

# Analyse eines Inkonsistenzmaßes auf minimalen 3-wertigen Modellen

## Masterarbeit

zur Erlangung des Grades eines Master of Science (M.Sc.)  
im Studiengang Praktische Informatik

vorgelegt von  
Armin Sdorra

Erstgutachter: Prof. Dr. Matthias Thimm  
Artificial Intelligence Group

Betreuer: Prof. Dr. Matthias Thimm  
Artificial Intelligence Group



## Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Masterarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Der Veröffentlichung dieser Arbeit auf der Webseite des Lehrgebiets Künstliche Intelligenz und damit dem freien Zugang zu dieser Arbeit stimme ich ausdrücklich zu.

Für diese Arbeit erstellte Software wurde quelloffen verfügbar gemacht, ein entsprechender Link zu den Quellen ist in dieser Arbeit enthalten. Gleiches gilt für angefallene Forschungsdaten.

Bingen, 20.12.2024   
.....  
(Ort, Datum) (Unterschrift)



## Zusammenfassung

Ein Inkonsistenzmaß ist eine Funktion, die einer Menge aussagenlogischer Formeln eine nichtnegative Zahl zuweist, die den Grad der Inkonsistenz dieser Formelmengen angibt. Solch ein Inkonsistenzmaß kann beispielsweise dazu genutzt werden, um Fehler in einer logischen Wissensbasis zu analysieren und Reparaturempfehlungen oder Empfehlungen zur Anwendbarkeit zu geben. In der Literatur sind bereits eine Reihe von konkreten Ansätzen zur Inkonsistenzmessung untersucht. Viele der Maße beurteilen Inkonsistenz anhand minimaler inkonsistenter Teilmengen der Wissensbasen. Es gibt jedoch wenige Ansätze, die Inkonsistenzen messen, die auf Konflikten zwischen einzelnen Aussagen basieren. Wir wählen deshalb einen neuen Ansatz, der auf einer 3-wertigen Logik basiert. Es ist eine Variante zum Contension Maß. Neben den klassischen Wahrheitswerten *true* und *false*, wird *both* als dritter Wahrheitswert zugelassen. Den neuen Ansatz untersuchen wir auf Eigenschaften, Ausdrucksstärke und Komplexität.

## Abstract

An inconsistency measure is a function that assigns a non-negative value to a set of propositional formulas that indicates the degree of inconsistency of this set of formulas. Such an inconsistency measure can be used, for example, to analyze conflicts in a logical knowledge base and provide repair or applicability recommendations. A number of different approaches to measuring inconsistency have already been examined in the literature. Many of the measures assess inconsistency based on minimal inconsistent subsets of the knowledge bases. However, there are few approaches that measure inconsistency based on conflicts between the individual propositional logical statements. We therefore choose a new approach based on 3-value logic. It is a variant of the Contension measure. Besides the classical truth values *true* and *false*, *both* is allowed as a third truth value. We analyse the new approach with regard to rationality postulates, expressivity and computational complexity.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1. Syntax . . . . .	2
2.2. Klassische Aussagenlogik . . . . .	2
2.3. Dreiwertige Aussagenlogik . . . . .	3
2.4. Eigenschaften der 3-wertigen Aussagenlogik und Beziehungen zur klassischen Aussagenlogik . . . . .	5
2.5. Inkonsistenzmaße . . . . .	7
<b>3. Das Contension-Sum Maß</b>	<b>7</b>
<b>4. Eigenschaften</b>	<b>8</b>
4.1. Grundlagen . . . . .	8
4.2. Contension-Sum ein Inkonsistenzmaß? . . . . .	13
4.3. Analyse hinsichtlich Eigenschaften . . . . .	14
4.4. Auswertung . . . . .	19
4.5. Qualitativer Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen . . . . .	20
4.6. Alternative Eigenschaften - Begründungen und Analysen . . . . .	22
4.6.1. Eigenschaft Super-Additivity . . . . .	22
4.6.2. Eigenschaft Monotony . . . . .	24
4.6.3. Mathematische Sicht auf das Contension-Sum Maß . . . . .	25
4.6.4. Eigenschaft Free-formula Independence . . . . .	27
4.6.5. Irrelevanz of Syntax . . . . .	29
4.6.6. Eigenschaft Exchange . . . . .	29
4.6.7. Zusammenfassung . . . . .	30
<b>5. Ausdrucksstärke</b>	<b>30</b>
5.1. Grundlagen . . . . .	30
5.2. Analyse . . . . .	32
5.3. Auswertung und Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen . . . . .	39
<b>6. Komplexität</b>	<b>41</b>
6.1. Grundlagen . . . . .	42
6.2. Analyse . . . . .	42
6.2.1. Deterministische Analyse . . . . .	44
6.2.2. Obere und untere Schranken . . . . .	45
6.3. Auswertung und Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen . . . . .	49
<b>7. Hintergrund und Diskussion</b>	<b>50</b>
7.1. Überblick . . . . .	50
7.2. Probleme und Sichtweisen in der Inkonsistenzmessung . . . . .	51

