 2\} \right\}$$

liegt dicht in \mathfrak{C} .

Beweis. Sei $a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{C}$ mit einer Folge $a_{i \in \mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Wir setzen $b := \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{3^i}$, dann erhalten wir

$$d(a, b) = |a - b| = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \leq \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \leq 2 \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3^{k+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

und es gilt $b \in \mathfrak{H}$. Damit folgt die Behauptung, da $a \in \mathfrak{C}$ beliebig war. \square

Satz 4.15 ([7] S.92). *Der zerbrechliche Kegel ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei p der Dispersionspunkt des zerbrechlichen Kegels und Z eine Zerlegungsmenge von \mathbb{K} mit $p \in Z$. Wir müssen zeigen, dass $Z = \mathbb{K}$. Sei Z^C die zu Z komplementäre Zerlegungsmenge. Dann sind Z und Z^C abgeschlossen in \mathbb{K} und es gibt in \mathbb{R}^2 abgeschlossene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $Z = U \cap \mathbb{K}$ und $Z^C = V \cap \mathbb{K}$. Wir setzen wieder wie in der Konstruktion des zerbrechlichen Kegels $F := \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{H}$.

Für $\rho \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$ setzen wir $H_\rho = \{(x, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Nun definieren wir folgende Abbildungen:

$$\Phi_\rho := \mathfrak{C} \mapsto [\frac{1}{2}\rho, 1 - \frac{1}{2}\rho], c \mapsto \Phi_\rho(c) := \frac{1}{2}\rho + c(1 - \rho)$$

Für $\rho \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$ ist Φ_ρ stetig und für $\Phi_\rho \neq \frac{1}{2}$ auch injektiv. Wir definieren die Mengen $G_\rho := H_\rho \cap (\bigcup_{c \in \mathfrak{C}} l_c) \cap U \cap V$. Die G_ρ sind als Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen und die Abbildung $j_\rho : \mathbb{R} \mapsto H_\rho, x \mapsto j_\rho(x) := (x, \rho)$ ist ebenfalls stetig und auch bijektiv. Also sind die Mengen $F_\rho := (j_\rho \circ \Phi_\rho)^{-1}[G_\rho]$ als Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen in \mathfrak{C} und per Konstruktion von Φ_ρ, j_ρ und G_ρ gilt $F_\rho = \{c \in \mathfrak{C} \mid (\Phi_\rho(c), \rho) \in G_\rho\}$. Aus $Z \cap Z^C = \emptyset$ folgt $U \cap V \cap \mathbb{K} = \emptyset$. Daraus folgt insbesondere, dass $G_\rho \cap \mathbb{K} = \emptyset$ für alle $\rho \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$. Dies bedeutet $\mathfrak{H} \cap F_\rho = \emptyset$, also $F_\rho \subseteq F$. Da \mathfrak{H} dicht in \mathfrak{C} liegt, ist $\text{int}_{\mathfrak{C}} F$ leer, also insbesondere $\text{int}_{\mathfrak{C}} F_\rho = \emptyset$. Desweiteren ist \mathfrak{H} abzählbar und damit Vereinigung abzählbar vieler einelementiger und somit nirgends dichter Teilmengen von \mathfrak{C} . Letzteres folgt, da einelementige Teilmengen von \mathfrak{C} abgeschlossen in \mathfrak{C} , aber, da \mathfrak{C} in sich dicht ist, nicht offen sind. Wir definieren nun $\mathcal{F} := \{F_\rho \mid \rho \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]\}$ und $M := \mathfrak{H} \cup \bigcup \mathcal{F}$, dann ist mit dem bisher bewiesenen M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen. Nun ist \mathfrak{C} vollständig und wir können den Bairschen Kategoriensatz anwenden. Sei O eine offene Menge in \mathfrak{C} , dann ist O also von zweiter Kategorie während $O \cap M$ ebenfalls abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Daher ist $O \setminus M \neq \emptyset$ und per Konstruktion von M gilt $O \setminus M \subseteq F \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Darum ist $F \setminus \bigcup \mathcal{F}$ dicht in \mathfrak{C} .

Nun wählen wir $c_0 \in F$ derart, dass $L_{c_0} \cap V \neq \emptyset$ und setzen $t_0 := \sup\{t \in [0, \frac{1}{2}] \mid (s, t) \in l_{c_0} \cap V\}$. Sei nun $q := (s_0, t_0) \in l_{c_0}$ mit einem passenden $s_0 \in \mathbb{R}$, dann ist $q \in V$, denn V und l_{c_0} sind abgeschlossen. Andererseits liegt in jeder Umgebung von q per Konstruktion ein Punkt x von \mathbb{K} , denn $\mathbb{K} \cap l_{c_0} = l_{c_0} \setminus \mathbb{Q}$ liegt dicht in l_{c_0} . Per Definition von t_0 ist $x \in Z \subseteq U$. Also gilt $q \in \text{cl}_{\mathbb{R}^2} U$. Da U abgeschlossen war, ist $q \in U$, denn $t_0 = \frac{1}{2}$ ist nicht möglich, da Z als Zerlegungsmenge offen und somit Umgebung von p ist und $Z \cap V = \emptyset$.

Also ist $q \in U \cap V$, woraus $q \notin L_{c_0} \subseteq \mathbb{K}$ folgt. Wegen $c_0 \in F$ ist $t_0 \in \mathbb{Q}$, und somit ist $q \in H_{t_0}$. Damit folgt, dass $q \in G_{t_0}$ also $c_0 \in F_{t_0} \subseteq M$.

Da wir $c_0 \in F$ beliebig gewählt hatten, folgt aus $L_c \cap V \neq \emptyset \Rightarrow c \in \bigcup \mathcal{F}$, also $L_c \subseteq Z$ für alle $c \in F \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Also gilt $A := \{(c, 0)^T \mid c \in F \setminus \bigcup \mathcal{F}\} = \{(x_1, x_2)^T \in Z \mid x_2 = 0\}$. Dass die rechte Seite der Gleichung eine in \mathbb{K} abgeschlossene Menge darstellt, folgt, da Z abgeschlossen ist. Da A abgeschlossen ist, ist es auch $F \setminus \bigcup \mathcal{F}$ in \mathfrak{C} . Da \mathfrak{C} abgeschlossen ist und $F \setminus \bigcup \mathcal{F}$ dicht in \mathfrak{C} liegt, folgt $F \setminus \bigcup \mathcal{F} = \mathfrak{C}$. Es folgt $L_c \cap V = \emptyset$ für alle $c \in \mathfrak{C}$, also $Z^C = \emptyset$. Damit ist \mathbb{K} zusammenhängend. \square

5 Wilders zerbrechliche Menge und dessen Fortsetzung auf \mathbb{R}^2

In diesem Kapitel werden wir Wilders zerbrechliche Menge darstellen. Sie ist erstaunlicherweise nicht nur eine zerbrechliche Menge des \mathbb{R}^2 , sondern liegt auch dicht in einem Dreieck, welches wir später präzise definieren werden. Allerdings verwendet bereits die Konstruktion mehrfach das Auswahlaxiom, wodurch man, abgesehen vom

Dispersionspunkt, keinen Punkt in Wilders zerbrechliche Menge explizit kennt. Tatsächlich könnte man eine Version von Wilders zerbrechlicher Menge konstruieren, wo viele Punkte bekannt sind. Dennoch liegt es in der Natur der Konstruktion, dass überabzählbar viele Punkte übrig bleiben, die man nicht konkret angeben kann.

5.1 Kontinua und Dreiecke

Der Begriff des Kontinuums beschreibt Mengen, die zwei bereits bekannte Eigenschaften besitzen:

Definition 5.1 (Kontinuum [23] S.426, Fußnote). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein **Kontinuum** ist eine abgeschlossene und zusammenhängende Menge in \underline{X} , die mehr als einen Punkt enthält.

Definition 5.2 ([18] S.206-207, S.233). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und C ein Kontinuum. Seien $a, b \in X$.

1. Wir sagen, dass C a und b **trennt**, wenn kein Weg in $X \setminus C$ zwischen a und b existiert.
2. Wir bezeichnen zwei Mengen A und B als **voneinander getrennt**, wenn $(A \cap \text{cl}_{\underline{X}} B) \cup (\text{cl}_{\underline{X}} A \cap B) = \emptyset$

Lemma 5.3. Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei Z eine Zerlegungsmenge in \underline{X} und Z^C die komplementäre Zerlegungsmenge, dann sind Z und Z^C **voneinander getrennt**.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition von **voneinander getrennten** Mengen, da $Z \cap Z^C = \emptyset$ und beide Mengen abgeschlossen sind. \square

Lemma 5.4. Sei C ein Kontinuum in \mathbb{R}^2 . Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Wenn C die Punkte a und b trennt, liegen sie in **verschiedenen Zusammenhangskomponenten**.

Beweis. Da C ein Kontinuum ist, ist $\mathbb{R}^2 \setminus C$ offen in \underline{X} . Mit Korollar 3.17 ist $\mathbb{R}^2 \setminus C$ genau dann zusammenhängend, wenn es wegzusammenhängend ist. Folglich, da kein Weg zwischen a und b existiert, liegen a und b in **verschiedenen Zusammenhangskomponenten**. \square

Lemma 5.5 (Siehe [18] S.233, Theoreme XXXVII). Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen und $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Es seien A und B **voneinander getrennt** und entweder A oder B beschränkt. Sei $a \in A$ und $b \in B$ dann existiert ein Kontinuum $C \in \mathbb{R}^2$ das a und b trennt und für das gilt $(A \cup B) \cap C = \emptyset$.

Wir führen Jordan-Kurven ein und werden später Dreiecke als Bildmengen von Jordan-Kurven identifizieren. Diesen ganzen Aufwand benötigen wir, um ein Lemma zu formulieren, das wir benötigen werden, um zu zeigen, dass Wilders zerbrechliche Menge zusammenhängend ist.

Definition 5.6 (Geschlossene Kurve, Jordan-Kurve [2] S.18). Sei $\underline{X} := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und f ein Weg in \underline{X} .

1. Falls $f(0) = f(1)$, nennen wir f eine **geschlossene Kurve**.
2. Ist weiters $X = \mathbb{R}^2$ und ist die Einschränkung von f auf $[0, 1[$ injektiv, so nennen wir die geschlossene Kurve f eine **Jordan¹⁶-Kurve**.