7.3. Beitrag dieser Arbeit . . . . .	52
<b>8. Zusammenfassung</b>	<b>53</b>
<b>A. Ermittlung der Werte von <math>\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)</math> für <math>n = 1, \dots, 5</math></b>	<b>59</b>

## Tabellenverzeichnis

1. Klassische Interpretation der aussagenlogischen Junktoren . . . . .	3
2. Wahrheitstabelle für die 3-wertige Interpretation der Junktoren . . . . .	4
3. Menge der Interpretationen für Beispiel 2.4 . . . . .	4
4. Übersicht Eigenschaften . . . . .	21
5. Vergleich der Inkonsistenzmaße . . . . .	23
6. Werte von $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$ und $\Psi(n)$ für $n = 1, \dots, 5$ . . . . .	37
7. Charakteristik-Klassen der Inkonsistenzmaße . . . . .	40
8. Werte von $\Psi(n)$ , $\Phi(2^n)$ und $2^n + 1$ für $n = 1, \dots, 10$ . . . . .	41
9. Komplexität von Inkonsistenzmaßen . . . . .	50

# 1. Einleitung

Im Zuge der Digitalisierung ist man bestrebt jede Art von Daten und Informationen elektronisch zu erfassen und zu speichern. Die gespeicherten Daten werden in vielen kommerziellen und technischen Bereichen zunehmend auch als Grundlage genutzt, um daraus neue Informationen zu gewinnen oder um ein spezielles oder grundlegendes Wissen abzuleiten. Aufgrund der Fülle an Informationen, dem kontinuierlichen Ergänzen an Informationen und dem formalen Strukturieren der Daten zur Wissensbasis können innerhalb dieser Wissensbasis Widersprüche, also Inkonsistenzen, auftreten. Um nun die Inkonsistenz einer Wissensbasis quantifizieren und damit bewerten zu können, werden geeignete Ansätze zur Inkonsistenzmessung benötigt.

**Beispiel 1.1.** *Betrachten wir drei inkonsistente Wissensbasen*

$$\mathcal{K}_1 = \{\neg a, a, b, \neg b, c\}, \mathcal{K}_2 = \{a, \neg b, a \rightarrow b, c\} \text{ und } \mathcal{K}_3 = \{\neg a, a, b, \neg b \vee (c \wedge \neg c)\}$$

mit den Aussagen  $a, b, c$  und den aussagenlogischen Junktoren  $\neg$  (Negation),  $\wedge$  (Konjunktion),  $\vee$  (Disjunktion) und  $\rightarrow$  (Implikation). Welche dieser Wissensbasen ist nun am wenigsten inkonsistent?

Die Frage im obigen Beispiel ist nicht so leicht zu beantworten. Welchen Wert für Inkonsistenz können wir den einzelnen Wissensbasen  $\mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K}_2$  und  $\mathcal{K}_3$  zuweisen? In den letzten zwanzig Jahren wurden einige Ansätze zur Inkonsistenzmessung für Wissensbasen, die auf formalen Logiken basieren, untersucht. Allerdings gibt es noch keine Einigkeit darüber, welche Eigenschaften ein Inkonsistenzmaß genau haben soll. Eine geeignete Definition für ein Inkonsistenzmaß mit wenigen charakteristischen Eigenschaften wird noch gesucht [Thi19].

Wir definieren einen neuen Ansatz zur Inkonsistenzmessung. Der neue Ansatz ist eine Variante zum *Contension* Maß [Thi18, GH11] und basiert auf dem Konzept der minimalen 3-wertigen Modelle über den Wahrheitswerten  $T$  (*true*),  $F$  (*false*) und  $B$  (*both*). Dabei sind die minimalen 3-wertigen Modelle genau diejenigen 3-wertigen Modelle, bei denen die Anzahl der B-Zuweisungen minimal bezüglich der Mengeninklusion ist. Als Maß für die Inkonsistenz nehmen wir die Summe über die Anzahl der B-Zuweisungen über alle minimalen Modelle. Das neue Inkonsistenzmaß nennen wir *Contension-Sum* Maß und untersuchen es auf Eigenschaften [Thi18], Ausdrucksstärke [Thi16] und Komplexität [TW19].

Die aussagenlogischen Grundlagen für unsere Untersuchung und grundsätzliche Definitionen zum Thema Inkonsistenzmaße sind im Kapitel 2 zusammengestellt. Eine formale Definition für das Contension-Sum Maß enthält Kapitel 3. In den Kapiteln 4, 5 und 6 geben wir jeweils spezifische Grundlagen an, analysieren das Contension-Sum Maß jeweils hinsichtlich eines der genannten Untersuchungskriterien, werten die Ergebnisse aus und führen einen Vergleich mit anderen in der Literatur veröffentlichten Inkonsistenzmaßen. Informationen zum Hintergrund der Bearbeitung liefert Kapitel 7 bevor wir in Kapitel 8 mit einer kurzen Zusammenfassung abschließen.

## 2. Grundlagen

In diesem Abschnitt behandeln wir Bereiche der Aussagenlogik, die wir für die Definition, die Analyse und eine Bewertung des Contension-Sum Maßes benötigen. Als Grundlagen dienen die entsprechenden Ausführungen in [Thi18] und [BW20]. Dabei definieren wir grundlegende allgemein übliche Bezeichnungen im Textfluss. Wichtige und auf die Inkonsistenzmessung bezogene Definitionen geben wir explizit an.

### 2.1. Syntax

Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und sei  $\mathcal{L}$  die aussagenlogische Sprache über  $A$ , die sich aus aussagenlogischen *Formeln* zusammensetzt. Für die *Menge aller aussagenlogischer Formeln* von  $\mathcal{L}$  schreiben wir  $\mathcal{L}(A)$ . Sie wird rekursiv gebildet mit Aussagenvariablen aus  $A$  und mit den aussagenlogischen Junktoren  $\neg$  (*Negation*),  $\wedge$  (*Konjunktion*),  $\vee$  (*Disjunktion*),  $\rightarrow$  (*Implikation*) und  $\leftrightarrow$  (*Äquivalenz*).

Eine aussagenlogische Formel, die nur aus einer Aussagenvariablen besteht, bezeichnen wir als *atomare Formel* oder auch als *Atom*. Falls  $\alpha$  eine aussagenlogische Formel ist, dann ist  $\neg\alpha$  ebenfalls eine aussagenlogische Formel. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  aussagenlogische Formeln, dann sind auch  $\alpha \wedge \beta$ ,  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \rightarrow \beta$  und  $\alpha \leftrightarrow \beta$  aussagenlogische Formeln. Eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel ist ein *Literal*. Eine Disjunktion von Literalen nennen wir *Klausel*. Eine Formel, die eine Konjunktion von Klauseln ist, bezeichnen wir als eine *konjunktive Normalform* (KNF). Eine Konjunktion von Literalen nennen wir *Monom*. Eine Formel, die eine Disjunktion von Monomen ist, bezeichnen wir als eine *disjunktive Normalform* (DNF).

Atome oder atomare Formeln bezeichnen wir mit  $a, b, c, \dots$ , beliebige Formeln mit  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$  und beliebige Mengen von Formeln mit  $\Phi, \Psi, \dots, M, \dots$ . Sei  $\Phi$  eine Formel oder eine Menge von Formeln, dann ist  $\text{At}(\Phi)$  die Menge der in  $\Phi$  vorkommenden Atome.

**Definition 2.1.** Sei  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(A)$  eine endliche Menge von Formeln, dann nennen wir  $\mathcal{K}$  auch Wissensbasis. Die Menge aller Wissensbasen bezeichnen wir mit  $\mathbb{K}$ .

### 2.2. Klassische Aussagenlogik

Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und sei  $W_c = \{\text{true}, \text{false}\}$  die Menge mit den klassischen Wahrheitswerten (*classical truth values*). Für die Wahrheitswerte true und false verwenden wir auch die kürzeren Bezeichnungen T und F. Eine Funktion  $\omega: A \rightarrow W_c$  bezeichnen wir als *Interpretation* und die *Menge aller Interpretationen* mit  $\Omega(A)$ . Sei  $\mathcal{L}$  die aussagenlogische Sprache über  $A$ . Wir erweitern  $\omega$  von  $A$  auf  $\mathcal{L}(A)$  indem wir die aussagenlogischen Junktoren wahrheitsfunktional nach Tabelle 1 interpretieren.