Folgenden Satz dessen Ergebnis anschaulich sofort als wahr angenommen wird, benötigen wir später um den Zusammenhang von Wilders zerbrechliche Menge zu beweisen. Auf einen Beweis verzichten hier, da er sehr aufwendig ist und hier den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Wir verweisen hier auf zwei Quellen für den Beweis, wobei der Beweis in [2] geometrisch ist und sich auf jene Jordan-Kurven beschränkt, deren Bilder endliche Vereinigungen von Strecken sind. Der Beweis in [4] ist eher topologischer Natur:

Satz 5.7 (Jordanscher Kurvensatz Siehe [2] S.18, Satz 1.7.1 oder [4] S.143). *Sei f eine Jordan-Kurve und $J := \text{Bild}(f)$. Dann besitzt der Teilraum $\mathbb{R}^2 \setminus J$ von \mathbb{R}^2 genau zwei Zusammenhangskomponenten K_1 und K_2 , wobei genau eine davon beschränkt ist und die Mengen $K_1 \cup J$ und $K_2 \cup J$ sind jeweils abgeschlossen in \mathbb{R}^2 .*

Definition 5.8. *Sei f eine Jordan-Kurve und $J := \text{Bild}(f)$. Wir nennen die beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus J$ das **von f eigeschlossene Gebiet**.*

Proposition 5.9. *Seien f und g zwei injektive Wege mit $f(0) = g(1)$ und $f(1) = g(0)$, derart, dass $f(x) \neq g(y)$ für alle $x, y \in]0, 1[$. Dann ist $\text{Bild}(f) \cup \text{Bild}(g)$ das Bild einer Jordan-Kurve Φ .*

Beweis. Wir definieren $\Phi : [0, 1] \mapsto \text{Bild}(f) \cup \text{Bild}(g)$ wie folgt:

$$\Phi(x) := \begin{cases} f(2x) & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2(x - \frac{1}{2})) & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Wegen $f(1) = g(0)$ ist Φ wohldefiniert und stetig und wegen $f(0) = g(1)$ ist Φ eine geschlossene Kurve. Da f und g injektiv sind und $f(x) \neq g(y)$ für $x, y \in]0, 1[$, ist Φ injektiv auf $[0, 1[$. Daraus folgt sofort die Behauptung. \square

Mit den Begriffen der Jordan-Kurve und dem Jordanschen Kurvensatz, haben wir nun die Voraussetzungen geschaffen um folgendes Lemma zu formulieren. Wir werden es später beim Beweis des Zusammenhangs von Wilders zerbrechlicher Menge verwenden.

Lemma 5.10 (Siehe [22] S.334, Lemma 2). *Sei $X := (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und f, g zwei Wege in X wie in Proposition 5.9, $J := \text{Bild}(f) \cup \text{Bild}(g)$ und Φ ebenfalls wie in Proposition 5.9. Sei C ein Kontinuum, das a und b trennt und A das von Φ eingeschlossene Gebiet. Sei $B := A \cup J$. Dann existiert ein Kontinuum $C' \subseteq C$ derart, dass auch $C \subseteq B$ gilt und $\text{Bild}(f) \cap C' \neq \emptyset$ und $\text{Bild}(g) \cap C' \neq \emptyset$ ist.*

¹⁶Camille Jordan 1838-1922

Die im folgenden Lemma definierte Menge \mathcal{S} repräsentiert ein Dreieck (genauer seinen Rand). Wir wollen dies hier nur für unsere Zwecke präzisieren und dann zeigen, was intuitiv klar ist, nämlich dass jedes Dreieck Bild einer Jordan-Kurve ist.

Lemma 5.11. *Seien $a := (a_1, a_2)^T, b := (b_1, b_2)^T, c := (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $c \notin \mathcal{S}(a, b)$, $a \notin \mathcal{S}(b, c)$ und $b \notin \mathcal{S}(a, c)$, dann ist $\mathcal{D}(a, b, c) := \mathcal{S}(a, b) \cup \mathcal{S}(b, c) \cup \mathcal{S}(a, c)$ die Bildmenge einer Jordankurve f .*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $\mathcal{S}(a, b) \cap \mathcal{S}(b, c) = \{b\}$. Nehmen wir an, es gäbe ein $b \neq x_0 \in \mathcal{S}(a, b) \cap \mathcal{S}(b, c) = \{b\}$. Dann gibt es $t_1, t_2 \in]0, 1[$ mit $t_1 a + (1 - t_1)b = x_0 = t_2 b + (1 - t_2)c$. Daraus folgt:

$$t_1 a + (1 - t_1)b - t_2 b = (1 - t_2)b \Leftrightarrow c = \frac{t_1}{1 - t_2} a + \left(1 - \frac{t_1}{1 - t_2}\right)b$$

und

$$t_1 a = (t_2)b - t_1 b + (1 - t_2)c \Leftrightarrow a = \frac{1 - t_2}{t_1} c + \left(1 - \frac{1 - t_2}{t_1}\right)b$$

Wir setzen $t_0 := \frac{t_1}{1 - t_2}$. Wegen $t_1, t_2 \in [a, b]$ ist dann $t_0 \geq 0$ und es gilt entweder $t_0 \leq 1$ oder $\frac{1}{t_0} \leq 1$. Daraus folgt entweder $a \in \mathcal{S}(b, c)$ oder $c \in \mathcal{S}(a, b)$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Andererseits folgt aus der Konstruktion von $\mathcal{S}(a, b)$ und $\mathcal{S}(b, c)$, dass $b \in \mathcal{S}(a, b) \cap \mathcal{S}(b, c)$, also gilt $\mathcal{S}(a, b) \cap \mathcal{S}(b, c) = \{b\}$. Völlig analog lässt sich zeigen, dass $\mathcal{S}(a, c) \cap \mathcal{S}(b, c) = \{c\}$ und $\mathcal{S}(a, b) \cap \mathcal{S}(a, c) = \{a\}$. Wir definieren die Abbildungen g_1, g_2, g_3 nun wie folgt:

$$g_1 : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(a, b), t \mapsto g_1(t) := ta + (1 - t)b$$

$$g_2 : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(b, c), t \mapsto g_2(t) := tb + (1 - t)c$$

$$g_3 : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(a, c), t \mapsto g_3(t) := ta + (1 - t)c$$

Die Abbildungen g_1, g_2 und g_3 sind alle stetig und bijektiv und es gilt $g_1(1) = b = g_2(0)$, $g_2(1) = c = g_3(0)$ und $g_3(1) = a = g_1(0)$. Wir definieren die Abbildung

$$f : [0, 1] \mapsto \mathcal{D}(a, b, c), t \mapsto f(t) := \begin{cases} g_1(3t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ g_2(3(t - \frac{1}{3})) & \text{falls } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ g_3(3(t - \frac{2}{3})) & \text{falls } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Mit dem bereits gezeigten ist f wohldefiniert stetig, die Einschränkung von f auf das Intervall $[0, 1[$ ist injektiv und es gilt $f(0) = f(1)$. Also ist f eine Jordan-Kurve mit $\text{Bild}(f) = \mathcal{D}(a, b, c)$. \square

Definition 5.12. *Seien $a := (a_1, a_2)^T, b := (b_1, b_2)^T, c := (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $c \notin \mathcal{S}(a, b)$, $a \notin \mathcal{S}(b, c)$ und $b \notin \mathcal{S}(a, c)$.*

1. *Wir bezeichnen die Menge $\mathcal{D}(a, b, c) := \mathcal{S}(a, b) \cup \mathcal{S}(b, c) \cup \mathcal{S}(a, c)$ als das **von den Punkten a, b und c festgelegte Dreieck**.*
2. *Mit $\mathcal{I}(a, b, c)$ bezeichnen wir die Menge*

$$\mathcal{I}(a, b, c) := \{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c \mid \lambda_i \in]0, 1[, 1 \leq i \leq 3, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$$

3. Sei f eine Jordan-Kurve mit $\text{Bild}(f) = \mathcal{D}(a, b, c)$ und K das von f eingeschlossene Gebiet, dann nennen wir K das **Innengebiet** von $\mathcal{D}(a, b, c)$.
4. Die Punkte a, b, c nennen wir die **Eckpunkte** des Dreiecks.
5. Die Mengen $\mathcal{S}(a, b)$, $\mathcal{S}(b, c)$ und $\mathcal{S}(a, c)$ nennen wir die **Seiten** von $\mathcal{D}(a, b, c)$.

Folgende Begriffe führen wir ein, um das Innengebiet eines Dreiecks zu charakterisieren. Wir werden dabei zeigen, dass die Menge $\mathcal{I}(a, b, c)$ mit dem Innengebiet des Dreiecks $\mathcal{D}(a, b, c)$ übereinstimmt.

Definition 5.13 (Konvexkombination, konvexe Menge [16] S.3). Seien $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_k = 1$.

1. Wir nennen eine Menge A **konvex**, falls für $x, y \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$
2. Wir nennen ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ eine **Konvexkombination** von $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$.
3. Wir sagen dass eine Menge A **unter Konvexkombinationen abgeschlossen** ist, wenn Konvexkombinationen endlich vieler Elemente in A wieder in A liegen.
4. Die Menge aller Konvexkombinationen von a_1, \dots, a_n bezeichnen wir mit $\text{Conv}(a_1, \dots, a_n)$.

Bemerkung 5.14. Die Seiten eines Dreiecks sind die Konvexkombinationen zweier Eckpunkte.

Lemma 5.15 ([16] S.6, Theorem 1.3). Die Menge der Konvexkombinationen von zwei Punkten $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist die Bildmenge eines Weges.

Beweis. Konvexkombinationen von a und b haben die Form $\alpha a + (1 - \alpha)b$. Betrachtet man dies als Funktion der Variable α auf dem Definitionsintervall $[0, 1]$ folgt sofort die Aussage. \square

Lemma 5.16 ([16] S.2-3). Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, dann ist $\text{Conv}(a_1, a_2, a_3)$ konvex.

Beweis. Seien $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i \in \text{Conv}(a_1, a_2, a_3)$ und $y = \sum_{i=1}^3 \beta_i a_i \in \text{Conv}(a_1, a_2, a_3)$ mit $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1 = \sum_{i=1}^3 \beta_i$. Wir betrachten $\mathcal{S}(x, y)$. Dazu sei $\gamma \in [0, 1]$ und $z := \gamma x + (1 - \gamma)y = \sum_{i=1}^3 \gamma \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i a_i - \sum_{i=1}^3 \gamma \beta_i a_i = \sum (\gamma \alpha_i + (1 - \gamma)\beta_i) a_i$. Wegen $\gamma \leq 1$ und $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ folgt $\gamma \alpha_i + (1 - \gamma)\beta_i \geq 0$. Weiters gilt $\sum_{i=1}^3 (\gamma \alpha_i + (1 - \gamma)\beta_i) = \gamma \sum_{i=1}^3 \alpha_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^3 \beta_i = \gamma + (1 - \gamma) = 1$. Es folgt $z \in \text{Conv}(a_1, a_2, a_3)$. \square

Lemma 5.17 (Vgl. etwa [4] S.47, Section G 2.). Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen und $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, dann ist die Menge $\mathcal{I}(a_1, a_2, a_3) := \{\sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in]0, 1[, 1 \leq i \leq 3, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$ leer oder zusammenhängend.

Beweis. Seien $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i$ und $y = \sum_{i=1}^3 \beta_i a_i$ mit $\alpha_i, \beta_i \in]0, 1[$ und $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1 = \sum_{i=1}^3 \beta_i$, dann sind $x, y \in \mathcal{I}(a_1, a_2, a_3)$. Wir betrachten $\mathcal{S}(x, y)$. Dazu sei $\gamma \in [0, 1]$ und $z := \gamma x + (1 - \gamma)y = \sum_{i=1}^3 \gamma \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^3 \beta_i a_i - \sum_{i=1}^3 \gamma \beta_i a_i = \sum (\gamma \alpha_i + (1 - \gamma) \beta_i) a_i$. Ähnlich wie im Beweis von 5.16 folgt $z \in \mathcal{I}(a_1, a_2, a_3)$, man muss nur beachten, dass die Koeffizienten α_i, β_i hier strikt größer 0 sind und somit $\gamma \alpha_i + (1 - \gamma) \beta_i > 0$ gilt. Damit existiert mit Lemma 5.15 ein Weg zwischen x und y in $\mathcal{I}(a_1, a_2, a_3)$. Es folgt x ist zusammenhängend. \square

Proposition 5.18. *Seien $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T, c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$, das mit euklidischer Metrik versehen sei und $M := \max\{a_i, b_i, c_i\}$ (bzw $m := \min\{a_i, b_i, c_i\}$) für $1 \leq i \leq 2$ fest, dann gilt für eine Konvexkombination $x = (x_1, x_2)^T = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$ von a, b und c , dass $x_i \leq M$ (bzw. $x_i \geq m$).*

Beweis. Wir zeigen dies nur für $M = \max\{a_i, b_i, c_i\}$, der andere Fall lässt sich analog zeigen. Aus der Definition von x folgt $x_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i \leq \sum_{i=1}^3 (\lambda_i M) = M \sum_{i=1}^3 \lambda_i = M$. \square

Lemma 5.19. *Seien $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T, c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$. $\text{Conv}(a, b, c)$ ist beschränkt und es gilt: Setzt man für $1 \leq i \leq 2$, $m_i := \min\{a_i, b_i, c_i\}$ und $M_i := \max\{a_i, b_i, c_i\}$, $\tilde{M} := \max\{|m_1|, |m_2|, |M_1|, |M_2|\}$ und $\varepsilon := 2\tilde{M} + 1$. Dann liegen alle Konvexkombinationen der Punkte a, b, c in $U_\varepsilon(0)$.*

Beweis. Sei $x = (x_1, x_2)^T$ Konvexkombination der Punkte a, b und c , dann gilt $d(x, 0) \leq d((x_1, 0)^T, 0) + d((x_1, 0)^T, x) = |x_1| + |x_2| \leq 2\tilde{M} < \varepsilon$. Die vorletzte Ungleichung folgt dabei aus 5.18. Damit folgt $x \in U_\varepsilon(0)$, woraus $\text{Conv}(a, b, c) \subseteq U_\varepsilon(0)$ folgt. Somit ist $\text{Conv}(a, b, c)$ beschränkt. \square

Anschaulich gesprochen zeigt folgende Proposition, dass man, wenn man einen Punkt außerhalb einer konvexen Menge im \mathbb{R}^2 gegeben hat, sich von dort für jede Koordinate entweder in positive oder negative Koordinatenrichtung unbeschränkt bewegen kann, ohne die entsprechende konvexe Menge zu treffen:

Proposition 5.20. *Seien $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T, c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $e_i, 1 \leq i \leq 2$ der i -te kanonische Basisvektor in \mathbb{R}^2 und $x \in A := \mathbb{R}^2 \setminus \text{Conv}(a, b, c)$ (mit 5.19 existiert so ein x) dann gilt entweder $S_+^i := \{x + \lambda e_i \mid \lambda > 0\} \subseteq A$ oder $S_-^i := \{x - \lambda e_i \mid \lambda > 0\} \subseteq A$.*

Beweis. Sei $i \in \{0, 1\}$. Nehmen wir an die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es ein $y = x + \lambda_y e_i \in S_+^i \cap \text{Conv}(a, b, c)$ und ein $z = x - \lambda_z e_i \in S_-^i \cap \text{Conv}(a, b, c)$. Mit $\lambda_y, \lambda_z > 0$. Ist $\lambda_y = \lambda_z$, so ist $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$ im Widerspruch zu $x \in A$. Ansonsten setzen wir $\lambda := \frac{\lambda_z}{\lambda_y + \lambda_z}$, dann gilt $\lambda \in]0, 1[$ und $\lambda y + (1 - \lambda)z = \lambda(x + \lambda_y e_i) + (1 - \lambda)(x + \lambda_z e_i) = x + \lambda(\lambda_y + \lambda_z)e_i - \lambda_z e_i = x$, wieder im Widerspruch zu $x \in A$. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 5.21. *Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik d_2 versehen. Seien $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T, c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$. $A := \mathbb{R}^2 \setminus \text{Conv}(a, b, c)$ ist (weg-)zusammenhängend in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_d)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, so gewählt, dass $\text{Conv}(a, b, c) \in U_\varepsilon(0)$ (was wegen Lemma 5.19 möglich ist), dann liegen die Punkte $q_1 := (-\varepsilon, \varepsilon)^T, q_2 := (\varepsilon, \varepsilon)^T$ offensichtlich in A und es gibt Wege zwischen diesen beiden Punkten die vollständig in A liegen. Dies sieht man, da etwa für $\lambda \in [0, 1]$ und $z_\lambda := \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2 = (\varepsilon - 2\lambda\varepsilon, \varepsilon)^T$, $d_2(z_\lambda, 0) = \sqrt{(\varepsilon - 2\lambda\varepsilon)^2 + \varepsilon^2} \geq \varepsilon$ erhält. Mit 5.15 existiert ein Weg zwischen q_1 und q_2 .

Sei $x := (x_1, x_2)^T \in A$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein Weg zwischen x und einem der Punkte q_1, q_2 existiert. Sei e_1 der erste Basisvektor, dann gilt entweder $S_+^1 := \{x + \lambda e_1 \mid \lambda > 0\} \subseteq A$ oder $S_-^1 := \{x - \lambda e_1 \mid \lambda > 0\} \subseteq A$, wobei e_1 der erste kanonische Einheitsvektor des \mathbb{R}^2 ist. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $S_+^1 \in A$ gilt. Wir setzen $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2, \tau \mapsto f(\tau) := x + \tau(\varepsilon - x_1)e_1$, dann ist f ein Weg von x nach $(\varepsilon, x_2)^T$ der wegen $S_+^1 \in A$ in A liegt. Offensichtlich gilt auch $\mathcal{S}((\varepsilon, x_2)^T, q_2) \subseteq A$ (dies zeigt man wie zuvor bei $\mathcal{S}(q_1, q_2)$), weshalb auch ein Weg zwischen x und q_2 existiert. Man kann also einen Weg von jedem Punkt $x \in A$ zu q_1 oder zu q_2 konstruieren. Es folgt mit Lemma 3.14, dass A (weg-)zusammenhängend ist. \square

Wir haben nun alle Argumente zusammen um den Jordanschen Kurvensatz für den Spezialfall von Dreiecken zu folgern. Eigentliches Ziel dieses Aufwands war es, eine algebraische Methode zu kennen, mit der wir die Punkte im Innengebiet eines Dreiecks zu berechnen können:

Korollar 5.22 (Jordanscher Kurvensatz für Dreiecke). *Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen, $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ mit $c \notin \mathcal{S}(a, b)$, $a \notin \mathcal{S}(b, c)$ und $b \notin \mathcal{S}(a, c)$. Sei $\mathcal{D}(a, b, c)$ das von den Punkten a, b und c festgelegte Dreieck. Dann existieren genau zwei Zusammenhangskomponenten in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}(a, b, c)$. Diese sind $\mathcal{I}(a, b, c) := \{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c \mid \lambda_i \in]0, 1[, 1 \leq i \leq 3, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$ und $A := \mathbb{R}^2 \setminus \text{Conv}(a, b, c)$, wobei $\mathcal{I}(a, b, c)$ beschränkt ist. $\mathcal{I}(a, b, c)$ ist somit das Innengebiet von $\mathcal{D}(a, b, c)$.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass A und $\mathcal{I}(a, b, c)$ zusammenhängend sind und $\text{Conv}(a, b, c)$ beschränkt ist. Wegen $\text{Conv}(a, b, c) = \mathcal{I}(a, b, c) \cup \mathcal{D}(a, b, c)$ folgt die Behauptung. \square

Notation 5.23. *Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen, $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ mit $c \notin \mathcal{S}(a, b)$, $a \notin \mathcal{S}(b, c)$ und $b \notin \mathcal{S}(a, c)$.*

1. Mit \mathcal{C} bezeichnen wir die Menge aller Kontinua in \mathbb{R}^2
2. Mit $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$ bezeichnen wir die Menge $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c) := \{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq \mathcal{D}(a, b, c) \cup \mathcal{I}(a, b, c), b \notin C, C \cap \mathcal{S}(a, b) \neq \emptyset \text{ und } C \cap \mathcal{S}(b, c) \neq \emptyset\}$.

Proposition 5.24. *Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen, $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ mit $c \notin \mathcal{S}(a, b)$, $a \notin \mathcal{S}(b, c)$ und $b \notin \mathcal{S}(a, c)$. Sei $\mathcal{D}(a, b, c)$ das von den Punkten a, b und c festgelegte Dreieck. Sei \mathcal{C} die Menge aller Kontinua in \mathbb{R}^2 , $\mathcal{I}(a, b, c)$ das Innengebiet von $\mathcal{D}(a, b, c)$ und $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c) := \{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq \mathcal{D}(a, b, c) \cup \mathcal{I}(a, b, c), b \notin C, C \cap \mathcal{S}(a, b) \neq \emptyset \text{ und } C \cap \mathcal{S}(b, c) \neq \emptyset\}$, dann gibt es eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$, sodass eine Bijektion zwischen \mathcal{B} und dem Intervall $[0, 1]$ existiert.*

Beweis. Zuerst einmal gilt $\mathcal{D}(a, b, c) \cup \mathcal{I}(a, b, c) = \text{Conv}(a, b, c)$. Seien nun $x \in \mathcal{S}(a, b)$ und $z \in \mathcal{S}(b, c)$ fest mit $b \neq x \neq c$. Da $\text{Conv}(a, b, c)$ mit Lemma 5.16

konvex ist, gilt für $y \in \mathcal{S}(z, c) \subseteq \mathcal{S}(b, c)$, dass $\mathcal{S}(x, y) \in \tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$, denn $\mathcal{S}(x, y)$ ist mit Lemma 5.15 die Bildmenge eines Weges und somit, da Kompaktheit und Zusammenhang bildtreu sind, kompakt und zusammenhängend, also insbesondere ein Kontinuum in $\mathcal{D}(a, b, c) \cup \mathcal{I}(a, b, c)$. Es folgt $\mathcal{S}(x, y) \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$. Nun gibt es offenbar eine Bijektion $\Phi : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(z, c)$. Wir setzen

$$\mathcal{B} := \bigcup_{y \in \mathcal{S}(z, c)} \mathcal{S}(x, y)$$

dann gibt es per Konstruktion eine Bijektion $\Theta : \mathcal{S}(z, c) \mapsto \mathcal{B}$. Setzen wir $\Psi := \Theta \circ \Phi$, dann erfüllt Ψ offenbar das gewünschte. \square

Lemma 5.25 (Siehe etwa [18] S.253). *Sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik d_2 versehen, $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ mit $c \notin \mathcal{S}(a, b)$, $a \notin \mathcal{S}(b, c)$ und $b \notin \mathcal{S}(a, c)$. Sei $\mathcal{D}(a, b, c)$ das von den Punkten a, b und c festgelegte Dreieck. Sei \mathcal{C} die Menge aller Kontinua in \mathbb{R}^2 , $\mathcal{I}(a, b, c)$ das Innengebiet von $\mathcal{D}(a, b, c)$ und $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c) := \{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq \mathcal{D}(a, b, c) \cup \mathcal{I}(a, b, c), b \notin C, C \cap \mathcal{S}(a, b) \neq \emptyset \text{ und } C \cap \mathcal{S}(b, c) \neq \emptyset\}$, dann gibt es eine Bijektion zwischen $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$ und dem Intervall $[0, 1]$.*

Beweis. Mit Proposition 5.24 gibt es eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$ und eine Bijektion $\Psi : [0, 1] \mapsto \mathcal{B}$. Sei \mathcal{A} die Menge aller in \mathbb{R}^2 abgeschlossenen Mengen. Mit Korollar 2.76 gibt es eine Bijektion $\Theta : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$. Dann ist die Funktion $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, gegeben durch $\Phi := \Psi \circ \Theta$ bijektiv, also insbesondere injektiv. Weiters gilt $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}(a, b, c) \subseteq \mathcal{A}$. Wir können nun Lemma 2.69 anwenden, wonach es eine Bijektion zwischen $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$ und \mathcal{A} gibt. Da die Bijektion Θ existiert, gibt es somit auch eine Bijektion zwischen $[0, 1]$ und $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$. \square

Beim Beweis der Existenz obiger Bijektion haben wir in Abschnitt 2 (mehrfach) das Auswahlaxiom verwendet. Wilder selbst hat keinen Beweis einer solchen Bijektion geliefert, sondern auf des Paper von Knaster und Kuratowski [18] verwiesen. Es ist nicht klar, ob es möglich ist, die Existenz einer solchen Bijektion konstruktiv ohne Verwendung des Auswahlaxioms herzuleiten. Wir wollen uns hier nicht weiter mit dieser Möglichkeit beschäftigen und konstruieren Wilders zerbrechliche Menge unter Verwendung des Auswahlaxioms.