Genau dann wenn  $\omega(\varphi) = \text{true}$  für eine Formel  $\varphi \in \mathcal{L}(A)$  gilt, ist  $\omega$  ein *Modell* von  $\varphi$ . Wir sagen auch  $\omega$  *erfüllt*  $\varphi$  und schreiben  $\omega \models \varphi$ . Die Relation  $\models \subseteq \Omega(A) \times \mathcal{L}(A)$

$\wedge$	T	F	$\vee$	T	F	$\rightarrow$	T	F	$\leftrightarrow$	T	F	$\varphi$	$\neg\varphi$
T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T

Tabelle 1: Klassische Interpretation der aussagenlogischen Junktoren

heißt *Erfüllungsrelation*. Für eine Formelmenge  $\Phi$  ist eine Interpretation  $\omega$  genau dann ein Modell, wenn  $\omega \models \varphi$  für jedes  $\varphi \in \Phi$  gilt. Sei nun  $\Phi$  eine Formel oder eine Formelmenge. Dann ist die *Menge aller Modelle* von  $\Phi$  definiert durch  $\text{Mod}(\Phi) = \{\omega \in \Omega(A) \mid \omega \models \Phi\}$ .

Wir übertragen nun die Erfüllungsrelation auf eine Relation zwischen Formeln und Formelmengen. Das heißt, wir definieren eine Relation  $\models \subseteq \mathcal{L}(A) \times \mathcal{L}(A)$ , die wir als *semantische* oder *logische Folgerung* bezeichnen. Seien  $\Phi, \Psi$  Formeln oder Formelmengen. Es gilt  $\Phi \models \Psi$  genau dann, wenn  $\text{Mod}(\Phi) \subseteq \text{Mod}(\Psi)$  ist. Das heißt, aus  $\Phi$  folgt semantisch oder logisch  $\Psi$  genau dann, wenn jedes Modell von  $\Phi$  auch ein Modell von  $\Psi$  ist. Zwei Formeln oder Formelmengen  $\Phi, \Psi$  sind genau dann *logisch äquivalent*, wenn  $\text{Mod}(\Phi) = \text{Mod}(\Psi)$  ist. Symbolisch schreiben wir  $\Phi \equiv \Psi$ .

Eine Formel oder eine Formelmenge  $\Phi$  ist genau dann *unerfüllbar*, wenn  $\text{Mod}(\Phi) = \emptyset$  ist. Wir bezeichnen dann  $\Phi$  als *inkonsistent* und schreiben auch  $\Phi \models \perp$ . Genau dann, wenn  $\text{Mod}(\Phi) \neq \emptyset$  gilt, ist  $\Phi$  erfüllbar und somit *konsistent*.

### 2.3. Dreiwertige Aussagenlogik

Für unser Contension-Sum Maß benötigen wir eine 3-wertige Aussagenlogik. Wir führen deshalb eine 3-wertige Semantik zur Syntax nach Kapitel 2.1 ein. Als Grundlage dienen die betreffenden Ausführungen von Thimm im Vorspann zur Definition des Contension Maßes [Thi18, Kapitel 3], die Ausführungen von Grant und Hunter zur A-Logik [GH23] und *The Logic of Paradox* von Priest [Pri79].

**Definition 2.2.** Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und sei  $W_3 = \{T, F, B\}$  eine Menge mit Wahrheitswerten. Dann ist eine 3-wertige Interpretation eine Funktion  $v: A \rightarrow W_3$ . Die Wahrheitswerte T und F stehen für die klassischen Wahrheitswerte true und false. Der dritte Wahrheitswert B für both repräsentiert einen Konflikt in einer Aussage. Die Menge aller 3-wertigen Interpretationen bezeichnen wir mit  $\Upsilon(A)$ . Sei  $\mathcal{L}$  die aussagenlogische Sprache über  $A$ . Wir erweitern  $v$  von  $A$  auf Formeln, indem wir die aussagenlogischen Junktoren nach Tabelle 2 interpretieren.