5.2 Eine Zerlegung der reellen Zahlen

Definition 5.26 (Äquivalenzrelation, [15] S.29, Definition 4.1). *Sei X eine Menge. Eine **Äquivalenzrelation** auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$ mit folgenden Eigenschaften für $x, y, z \in X$:*

1. $(x, x) \in R$ (Reflexivität)
2. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (Symmetrie)
3. $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (Transitivität)

Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x \sim_R y$.

Definition 5.27 (Äquivalenzklasse [15] S.30 Definition 4.3). Sei X eine Menge und R eine **Äquivalenzrelation** auf X . $A \subseteq X$ ist eine **Äquivalenzklasse** bezüglich R , falls gilt $x, y \in A \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Lemma 5.28 ([15] S.30 Lemma 4.4). Sei X eine Menge und R eine **Äquivalenzrelation** auf X .

1. Sei $x \in X$, dann gibt es eine Äquivalenzklasse K bezüglich R , die x enthält.
2. Seien A, B Äquivalenzklassen, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$

Beweis.

- a) Folgt sofort aus der Reflexivität
- b) Seien A und B Äquivalenzklassen bezüglich R , derart, dass $A \cap B \neq \emptyset$, dann gibt es ein $x \in A \cap B$. Seien $y \in A$ und $z \in B$. Wegen $y, x \in A$ folgt $(y, x) \in R$ und wegen $x, z \in B$ folgt $(y, x), (x, z) \in R$, also aufgrund der Transitivität $(y, z) \in R$. Daraus folgt mit der Symmetrie $z \in A$ und $y \in B$. Es folgt $A = B$. \square

Bemerkung 5.29. Wir wollen hier der Vollständigkeit halber erwähnen, dass auch Zusammenhangskomponenten Äquivalenzklassen sind. Vergleiche hierzu Lemma 3.19.

Bevor wir Wilders zerbrechliche Menge darstellen können, benötigen wir noch einen Baustein. Angelehnt an die Konstruktion der **Vitali**¹⁷-Menge (Siehe etwa [14] S.120, 5.7), zerlegen wir die reellen Zahlen in Äquivalenzklassen:

Lemma 5.30 ([14] S.120, 5.7). Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert $x \sim_{\mathcal{V}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1. $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$,
2. $x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$,
3. $x - y \in \mathbb{Q}$ und $y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$. \square

Vitali hatte eine entsprechende Zerlegung benutzt um die Existenz einer nicht Lebesgue¹⁸-messbaren Menge (Siehe etwa [21]) zu beweisen, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen:

Definition 5.31 (Vitali-Zerlegung [11] S.75-76). Für $x \in \mathbb{R}$ sei \mathcal{K}_x die Äquivalenzklasse von x bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{V}}$ aus Lemma 5.30. Wir nennen $\mathcal{V} := \{\mathcal{K}_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ die **Vitali-Zerlegung** der reellen Zahlen. Für ein Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ nennen wir $\mathcal{V}_{[a,b]} := \{\mathcal{K}_x \cap [a, b] \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Vitali-Zerlegung von $[a, b]$.

Lemma 5.32 ([11] S.75-76). Für jedes $\mathcal{K} \in \mathcal{V}$ gilt $\mathcal{K} = \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$

¹⁷Giuseppe Vitali, 1875-1932

¹⁸Henri Lebesgue (1875-1941)

Beweis. Wir wählen für jedes $\mathcal{K} \in \mathcal{V}$ mittels einer Auswahlfunktion ein $x \in \mathcal{K}$. Aufgrund der Definition von \mathcal{V} gilt für $y \in \mathcal{K}$, dass $x - y =: q \in \mathbb{Q}$, also $y = x + q$. Somit gilt $\mathcal{K} \subseteq \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$. Die umgekehrte Inklusion folgt bereits direkt aus der Definition von \mathcal{K} . \square

Korollar 5.33 ([11] S.75-76). *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{K}_x \in \mathcal{V}$ abzählbar.*

Korollar 5.34. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ liegt $\mathcal{K}_x \in \mathcal{V}$ dicht in \mathbb{R} .*

Hier benötigen wir wieder das abzählbare Auswahlaxiom:

Lemma 5.35 ([11] S.75-76). *Die Vitali-Zerlegung \mathcal{V} ist überabzählbar.*

Beweis. Es gilt per Konstruktion $\bigcup \mathcal{V} = \mathbb{R}$, ist also überabzählbar. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{K}_x \in \mathcal{V}$ abzählbar. Mit Lemma 2.61 ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen jedoch höchstens abzählbar. Daraus folgt, dass \mathcal{V} überabzählbar sein muss. \square

Wir wollen hier darauf verzichten, Kardinalzahltheorie einzuführen, daher verzichten wir bei folgendem Lemma auf den Beweis:

Lemma 5.36 (Siehe [15] S.98 Theorem 2.2). *Sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie von alleamt abzählbaren Mengen und einer überabzählbaren Indexmenge J , dann gibt es eine Bijektion zwischen J und $\bigcup_{j \in J} A_j$.*

Korollar 5.37. *Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Vitali-Zerlegung und \mathbb{R} .*

Korollar 5.38. *Es gibt eine bijektive Abbildung $\Upsilon : [0, 1] \mapsto \mathcal{V}$ und $0 \in \Upsilon(0)$*

Beweis. Die Existenz einer bijektiven Abbildung folgt mit 5.37 und $0 \in \Upsilon(0)$ folgt eventuell durch Vertauschen zweier Funktionswerte. \square

Notation 5.39. *Wir bezeichnen mit Υ ab nun eine Bijektion $\Upsilon : [0, 1] \mapsto \mathcal{V}$ mit $0 \in \Upsilon(0)$*

5.3 Wilders zerbrechliche Menge

Nun kommen wir zur Konstruktion von Wilders zerbrechliche Menge. Man beachte dabei, dass Wilder dabei gar nicht die Vitali-Zerlegung verwendete, sondern nur mit Verweis auf [18] angab, dass eine überabzählbare Familie in \mathbb{R} dichter und paarweise disjunkter Mengen existiert.

Konstruktion 5.40 (Wilders zerbrechliche Menge[23] S.424). *Es sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen und die Punkte $a := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, b := (0, 1)^T, p := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Weiters sei $\mathcal{D}(a, p, b)$ das von den Punkten a, p und b festgelegte Dreieck und \mathcal{V} sei die Vitali-Zerlegung.*

$\Upsilon : [0, 1] \mapsto \mathcal{V}$ sei bijektiv mit $0 \in \Upsilon(0)$. *Eine solche existiert wegen 5.38. Wir setzen $V_t := \Upsilon(t)$, dann gilt $0 \in V_0 = \Upsilon(0)$. Dann liegt übrigens auch $1 \in V_0$ per Konstruktion der Vitali-Zerlegung. Wir setzen für $t \in [0, 1], \tilde{\mathcal{K}}_t := \{(x, 0) \mid x \in V_t \cap [0, 1]\}$, wodurch jedes $\tilde{\mathcal{K}}_t$ dicht in der Menge $C := \mathcal{S}(a, b)$ liegt und die Menge*

$\mathcal{G} := \{\tilde{\mathcal{K}}_t \mid t \in [0, 1]\}$ überabzählbar ist. Mit 5.25 gibt es eine bijektive Abbildung $\Theta : [0, 1] \mapsto \tilde{\mathcal{C}}(a, p, b)$. Wir setzen $A_t := \Theta(t)$ für $t \in [0, 1]$ und bezeichnen wir die Strecke $\mathcal{S}((t, 0)^T, p)$ mit l_t . Sei $t \in [0, 1]$ fest und $s \in V_t$, dann definieren wir $m_s := (m_{s,1}, m_{s,2})^T \in l_s \cap A_t$ als jenes Element in $l_s \cap A_t$ bei dem $m_{s,2}$ minimal ist. Ein solches existiert, da l_s und A_t für alle $s, t \in [0, 1]$ abgeschlossen sind. Dann setzen wir $M_t := \bigcup_{s \in V_t} \{m_s\}$. Dies definieren wir für alle $t \in [0, 1]$. Wir setzen nun

$$\mathcal{W} := \bigcup_{t \in [0, 1] \setminus \{0\}} \{M_t\} \cup \{p\}$$

Notation 5.41. Mit \mathcal{W} sei ab nun immer Wilders zerbrechliche Menge gemeint.

Lemma 5.42. Es sei \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik versehen und die Punkte $a := (0, 0)^T, b := (0, 1)^T, p := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann liegt \mathcal{W} dicht in $\text{Conv}(a, p, b)$.

Beweis. Sei, falls nicht anders angegeben sei die Notation wie in Konstruktion 5.40. Sei $\lambda \in [0, 1[$, dann gilt für $x_\lambda := \lambda a + (1 - \lambda)p$ und $y_\lambda := \lambda b + (1 - \lambda)p$, dass $x_\lambda \in \mathcal{S}(a, p)$ und $y_\lambda \in \mathcal{S}(p, b)$ und damit liegt $\mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda) \in \text{Conv}(a, p, b)$. Außerdem gilt $\mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda) = \{z = (z_1, z_2)^T \in \text{Conv}(a, p, b) \mid z_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\}$, also in Worten, eine horizontale Strecke in $\text{Conv}(a, p, b)$, die zwei Seiten des Dreiecks $\mathcal{D}(a, p, b)$ verbindet. Damit gibt es zu jedem $z \in \text{Conv}(a, p, b) \setminus p$ ein $\lambda \in [0, 1[$, sodass $z \in \mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda)$. Sei λ nun fest und $z = (z_1, z_2)^T \in \mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda)$ ebenfalls. Dann gibt es ein $r \in [0, 1]$, sodass $z \in l_r$. Nun gibt es ein $t \in [0, 1]$, sodass $A_t = \mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda)$, denn $\mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda) \in \tilde{\mathcal{C}}(a, p, b)$. Dabei nehmen wir vorerst an $t \neq 0$. Da V_t dicht in $[0, 1]$ liegt, gibt es, falls $r \neq 1$ ist, zu $\varepsilon > 0$ ein $s \in V_t$, sodass $r < s < r + \varepsilon$. Falls $r = 1$, wählen wir eben ein $r - \varepsilon < s < r$ und der Rest des Beweises funktioniert dann analog. Es gibt nun per Konstruktion genau ein $\tau := (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda) \cap l_s$, für das dann gilt $\tau \in \mathcal{W}$. Nun überlegt man sich leicht, dass $z_1 = \frac{1}{2} - (1 - \lambda)(\frac{1}{2} - r)$ und $\tau_1 = \frac{1}{2} - (1 - \lambda)(\frac{1}{2} - s)$. Weiters gilt, dass $z_2 = \tau_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, denn z und τ liegen per Konstruktion in $\mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda)$. Daher gilt $d(z, \tau) = |(1 - \lambda)(\frac{1}{2} - r) - (1 - \lambda)(\frac{1}{2} - s)| = (1 - \lambda)|(\frac{1}{2} - r) - (\frac{1}{2} - s)| = (1 - \lambda)|s - r| \leq (1 - \lambda)\varepsilon < \varepsilon$. Folglich liegt $\tau \in \mathcal{W}$ in $U_\varepsilon(z)$. War nun jedoch $t = 0$, so wählt man sich ein $z' \in \text{Conv}(a, p, b)$ mit $z' \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ und $z' \notin \mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda)$. Ein solches z' existiert, da $\mathcal{S}(x_\lambda, y_\lambda)$ offenbar nirgends dicht in \mathbb{R}^2 ist und für z' gibt es nun ein $\tau \in \mathcal{W}$ mit $d(z', \tau) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nun müssen wir nur noch die Dreiecksungleichung anwenden und erhalten. $d(z', \tau) \leq d(z, z') + d(z', \tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \mathcal{W} liegt also dicht in $\text{Conv}(a, b, c)$, was wir zeigen wollten. \square

Lemma 5.43 ([23] S.425). Sei $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ dann ist $\underline{\mathcal{W} \setminus \{p\}}$ total diskontinuierlich.

Beweis. Seien $q_1, q_2 \in \mathcal{W}$ mit $q_1 \neq q_2$, dann gibt es $r, s \in \mathbb{R}$ mit $q_1 \in l_r$ und $q_2 \in l_s$. Es gilt $r \neq s$, denn per Konstruktion enthalten l_r und l_s höchstens einen Punkt von $\mathcal{W} \setminus \{p\}$. Wir nehmen ohne Beschränkung an $r < s$ und wählen $t \in [0, 1]$ mit $r < t < s$, $t \in V_0$, wobei V_0 wie in 5.40 sei. Wir betrachten die Gerade $G_t := \{\lambda(t, 0)^p + (1 - \lambda)p \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1 - 2y)t + y\}$. Diese enthält keinen Punkt von $\mathcal{W} \setminus \{p\}$ und teilt den \mathbb{R}^2 in 2 Hälften, die Mengen $O_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x < (1 - 2y)t + y\}$ und $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x > (1 - 2y)t + y\}$

die offen und disjunkt sind. Seien $G_r := \{(x, y)^T \in \mathbb{R} \mid x = (1 - 2y)r + y\}$ und $G_s := \{(x, y)^T \in \mathbb{R} \mid x = (1 - 2y)s + y\}$. Nun gilt $l_r \subseteq G_r$ und $l_s \subseteq G_s$ und der gemeinsame Schnittpunkt dieser Geraden ist per Konstruktion $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, weshalb gilt $(l_r \setminus p) \subseteq O_1$ und $(l_s \setminus p) \subseteq O_2$. Daraus folgt wiederum $q_1 \in O_1$ und $q_2 \in O_2$. Da $G_t \cap \mathcal{W} = \emptyset$ gilt $\mathcal{W} \setminus \{p\} \subseteq O_1 \cup O_2$. Also ist wegen $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ die Menge $Z := (\mathcal{W} \setminus \{p\}) \cap O_1$ eine Zerlegungsmenge in $\mathcal{W} \setminus \{p\}$ und es gilt $q_1 \in Z$, aber $q_2 \notin Z$. Somit ist $\emptyset \neq Z \neq (\mathcal{W} \setminus \{p\})$, also $(\mathcal{W} \setminus \{p\})$ nicht zusammenhängend. \square

Lemma 5.44 ([23] S.426). *Wilders zerbrechliche Menge ist zusammenhängend.*

Beweis. Alle Notation sei so wie in Konstruktion 5.40. Nehmen wir an \mathcal{W} wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine Zerlegungsmenge Z in \mathcal{W} die den Punkt $p := (0, 0)^T$ enthält, aber $Z^C \neq \emptyset$. Sei nun $c = (c_1, c_2)^T \in Z^C$. Mit Lemma 5.5 existiert ein Kontinuum $C \subseteq \mathbb{R}^2$, das die Punkte p und c trennt und für das gilt $C \cap (Z \cup Z^C) = \emptyset$. Sei l_s für $s \in [0, 1]$, sodass $c \in l_s$ ist. Sei z der Schnittpunkt von l_s mit $\mathcal{S}(a, b)$, dann gilt $c \in \mathcal{S}(p, z) = l_s$. Wir betrachten das von den Punkten p, a und z bestimmte Dreieck $\mathcal{D}(p, a, z)$. Man beachte hier, dass per Konstruktion von \mathcal{W} , $c \notin \mathcal{S}(p, a) = l_0$ ist, also ist $s > 0$. Sei $J := \mathcal{S}(p, a) \cup \mathcal{S}(a, z) \cup \mathcal{S}(z, c)$ und $K := \mathcal{S}(c, p)$, so existiert nach Lemma 5.10 ein Kontinuum $C' \subseteq C$ mit $C' \subseteq \text{Conv}(p, a, z)$, sodass $C' \cap J \neq \emptyset \neq C' \cap K$ gilt. Sei $v \in C' \cap K$. Da $p, c \notin C'$, muss es einen Punkt $q \in \mathcal{I}(p, a, z) \cap C'$ geben, wobei $\mathcal{I}(p, a, z)$ das Innengebiet von $\mathcal{D}(p, a, z)$ bezeichnet. Insbesondere gibt es ein $t \in [0, s[$, sodass $q \in l_t$ liegt. Wir wählen $q \in \mathcal{I}(p, a, z) \cap C'$ so, dass dann t minimal ist. Es gilt nun $\mathcal{S}(a, q) \cup C' \cup \mathcal{S}(v, b) =: C_{t_1} \in \tilde{\mathcal{C}}(a, p, b)$ für ein $t_1 \in [0, 1]$. Ist $t_1 = 0$ so wählen wir eben eine Strecke von v zu einem anderem Punkt $b' \in \mathcal{S}(p, b) \setminus \{p, b\}$, und setzen stattdessen $C_{t_1} := \mathcal{S}(a, q) \cup C' \cup \mathcal{S}(v, b')$. Dann ist $t_1 \neq 0$ und damit $M_{t_1} \cap \mathcal{W}$ nicht leer. Nun gibt es ein $t < r < s$ derart, dass $(r, 0)^T \in \tilde{\mathcal{K}}_{t_1}$ ist. Dies bedeutet, dass es einen Punkt $q_r \in l_r \cap C_{t_1}$ gibt und per Konstruktion gilt $q_r \in C'$. Dies ist ein Widerspruch, denn $C' \subseteq C$ und C waren mit Lemma 5.5 so gewählt, dass $C \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Damit folgt aus Z Zerlegungsmenge und $p \in Z$ notwendigerweise $Z^C = \emptyset$, was bedeutet \mathcal{W} ist zusammenhängend. \square

5.4 Wilders zerbrechliche Staubwolke

Nun wagen wir uns daran Wilders Konstruktion auf der ganzen reellen Ebene fortzuführen.

Als ersten Schritt benötigen wir eine weitere Definition.

Definition 5.45 (Konvexer Kegel [16] S.39, 12.).

1. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, dann nennen wir $\text{Cone}(a_1, a_2, \dots, a_k) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k\}$ den durch $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ erzeugten **konvexen Kegel**.
2. Ist $k = 2 = n$ und a_1, a_2 linear unabhängig dann bezeichnen wir die Mengen $\mathcal{R}_1 := \text{Cone}(a_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda a_1 \text{ für ein } 0 \leq \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{R}_2 := \text{Cone}(a_2)$ als die **Begrenzungsstrahlen** von $\text{Cone}(a_1, a_2)$.

Lemma 5.46 ([19] S.7). *Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $\text{Cone}(a, b)$ der von a, b erzeugte konvexe Kegel, dann ist $\text{Cone}(a, b)$ unter endlichen Konvexkombinationen abgeschlossen und somit konvex*

Beweis. Seien $c_1 := \alpha_1 a + \beta_1 b, c_2 := \alpha_2 a + \beta_2 b, \dots, c_k := \alpha_k a + \beta_k b \in \text{Cone}(a, b)$ und $x := \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i$ für $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i > 0, 1 \leq i \leq k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, dann gilt $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\alpha_i a + \beta_i b) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i \alpha_i) a + (\sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i) b \in \text{Cone}(a, b)$. Also ist $\text{Cone}(a, b)$ unter endlichen Konvexkombinationen abgeschlossen und somit erst recht konvex. \square

Korollar 5.47. *Sei $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $\lambda, \alpha > 0$, dann ist $\alpha \lambda a + (1 - \alpha) \lambda b \in \text{Cone}(a, b)$.*

Lemma 5.48. *Seien $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $c := \alpha a + (1 - \alpha) b$ für $\alpha \geq 0$, dann ist die Menge $\text{Cone}(c) \subseteq \text{Cone}(a, b)$.*

Beweis. Sei $x = \lambda c \in \text{Cone}(c)$, dann gilt $x = \lambda (\alpha a + (1 - \alpha) b) = (\alpha \lambda a + (1 - \alpha) \lambda b) \in \text{Cone}(a, b)$, wie wir im letzten Korollar gezeigt haben. \square

Definition 5.49. *Seien $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $p := (0, 0)^T$. Weiters seien $\mathcal{R}_1 = \text{Cone}(a)$ und $\mathcal{R}_2 = \text{Cone}(b)$ die Begrenzungsstrahlen von $\text{Cone}(a, b)$ und \mathcal{C} die Menge aller Kontinua in \mathbb{R}^2 . Wir bezeichnen ab nun die Menge*

$$\hat{\mathcal{C}} := \{C \in \mathcal{C} \mid C \text{ beschränkt}, p \notin C, \mathcal{R}_1 \cap C \neq \emptyset, \mathcal{R}_2 \cap C \neq \emptyset, c \in \text{Conv}(a, b)\}$$

immer mit $\hat{\mathcal{C}}$.