Als Symbol für die Erfüllungsrelation verwenden wir  $\models_3$ . Sei  $\varphi$  eine Formel. Eine 3-wertige Interpretation  $v$  ist genau dann ein Modell von  $\varphi$ , wenn entweder  $v(\varphi) = T$  oder  $v(\varphi) = B$  ist. Symbolisch schreiben wir  $v \models_3 \varphi$ . Sei  $\Phi$  eine Formelmenge. Eine Interpretation  $v$  ist genau dann ein Modell von  $\Phi$ , wenn  $v \models_3 \varphi$  für jedes  $\varphi \in \Phi$  gilt. Falls  $v$  ein Modell von  $\Phi$  ist und es ein  $\varphi \in \Phi$  mit  $v(\varphi) = B$  gibt, dann ist  $v(\Phi) = B$ .

Sei nun  $\Phi$  eine Formel oder Formelmenge. Die Menge aller Modelle von  $\Phi$  ist definiert durch  $\text{Mod}_3(\Phi) = \{v \in \Upsilon(A) \mid v \models_3 \Phi\}$ . Die logische Folgerung und die

$\wedge$	T	F	B	$\vee$	T	F	B	$\rightarrow$	T	F	B	$\leftrightarrow$	T	F	B
T	T	F	B	T	T	T	T	T	T	F	B	T	T	F	B
F	F	F	F	F	T	F	B	F	T	T	T	F	F	T	B
B	B	F	B	B	T	B	B	B	T	B	B	B	B	B	B

  

$\varphi$	$\neg\varphi$
T	F
F	T
B	B

Tabelle 2: Wahrheitstabelle für die 3-wertige Interpretation der Junktoren

logische Äquivalenz definieren wir analog zur klassischen Semantik. Seien  $\Phi, \Psi$  Formeln oder Formelmengen. Es gilt  $\Phi \models_3 \Psi$  genau dann, wenn  $\text{Mod}_3(\Phi) \subseteq \text{Mod}_3(\Psi)$  ist. Zwei Formeln oder Formelmengen  $\Phi, \Psi$  sind genau dann logisch äquivalent, wenn  $\text{Mod}_3(\Phi) = \text{Mod}_3(\Psi)$  ist. Symbolisch schreiben wir  $\Phi \equiv_3 \Psi$ .

**Definition 2.3 ([GH11]).** Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $v$  eine 3-wertige Interpretation. Dann gilt

$$\text{Binarybase}(v) = \{a \mid v(a) = T \text{ oder } v(a) = F\}$$

und

$$\text{Conflictbase}(v) = \{a \mid v(a) = B\}.$$

mit  $a \in A$ .

**Beispiel 2.4.** Sei  $\mathcal{K} = \{a, \neg b, a \rightarrow b\}$ . Dann können wir neun verschiedene 3-wertige Interpretationen für  $\mathcal{K}$  angeben. Die Interpretationen, die jeweils zugehörige Binarybase und die zugehörige Conflictbase haben wir in der Tabelle 3 zusammengestellt. Zur kompakteren Darstellung geben wir die Interpretation  $v_i$  als Paar an. Das heißt,  $v_i(A) := (v_i(a), v_i(b))$  mit  $A := \{a, b\}$ .

$i$	$v_i(A)$	$v_i(\neg a)$	$v_i(\neg b)$	$v_i(\neg a \vee b)$	$v_i(\mathcal{K})$	Binarybase( $v_i$ )	Conflictbase( $v_i$ )
1	(T, T)	F	F	T	F	$\{a, b\}$	$\{\}$
2	(T, B)	F	B	B	B	$\{a\}$	$\{b\}$
3	(T, F)	F	T	F	F	$\{a, b\}$	$\{\}$
4	(B, T)	B	F	T	F	$\{b\}$	$\{a\}$
5	(B, B)	B	B	B	B	$\{\}$	$\{a, b\}$
6	(B, F)	B	T	B	B	$\{b\}$	$\{a\}$
7	(F, T)	T	F	T	F	$\{a, b\}$	$\{\}$
8	(F, B)	T	B	T	F	$\{a\}$	$\{b\}$
9	(F, F)	T	T	T	F	$\{a, b\}$	$\{\}$

Tabelle 3: Menge der Interpretationen für Beispiel 2.4

Wie wir der Tabelle 3 entnehmen können, ist  $\text{Mod}_3(\mathcal{K}) = \{v_2, v_5, v_6\}$ .