Lemma 5.50. *Es gibt eine Bijektion von $[0, 1]$ nach $\hat{\mathcal{C}}$.*

Beweis. Sei \mathcal{A} die Menge aller abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^2 . Es gilt, wie man sich leicht überlegt $\text{Conv}((0, 0)^T, a, b) \subseteq \text{Cone}(a, b)$, wie wir in 5.25 gezeigt haben, existiert eine bijektive Abbildung von \mathcal{A} nach $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$ und von dort nach $[0, 1]$. Nun gilt $\tilde{\mathcal{C}}(a, p, b) \subseteq \hat{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{A}$ (Siehe wegen $\tilde{\mathcal{C}}(a, p, b)$) Notation 5.23). Mit Lemma 2.69 folgt, dass eine Bijektion von $\hat{\mathcal{C}}$ nach \mathcal{A} existiert und da eine Bijektion von dort nach $[0, 1]$ existiert, folgt die Aussage. \square

Wir konstruieren Wilders unendlichen Kegel fast analog zu Wilders zerbrechliche Menge. Man muss dabei lediglich beachten, dass man explizit Beschränktheit der auszuwählenden Kontinua fordert:

Konstruktion 5.51 (Wilders unendlicher Kegel). *Sei $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $p := (0, 0)^T$ gegeben. Wir definieren die Bijektion $\Xi := [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(a, b), x \mapsto \Xi(x) := (x - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$. Sei nun $\Upsilon : [0, 1] \mapsto \mathcal{V}$ bijektiv, wobei \mathcal{V} die Vitali-Zerlegung ist und so, dass $0 \in \Upsilon(0)$. Für $t \in [0, 1]$ setzen wir außerdem $L_t := \{\lambda \Xi(t) \mid \lambda > 0\} = \text{Cone}(\Xi(t))$. Mit Lemma 5.48 gilt dann $L_t \subseteq \text{Cone}(a, b)$. Sei außerdem \mathcal{C} die Menge aller Kontinua in $\mathbb{R}^2, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ die Begrenzungsstrahlen von $\text{Cone}(a, b)$ und $\hat{\mathcal{C}} := \{C \in \mathcal{C} \mid C \text{ beschränkt}, C \subseteq \text{Cone}(a, b), p \notin C, \mathcal{R}_1 \cap C \neq \emptyset, \mathcal{R}_2 \cap C \neq \emptyset\}$, dann gibt es eine Bijektion $\Theta : [0, 1] \mapsto \hat{\mathcal{C}}$, wie wir in Lemma 5.50 gezeigt haben. Wir setzen dann $C_t := \Theta(t) \in \hat{\mathcal{C}}$. Sei nun $t \in [0, 1]$ fest, dann wählen wir für alle $s \in \Upsilon(t) \cap [0, 1]$, $m_s := (m_{s,1}, m_{s,2})^T$ als jenes Element in $L_s \cap C_t$, bei dem $m_{s,2}$ minimal ist. Dies ist möglich, da laut Vorgabe C_t beschränkt*

ist und L_s und C_t abgeschlossen sind. Wir setzen dann $M_t := \bigcup_{s \in \Upsilon(t)} \{m_s\}$. Dies führen wir für jedes $t \in [0, 1]$ durch und setzen

$$\mathcal{W}_\infty := \bigcup_{t \in]0,1[} M_t \cup \{p\}$$

Der Beweis von folgendem Lemma ist an den Beweis von Lemma 5.44 angelehnt, der seinerseits aus [23] S.426 stammt. Wir wollen ihn aber nochmal im Detail durchgehen, weil der Zusammenhang unserer Konstruktion auf ganz \mathbb{R}^2 den Zusammenhang dieser voraussetzen wird.

Lemma 5.52. *Wilders unendlicher Kegel ist zusammenhängend.*

Beweis. Alle Notation sei so wie in Konstruktion 5.51. Nehmen wir an \mathcal{W}_∞ wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine Zerlegungsmenge Z in \mathcal{W}_∞ die den Punkt $p := (0, 0)^T$ enthält, aber $Z^C \neq \emptyset$. Sei nun $c = (c_1, c_2)^T \in Z^C$. Per Konstruktion von Wilders unendlichem Kegel ist $c_2 < 0$. Wir wählen nun eine untere Schranke $S < 2c_2 < 0$ und setzen $\lambda := -2S > 0$. Wir bilden $\mathcal{D}(p, \lambda a, \lambda b)$, das von den Punkten $p, \lambda a, \lambda b$ festgelegte Dreieck, dann gilt $c \in \text{Conv}(p, \lambda a, \lambda b)$. Mit Lemma 5.5¹⁹ existiert ein Kontinuum $C \subseteq \mathbb{R}^2$, das die Punkte p und c trennt und für das gilt $C \cap (Z \cup Z^C) = \emptyset$. Sei L_s für $s \in [0, 1]$, so, dass $c \in L_s$. Es gilt dann auch $c \in \text{Conv}(\lambda a, \lambda b, p) \cup L_s =: \tilde{l}_s$. Sei $z = \lambda \Xi(s)$ der Schnittpunkt von \tilde{l}_s mit $\mathcal{S}(\lambda a, \lambda b)$, dann gilt $c \in \mathcal{S}(p, z)$. Wir betrachten das von den Punkten $p, \lambda a$ und z bestimmte Dreieck $\mathcal{D}(p, \lambda a, z)$ und beachte dabei, dass per Konstruktion von \mathcal{W}_∞ , $c \notin \mathcal{S}(p, \lambda a)$ ist. Sei $J := \mathcal{S}(p, \lambda a) \cup \mathcal{S}(\lambda a, z) \cup \mathcal{S}(z, c)$ und $K := \mathcal{S}(c, p)$, so existiert nach Lemma 5.10 ein Kontinuum $C' \subseteq C$ mit $C' \subseteq \text{Conv}(p, \lambda a, z)$, sodass $C' \cap J \neq \emptyset \neq C' \cap K$ ist.

Sei $v \in C' \cap K$. Da $p, c \notin C'$, muss es einen Punkt $q \in \mathcal{I}(p, \lambda a, z) \cap C'$ geben, wobei $\mathcal{I}(p, \lambda a, z)$ das Innengebiet von $\mathcal{D}(p, \lambda a, z)$ bezeichnet. Insbesondere gibt es ein $t \in [0, s[$, sodass $q \in \mathcal{S}(\lambda \Xi(t), p) \subseteq L_t$ liegt. Wir wählen $q \in \mathcal{I}(p, \lambda a, z) \cap C'$ so, dass dann t minimal ist. Es gilt nun $\mathcal{S}(\lambda a, q) \cup C' \cup \mathcal{S}(v, \lambda b) =: C_{t_1} \in \hat{\mathcal{C}}$ für ein $t_1 \in [0, 1]$. Ist $t_1 = 0$ so wählen wir eben eine Strecke von v zu einem anderem Punkt αb in $\mathcal{R}_2 = \text{Cone}(b)$, mit $0 < \alpha < \lambda$ und setzen stattdessen $C_{t_1} := \mathcal{S}(\lambda a, q) \cup C' \cup \mathcal{S}(v, \alpha b)$, weshalb wir annehmen können $t_1 \neq 0$.

Dann ist $M_{t_1} \cap \mathcal{W}_\infty \neq \emptyset$. Nun gibt es ein $t < r < s$ derart, dass $r \in \Upsilon(t_1) \cap [0, 1]$ und es gibt einen Punkt $q_r \in L_r \cap C_{t_1}$ und per Konstruktion gilt $q_r \in C'$. Dies ist ein Widerspruch, denn $C' \subseteq C$ und C waren mit Lemma 5.5 so gewählt, dass $C \cap \mathcal{W}_\infty = \emptyset$. Damit folgt aus Z Zerlegungsmenge und $p \in Z$ notwendigerweise $Z^C = \emptyset$, was bedeutet \mathcal{W}_∞ ist zusammenhängend. \square

Lemma 5.53. *Sei $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$, dann liegt \mathcal{W}_∞ dicht in $\text{Cone}(a, b)$.*

¹⁹Achtung: Wir können hier ohne Beschränkung annehmen, dass Z beschränkt ist. Ansonsten betrachten wir nur jenen Teilraum von \mathcal{W}_∞ , der im soeben definierten Dreieck und seinem Innengebiet liegt. Existiert eine Zerlegungsmenge Z die p , aber nicht c enthält, existiert sie auch dort und damit das geforderte Kontinuum.

Beweis. Der Beweis ist äquivalent zum Beweis in Lemma 5.42, nur muss man hier $\lambda > 0$ anstatt $\lambda \in]0, 1]$ annehmen, $p := (0, 0)^T$ setzen und \tilde{C} anstatt $\tilde{C}(a, b, c)$ und \tilde{K}_t durch C_t ersetzen, wobei hier die Notation aus Konstruktion 5.51 gemeint ist. \square

Wir verzichten hier auf den Beweis, dass Wilders unendlicher Kegel total diskontinuierlich ist, da dies aufgrund der Bildtreue des Zusammenhangs nur eine notwendige Bedingung ist, damit Wilders zerbrechliche Staubwolke total diskontinuierlich ist und somit am Ende gleich mitbewiesen wird.

Im letzten Schritt geht es nun darum, Wilders unendlichen Kegel auf die ganze Ebene \mathbb{R}^2 „zu dehnen“. Wir wollen die Konstruktion **Wilders zerbrechliche Staubwolke** nennen, da sie dicht wie Staub in \mathbb{R}^2 liegt. Dabei wollen wir hier nicht mehr auf geometrische Konstruktionen zurückgreifen, sondern $\text{Cone}(a, b)$ stetig auf ganz \mathbb{R}^2 abbilden, wozu wir Polarkoordinaten benutzen.

Da Polarkoordinaten allgemein bekannt sind wollen wir sie nur zur Wiederholung erwähnen, aber nicht weiter erklärend auf sie eingehen. Wir verweisen dafür etwa auf [10], S.112, Beispiel 8.4:

Definition 5.54 ([10] S.112, Beispiel 8.4). Sei $(r, \psi)^T \in [0, \infty[\times]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, dann nennen wir $(r, \psi)^T$ **Polarkoordinaten**, wenn die Funktion $\Omega : [0, \infty[\times]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[\mapsto \mathbb{R}^2$, $(r, \psi)^T \mapsto \Omega((r, \psi)^T) := (r \cos(\psi), r \sin(\psi))^T$ auf die bekannten kartesischen Koordinaten abbildet. Die Variable r nennen wir dann den **Radius** und ψ den **Winkel**

Wir werden ab nun Teilmengen und Punkte der Ebene in Polarkoordinaten angeben. Dies ist wegen dem nächsten Lemma gerechtfertigt:

Lemma 5.55 (Siehe [10] S.112, Beispiel 8.4). Die Funktion Ω aus Definition 5.54 ist surjektiv (aber nicht injektiv). Für $(x, y)^T$ ist $(r, \psi)^T$ mit $\Omega((r, \psi)^T) = (x, y)^T$ eindeutig, falls $r > 0$.

Folgendes Lemma zeigt uns, dass mit Polarkoordinaten für festes $\psi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ in die Elemente einer festen Menge $L_t, t \in [0, 1]$ aus der Konstruktion des unendlichen Kegels beschrieben werden.

Lemma 5.56. Seien alle Definitionen wie in 5.54 gegeben und $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ linear unabhängig. Seien Polarkoordinaten $(r_a, \psi_a)^T, (r_b, \psi_b)^T \in]0, \infty[\times]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ so gegeben, dass $a = \Omega((r_a, \psi_a)^T)$ und $b = \Omega((r_b, \psi_b)^T)$. Dann folgt $\psi_a \neq \psi_b$.

Beweis. Da a und b linear unabhängig sind, gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\lambda a \neq b$. Nehmen wir nun an $\psi_a = \psi_b$, dann folgt $b = \Omega((r_b, \psi_b)^T) = \frac{r_b}{r_a} (r_a \cos(\psi_a), r_a \sin(\psi_a))^T = \frac{r_b}{r_a} a$. Ein Widerspruch \square

Lemma 5.57. Seien alle Definitionen wie in 5.54 gegeben und $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ linear abhängig. Seien Polarkoordinaten $(r_a, \psi_a)^T, (r_b, \psi_b)^T \in]0, \infty[\times]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ so gegeben, dass $a = \Omega((r_a, \psi_a)^T)$ und $b = \Omega((r_b, \psi_b)^T)$. Dann folgt $\psi_a = \psi_b$.

Beweis. Da a und b linear abhängig sind, gibt für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda a = b$ gilt. Dann gilt $b = \lambda \Omega((r_a, \psi_a)^T) = (\lambda r_a \cos(\psi_a), \lambda r_a \sin(\psi_a))^T$. Das war zu zeigen. \square

Nun haben wir alle Zutaten, um Wilders Konstruktion auf der ganzen reellen Ebene fortzusetzen und wollen sie Wilders zerbrechliche Staubwolke nennen. Es sei hier erwähnt, dass wir explizit darauf verzichten, Karthesische Koordinaten in Polarkoordinaten umzurechnen, uns ist nur wichtig, dass man jeden Punkt in \mathbb{R}^2 als Polarkoordinate angeben kann. Die Polarkoordinaten sollen dabei als Hilfsmittel dienen um die Konstruktion übersichtlicher zu gestalten.

Konstruktion 5.58 (Wilders zerbrechliche Staubwolke). *Seien $(r, \psi)^T$ Polarkoordinaten und $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ gegeben. Wir suchen eine stetige Funktion F , die den Winkel $\psi = \frac{3\pi}{2}$ invariant lässt, sodass $F[\text{Cone}(a, b)] = \mathbb{R}^2$ gilt. Deshalb definieren wir die Funktion*

$$F : [0, \infty[\times [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[\mapsto \mathbb{R} \times [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[, (r, \psi)^T \mapsto F((r, \psi)^T)$$

definiert durch

$$F((r, \psi)^T) := (r, 4(\psi - \frac{3\pi}{2}) + \frac{3\pi}{2})^T.$$

Diese Funktion ist stetig und es gilt auch $F((r, \frac{3\pi}{2})^T) = \frac{3\pi}{2}$. F ist offenbar surjektiv und mit Lemma 5.55 lässt sich jeder Punkt in \mathbb{R}^2 mit Polarkoordinaten im Bildbereich von F angeben, weshalb $F[\text{Cone}(a, b)] = \mathbb{R}^2$ gilt. Sei \mathcal{W}_∞ Wilders unendlicher Kegel. Wir definieren

$$\mathcal{W}_\infty^\circ := F[\mathcal{W}_\infty]$$

als **Wilders zerbrechliche Staubwolke**.

Lemma 5.59. *Wilders zerbrechliche Staubwolke liegt dicht in \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Wir übernehmen die Notation von Konstruktion 5.58. Die in der Konstruktion definierte Funktion F ist stetig und \mathcal{W}_∞ ist dicht in $\text{Cone}(a, b)$. Lemma 2.53 besagt, dass dann $F[\mathcal{W}_\infty]$ dicht in $F[\text{Cone}(a, b)]$ liegt. Dies ist gerade die Aussage. \square

Lemma 5.60. *Wilders zerbrechliche Staubwolke ist zusammenhängend.*

Beweis. \mathcal{W}_∞ ist zusammenhängend und F stetig. Da Zusammenhang bildtreu ist, folgt die Behauptung sofort. \square

Proposition 5.61. *Sei $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ gegeben. Die Funktion $\Xi : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(a, b)$ sei wie in 5.51 bei der Konstruktion des unendlichen Kegels definiert. Sei für $\tau \in [0, 1]$, $\Xi(\tau) := (r_\tau, \psi_\tau)^T$ in Polarkoordinaten gegeben, dann folgt $0 \leq s < t \leq 1 \Leftrightarrow \psi_s < \psi_t$.*

Beweis. Da Ξ injektiv ist, folgt aus $s < t \mapsto \Xi(s) \neq \Xi(t)$. Außerdem ist $\text{Bild}(\Xi) = \mathcal{S}(a, b)$. Daraus folgt sofort $\Xi(s) \notin \text{Cone}(\Xi(t))$, also $\psi_s \neq \psi_t$. Sei also $\psi_s < \psi_t$ und $x := (x_1, x_2)^T, y := (y_1, y_2)^T \in \mathcal{S}(a, b)$ mit $x = (r_x \cos(\psi_s), r_x \sin(\psi_s))^T$ und $y = (r_y \cos(\psi_t), r_y \sin(\psi_t))^T$. Wegen $x, y \in \mathcal{S}(a, b)$ gilt $r_x \sin(\psi_s) = r_y \sin(\psi_t)$, woraus folgt $r_x = r_y \frac{\sin(\psi_t)}{\sin(\psi_s)}$, denn $\sin(\psi_s) \neq 0$ für $\psi_s \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$. Wir müssen hier eine Fallunterscheidung durchführen:

- Ist $\psi_s \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}]$ und $\psi_t \in [\frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$, dann gilt $x_1 = r_x \cos(\psi_s) < 0 < r_y \cos(\psi_s) = y_1$. Daraus folgt aus der Definition von Ξ sofort $s < t$.
- Ist $\psi_s, \psi_t \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}]$, dann ist $0 \leq \frac{\cos(\psi_t)}{\sin(\psi_t)} = \frac{1}{\tan(\psi_t)} < \frac{1}{\tan(\psi_s)} = \frac{\cos(\psi_s)}{\sin(\psi_s)} \leq 1$, denn die Kotangens-Funktion ist in diesem Intervall streng monoton fallend. Mit $\sin(\psi_t) < 0$ folgt daraus

$$x_1 = r_y \frac{\sin(\psi_t)}{\sin(\psi_s)} \cos(\psi_s) = r_y \frac{\cos(\psi_s)}{\sin(\psi_s)} \sin(\psi_t) < r_y \cos(\psi_t) = y_1$$

Aus $x_1 < y_1$ folgt wieder $s < t$.

- Den Fall $\psi_s, \psi_t \in [\frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ beweist man völlig analog zum vorhergehenden.

Die andere Implikation folgt automatisch mit dem bisher bewiesenen durch Kontraposition, indem man s und t vertauscht. \square

Lemma 5.62. $\mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0,0)^T$ ist total diskontinuierlich.

Beweis. Sei $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ und $b = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ gegeben und $\mathcal{V}_{[0,1]}$ die Vitali-Zerlegung von $[0, 1]$. Die Funktionen $\Xi : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}(a, b)$ und $\Upsilon : [0, 1] \mapsto \mathcal{V}$ seien wie in 5.51 bei der Konstruktion des unendlichen Kegels definiert. Ebenso seien wieder für alle $t \in [0, 1]$ die Mengen $L_t := \text{Cone}(\Xi(t))$ gegeben.

Seien nun $q_1, q_2 \in \mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0,0)^T$ mit $q_1 \neq q_2$. Nehmen wir an, $q_1 \in \text{Cone}(q_2)$, dann gibt es $r_1, r_2 \in]0, 1[$ und $\omega \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, sodass $q_1 = (r_1, \omega)^T, q_2 = (r_2, \omega)^T$ in Polarkoordinatendarstellung, denn die Winkel von q_1 und q_2 sind mit Lemma 5.56 und 5.57 genau dann gleich, wenn $q_1 \in \text{Cone}(q_2)$. Es gibt dann $s, t \in [0, 1]$ und $z_1 \in \text{Cone}(\Xi(s)) \cap \mathcal{W}_\infty$ und $z_2 \in \text{Cone}(\Xi(t)) \cap \mathcal{W}_\infty$, sodass $F(z_1) = q_1$ und $F(z_2) = q_2$. Seien $r_1, r_2 \in]0, 1[$ und $\psi_1 < \psi_2$ mit $\psi_1, \psi_2 \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$, dann gilt, wenn $(r_1, \theta_1)^T = F((r_1, \psi_1)^T)$ und $(r_2, \theta_2)^T = F((r_2, \psi_2)^T)$, dass $\theta_1 < \theta_2$. Wegen $q_1 = (r_1, \omega)^T, q_2 = (r_2, \omega)^T$ folgt daraus dann, dass es ein $\xi \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$ gibt, sodass $z_1 = (r_1, \xi)^T$ und $z_2 = (r_2, \xi)^T$ (in Polarkoordinaten). Mit Proposition 5.61 folgt dann $s = t$. Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von \mathcal{W}_∞ .

Daraus folgt, dass beliebige paarweise verschiedene $q_1, q_2 \in \mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0,0)^T$ in der Polarkoordinatendarstellung auch unterschiedliche Winkel besitzen.

Seien wie vorhin $s, t \in [0, 1]$ und $z_1 \in \text{Cone}(\Xi(s)) \cap \mathcal{W}_\infty$ und $z_2 \in \text{Cone}(\Xi(t)) \cap \mathcal{W}_\infty$, sodass $F(z_1) = q_1$ und $F(z_2) = q_2$ und sei ψ_1 der Winkel von q_1 beziehungsweise ψ_2 der Winkel von q_2 . Wir können ohne Beschränkung annehmen $s < t$, dann gilt mit 5.61 auch $\psi_1 < \psi_2$. Nun liegt $\Upsilon(0) \cap [0, 1]$ dicht in $[0, 1]$, also können wir ein $u \in \Upsilon(0) \cap [0, 1]$ mit $s < u < t$ finden, sodass in $\text{Cone} \Xi(u)$ kein Element von \mathcal{W}_∞ liegt und daher können wir mit Proposition 5.61 einen Winkel $\gamma_1 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ finden mit $\psi_1 < \gamma_1 < \psi_2$. Und mit gleicher Argumentation ein $\psi_2 < \gamma_2 < \frac{5\pi}{2}$, derart, dass kein Punkt von $\mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0,0)^T$ den Winkel γ_1 oder γ_2 besitzt. Nun sind die Mengen $U_1 := \{(r, \phi)^T \in]0, \infty[\times]\gamma_1, \gamma_2[\}$ und $U_2 := \{(r, \phi)^T \in]0, \infty[\times [\frac{\pi}{2}, \gamma_1[\cup]\gamma_2, \frac{5\pi}{2}[\}$, deren Element in der Polarkoordinatendarstellung angegeben wurden, offen. Bei U_2 ist das nicht sofort klar, folgt aber aus der 2π -Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion, denn es gilt

$$\lim_{\psi \rightarrow \frac{5\pi}{2}} \cos(\psi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{\psi \rightarrow \frac{5\pi}{2}} \sin(\psi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Außerdem sind U_1 und U_2 per Konstruktion disjunkt. (Hierbei muss man bei Polarkoordinaten im Fall $r = 0$ vorsichtig sein, da aber der Radius aller Punkte in U_1 und U_2 größer als 0 ist besteht hier kein Problem.) Sei $V := U_1 \cap U_2$, dann ist $V = \{(r, \psi)^T \in [0, 1] \times \{\gamma_1, \gamma_2\}\}$. Nun haben wir bereits festgestellt, dass in V kein Punkt von $\mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0, 0)^T$ liegt. Also ist $Z := U_1 \cap \mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0, 0)^T$ eine Zerlegungsmenge in $\mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0, 0)^T$ mit $c_2 \in Z$, aber $c_1 \notin Z$. Da $q_1, q_2 \in \mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0, 0)^T$ beliebig waren, ist $\mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0, 0)^T$ total diskontinuierlich. \square

Korollar 5.63. $\mathcal{W}_\infty \setminus (0, 0)^T$ ist total diskontinuierlich

Beweis. Da Zusammenhang bildtreu ist und $F[\mathcal{W}_\infty \setminus (0, 0)^T] = \mathcal{W}_\infty^\circ \setminus (0, 0)^T$ ist dies eine notwendige Bedingung, damit $\mathcal{W}_\infty \setminus (0, 0)^T$ total diskontinuierlich ist. \square

Damit haben wir es geschafft, aufbauend auf Wilders Konstruktion, eine zerbrechliche Menge zu konstruieren, die darüber hinaus dicht in ganz \mathbb{R}^2 liegt.