## 2.4. Eigenschaften der 3-wertigen Aussagenlogik und Beziehungen zur klassischen Aussagenlogik

In diesem Kapitel stellen wir elementare Eigenschaften der in Kapitel 2 definierten Logiken zusammen. Wir benötigen sie später für die Analyse des Contension-Sum Maßes. Abkürzend verwenden wir die Bezeichnungen  $L_C$  für in Kapitel 2.2 definierte klassische Aussagenlogik (*Classical Propositional Logic*) und  $L_3$  für die in Kapitel 2.3 definierte 3-wertige Aussagenlogik. Sei zudem  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $\mathcal{L}$  die aussagenlogische Sprache über  $A$ .

Betrachten wir die Mengen der Modelle in beiden Logiken. Die Bezeichnungen *konsistent* und *inkonsistent* sind Bezeichnungen in  $L_C$ . Während für eine inkonsistente Wissensbasis die Menge der Modelle in  $L_C$  leer ist, gibt es in  $L_3$  für jede Wissensbasis mindestens ein Modell. Vergleiche die Anmerkung unter [Thi19, Definition 8] und die Ausführungen in [GH23, Kapitel 5].

**Proposition 2.5.** *Eine Wissensbasis  $\mathcal{K}$  hat mindestens ein Modell  $v \models_3 \mathcal{K}$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K}$  eine Wissensbasis und sei  $v$  eine 3-wertige Interpretation mit  $v(a) = B$  für alle  $a \in \text{At}(\mathcal{K})$ . Dann folgt mit der rekursiven Definition der Formeln und Definition 2.2, dass  $v(\mathcal{K}) = B$  ist. Somit gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 2.6.** *Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und sei  $\varphi$  eine beliebige Formel. Seien weiterhin  $\omega$  eine beliebige 2-wertige Interpretation und  $v_\omega$  die zu ihr korrespondierende 3-wertige Interpretation mit  $v_\omega(a) := \omega(a)$  für alle  $a \in A$ . Dann gilt  $v_\omega(\varphi) = \omega(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{L}(A)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit struktureller Induktion. Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen. Für ein beliebiges  $\omega \in \Omega(A)$  sei  $v_\omega$  die zugehörige 3-wertige Interpretation, so dass  $v_\omega(a) = \omega(a)$  für alle  $a \in A$  gilt. Das heißt, der Induktionsanfang gilt per Definition. Angenommen, die Behauptung gilt für  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(A)$ . Dann ergibt sich mit Tabelle 1 und Tabelle 2

$$\begin{aligned} v_\omega(\neg\varphi) &= \omega(\neg\varphi), \\ v_\omega(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \omega(\varphi_1 \wedge \varphi_2), \\ v_\omega(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= \omega(\varphi_1 \vee \varphi_2), \\ v_\omega(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) &= \omega(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2), \\ v_\omega(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) &= \omega(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2). \end{aligned}$$

Somit folgt mit dem Prinzip der strukturellen Induktion, dass  $v_\omega(\varphi) = \omega(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{L}(A)$  gilt.  $\square$

**Proposition 2.7.** *Falls es für eine Formel  $\varphi$  ein  $\omega \in \text{Mod}(\varphi)$  gibt, und  $\varphi$  somit konsistent ist, dann existiert ein  $v \in \text{Mod}_3(\varphi)$  mit  $v(\varphi) = T$  und  $v(a) \in \{T, F\}$  für alle  $a \in \text{At}(\varphi)$ .*

*Beweis.* Die Behauptung folgt mit Proposition 2.6.  $\square$

Für die Logik  $L_3$  gilt auch die andere Richtung.

**Proposition 2.8.** Falls es für eine Formel  $\varphi$  ein  $v \in \text{Mod}_3(\varphi)$  mit  $v(\varphi) = T$  gibt, dann existiert ein  $\omega \in \text{Mod}(\varphi)$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in \mathcal{L}(A)$  eine Formel für die ein  $\tilde{v} \in \text{Mod}_3(\varphi)$  mit  $\tilde{v}(\varphi) = T$  existiert. Falls es ein  $a \in \text{At}(\varphi)$  mit  $\tilde{v}(a) = B$  gibt, dann können wir  $a$  einen der Wahrheitswerte  $F$  oder  $T$  zuweisen und erhalten damit ein 2-wertiges Modell von  $\varphi$ . Um dies zu zeigen, sei

$$\omega_v: \{T, B, F\} \rightarrow \{T, F\}, \quad T \mapsto T, \quad B \mapsto F, \quad F \mapsto F.$$

Sei weiterhin  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $v$  eine 3-wertige Interpretation. Falls  $v(a) = T$  für ein  $a \in A$  gilt, dann ist  $\omega_v(v(a)) = T$ . Angenommen, unsere Behauptung gilt für  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(A)$ , dann folgt mit Tabelle 2:

- Falls  $v(\neg\varphi) = T$  ist, dann gilt  $v(\varphi) = F$  und somit

$$\omega_v(\neg v(\varphi)) = \omega_v(v(\neg\varphi)) = T.$$

- Falls  $v(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = T$  ist, dann gilt  $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = T$  und somit

$$\omega_v(v(\varphi_1)) \wedge \omega_v(v(\varphi_2)) = \omega_v(v(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = T.$$

- Falls  $v(\varphi_1 \vee \varphi_2) = T$  gilt, dann ist  $v(\varphi_1) = T$  oder es ist  $v(\varphi_2) = T$ . Der Wahrheitswert für die jeweils andere Formel ist nicht relevant und es folgt

$$\omega_v(v(\varphi_1)) \vee \omega_v(v(\varphi_2)) = \omega_v(v(\varphi_1 \vee \varphi_2)) = T.$$

- Falls  $v(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = T$  gilt, dann ist  $v(\varphi_1) = F$  oder es ist  $v(\varphi_2) = T$ . Der Wahrheitswert für die jeweils andere Formel ist nicht relevant und es folgt

$$\omega_v(v(\varphi_1)) \rightarrow \omega_v(v(\varphi_2)) = \omega_v(v(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)) = T.$$

- Falls  $v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = T$  ist, dann gilt entweder  $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = T$  oder es gilt  $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = F$ . Damit folgt

$$\omega_v(v(\varphi_1)) \leftrightarrow \omega_v(v(\varphi_2)) = \omega_v(v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)) = T.$$

Das heißt, die Komposition  $\omega_v \circ \tilde{v}$  ist damit ein klassisches Modell von  $\varphi$  und es gilt die Behauptung. Vergleiche [Pri79, Beweis zu III.8.THEOREM].  $\square$

## 2.5. Inkonsistenzmaße

Wie bereits erwähnt, gibt es in der Literatur viele verschiedene Ansätze zur Inkonsistenzmessung und viele unterschiedliche Vorschläge zu Eigenschaften, die ein Inkonsistenzmaß haben sollte. Thimm hat in [Thi18, Thi17b] insgesamt 22 verschiedene Inkonsistenzmaße hinsichtlich 18 unterschiedlicher Eigenschaften untersucht. Es hat sich gezeigt, dass verschiedene Inkonsistenzmaße unterschiedliche Eigenschaften erfüllen. Da sich von den untersuchten Eigenschaften auch welche teilweise widersprechen, kann somit kein Inkonsistenzmaß alle untersuchten Eigenschaften besitzen. In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns deshalb für die Definition, was wir unter einem Inkonsistenzmaß verstehen, auf grundlegende unstrittige Eigenschaften. Vergleiche hierzu [Thi19, Kapitel 3].

Mit  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$  bezeichnen wir die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  vereinigt mit  $\{\infty\}$ .

**Definition 2.9 (Inkonsistenzmaß).** Eine Funktion  $\mathcal{I}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$  heißt Inkonsistenzmaß, wenn sie für alle  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) = 0 \text{ gilt genau dann, wenn } \mathcal{K} \text{ konsistent ist.}$$

## 3. Das Contension-Sum Maß

In diesem Kapitel definieren wir einen neuen Ansatz zur Inkonsistenzmessung, den wir im Kapitel 4 hinsichtlich Eigenschaften, im Kapitel 5 hinsichtlich Ausdrucksstärke und im Kapitel 6 hinsichtlich Komplexität analysieren. Der neue Ansatz basiert auf *minimalen* 3-wertigen Modellen.

**Definition 3.1 (Minimales Modell).** Sei  $\Phi$  eine Formel oder eine Formelmenge. Ein Modell  $v \in \text{Mod}_3(\Phi)$  ist minimal, wenn es kein  $v' \in \text{Mod}_3(\Phi)$  gibt mit  $\text{Conflictbase}(v') \subset \text{Conflictbase}(v)$ . Die Menge aller minimalen Modelle von  $