6 Ausblick

Eine spannende Möglichkeit, die man noch hätte, wäre es, den zerbrechlichen Kegel ε -dicht auf die ganze reelle Ebene auszudehnen. Dies war eigentlich im ersten Konzept dieser Arbeit geplant. Mit der Entdeckung von Wilders Paper [23] und der dort vorgestellten zerbrechlichen Menge ergab sich jedoch eine vielversprechende die Möglichkeit, eine Konstruktion sogar dicht auf ganz \mathbb{R}^2 fortzuführen und somit wurde der Plan, den zerbrechlichen Kegel fortzusetzen fallengelassen.

Eine Idee zur Umsetzung, bei der wir an dieser Stelle gänzlich darauf verzichten, sie zu formalisieren, wäre es, das Cantorsche Diskontinuum so homöomorph auf alle Kreise um den Nullpunkt mit ganzzahligen Radien zu legen, dass sich die Bilder der Lücken des Cantorschen Diskontinuums jeweils diametral gegenüberliegen. Danach kann man versuchen, eine Konstruktion analog zum zerbrechlichen Kegel auf diesem Grundgerüst aufzubauen. Weiters könnte man dann Theorem 5.4.3 aus [12] heranziehen. Dies besagt, dass alle zum Cantorsche Diskontinuum homöomorphen topologischen Räume ebenfalls kompakt, total diskontinuierlich und in sich dicht ist. Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich vermutlich eine entsprechende Menge konstruieren, die zusammenhängend und ε -dicht ist. Ob eine entsprechende Konstruktion auch eine zerbrechliche Menge ist, müsste dann entsprechend untersucht werden.

Eine weitere Möglichkeit, die man im Hinblick auf zerbrechliche Mengen noch hätte, wäre, diese in höheren Dimensionen, oder etwa auf Funktionenräumen zu konstruieren. Dabei könnte man, entsprechend dem zerbrechlichen Kegel, anstatt des Cantorsche Diskontinuums, höherdimensionale Fraktale als Grundgerüst verwenden.

7 Auflistung Symbole und Notation

Symbolliste

Symbol	Bedeutung
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{P}(X)$	Potenzmenge einer Menge X
\inf	Infimum einer Teilmenge von \mathbb{R}
\sup	Supremum einer Teilmenge von \mathbb{R}
$d(\cdot, \cdot)$	Bezeichnet eine Metrik
$d_2(\cdot, \cdot)$	Euklidische Metrik
$d_{\text{inf}}(\cdot, \cdot)$	Maximumsmetrik
$d_d(\cdot, \cdot)$	Diskrete Metrik
$\text{dist}(x, A)$	$:= \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$
$U_\varepsilon(\cdot)$	ε -Umgebung
\mathcal{T}_I	Bezeichner einer Topologie (eventuell mit Index $I \in \{X, Y\}$)
\mathcal{T}_d	Von der Metrik d induzierte Topologie (Siehe 2.10)
\underline{X}	Topologischer Raum auf einer Menge X (X hier beispielhaft)
$\underline{\mathbb{R}^n}$	\mathbb{R}^n mit euklidischer Topologie
$T1, T2, T3$	Die Topologieeigenschaften (Siehe 2.10)
$\bigcup \mathcal{A}$	Vereinigung aller Mengen in einem Mengensystem \mathcal{A}
$\bigcap \mathcal{A}$	Schnitt über alle Mengen in einem Mengensystem \mathcal{A}
$\text{cl}_{\underline{X}} A$	$\text{cl}_{\underline{X}} A := \{x \in X \mid x \text{ Berührungspunkt von } A\}$, Abschluss von A
$\text{int}_{\underline{X}} A$	$\text{int}_{\underline{X}} A := \{x \in X \mid A \text{ Umgebung von } x\}$ das Innere von A in \underline{X}
$f, g, h, \Phi, \Psi, \Theta, \Omega$	Funktionsbezeichner
$f[A]$	Bildmenge einer Menge A unter einer Funktion f
$\text{Bild}(f)$	Bildmenge einer Funktion f
$K(x)$	Zusammenhangskomponente von x in \underline{X} (Siehe 3.18)
Z^C	Zu Z komplementäre Zerlegungsmenge (Siehe 3.3)
\mathfrak{C}_n	$:= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 1, 2\}, (\forall j \in \mathbb{N}) : j \leq n \Rightarrow a_j \in \{0, 2\} \right\}$
\mathfrak{C}	$:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{C}_n$ (das Cantorsche Diskontinuum)
A_C^n	$:= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 1, 2\}, a_1 = c_1, \dots, a_n = c_n, C := (c_1, \dots, c_n)^T \right\}$
p	Falls nicht explizit angegeben, ein Dispersionspunkt
\mathbb{K}	Der zerbrechliche Kegel (Siehe 4.12)
$\hat{\mathbb{K}}$	Der punktierte zerbrechliche Kegel (Siehe 4.12)
\mathfrak{H}	$:= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathfrak{C} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ fast konstante Folge in } \{0, 2\} \right\}$
$\mathcal{S}(a, b)$	Strecke zwischen den Punkten a und b
l_t	$:= \mathcal{S}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, (t, 0)^T\right)$ für $t \in [0, 1]$
$\mathcal{D}(a, b, c)$	Dreieck mit den Eckpunkten a, b, c (Siehe 5.12)
$\mathcal{I}(a, b, c)$	$:= \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in]0, 1[, 1 \leq i \leq 3, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \right\}$ (Innengebiet)

Symbol	Bedeutung
\mathcal{K}_x	$:= \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Siehe 5.31)
\mathcal{V}	$:= \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{K}_x$ die Vitali-Zerlegung (Siehe 5.31)
$\mathcal{V}_{[a,b]}$	$:= \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{K}_x$ die Vitali-Zerlegung von $[a, b]$ (Siehe 5.31)
$\text{Conv}(a_1, \dots, a_n)$	Menge der Konvexkombinationen der Punkte a_1, \dots, a_n (5.13)
$\text{Cone}(a_1, \dots, a_n)$	Von a_1, \dots, a_n erzeugter konvexer Kegel (5.45)
\mathcal{C}	Menge aller Kontinua in \mathbb{R}^2 (Siehe 5.1)
$\tilde{\mathcal{C}}(a, b, c)$	Hierfür verweisen wir aus Platzgründen auf Notation 5.23
$\hat{\mathcal{C}}$	Hierfür verweisen wir aus Platzgründen auf Definition 5.49
Υ	Bijektive Abbildung: $\Upsilon : [0, 1] \mapsto \mathcal{V}$ mit $0 \in \Upsilon(0)$
\mathcal{W}	Wilders zerbrechliche Menge
\mathcal{W}_∞	Wilders unendlicher Kegel (Siehe 5.51)
\mathcal{W}_∞°	Wilders zerbrechliche Staubwolke $\mathcal{W}_\infty^\circ = F[\mathcal{W}_\infty]$ (Siehe 5.58)

Literatur

- [1] C. ALIPRANTIS AND O. BURKINSHAW, *Principles of Real Analysis*, Elsevier, 1990.
- [2] W. BALLMANN, *Einführung in die Geometrie und Topologie*, Springer Basel, 2018.
- [3] R. BARTSCH, *Allgemeine Topologie I*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2007.
- [4] W. V. C. CHRISTENSEN, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1977.
- [5] G. CANTOR, *Ueber eine elementare frage der mannigfaltigketislehre.*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1 (1890/91), pp. 72–78.
- [6] J. COBB AND W. VOXMAN, *Dispersion points and fixed points*, The American Mathematical Monthly, 87 (1980), pp. 278–281.
- [7] M. COORNAERT, *Topological Dimension and Dynamical Systems*, Springer International Publishing, 2015.
- [8] R. DUDA, *On biconnected sets with dispersion points*, Rozprawy Matematyczne, 37 (1964), pp. 1–58.
- [9] O. FORSTER, *Analysis 1*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.
- [10] —, *Analysis 2*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017.
- [11] O. FORSTER, *Analysis 3*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017.
- [12] H. HERRLICH, *Einführung in die Topologie: Metrische Räume*, Heldermann Verlag Berlin, 1986.

- [13] —, *Topologie I: Topologische Räume*, Heldermann Verlag Berlin, 1986.
- [14] —, *Axiom of Choice*, Lecture Notes in Mathematics №1876, Springer, 1 ed., 2006.
- [15] K. HRBACEK AND T. JECH, *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded (Pure and Applied Mathematics)*, Pure and Applied Mathematics, CRC Press, 3 ed., 1999.
- [16] D. HUG AND W. WEIL, *Lectures on Convex Geometry*, Springer International Publishing, 2020.
- [17] W. KABALLO, *Grundkurs Funktionalanalysis*, Springer Berlin Heidelberg, 2018.
- [18] B. KNASTER AND C. KURATOWSKI, *Sur les ensembles connexes*, Fundamenta Mathematicae, 2 (1921), pp. 206–255.
- [19] R. SCHNEIDER, *Convex Cones: Geometry and Probability*, Springer International Publishing, 2022.
- [20] L. A. STEEN AND J. A. SEEBACH, *Counterexamples in Topology*, Springer New York, 1978.
- [21] G. VITALI, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Tip. Gamberini E Parmeggiani, 1905.
- [22] R. L. WILDER, *A connected and regular point set which has no subcontinuum*, Transactions of the American Mathematical Society, 29 (1927), pp. 332–340.
- [23] —, *A point set which has no true quasicomponents, and which becomes connected upon the addition of a single point*, Bulletin of the American Mathematical Society, 33 (1927), pp. 423–427.
- [24] E. ZERMELO, *Beweis, daß jede menge wohlgeordnet werden kann. (aus einem an herrn hilbert gerichteten briefe)*, Mathematische Annalen, 59 (1904), pp. 514–516.

8 Eigenständigkeitserklärung

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Bachelorarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Bachelorarbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Bachelorarbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Datum: 11. April 2024 Unterschrift:

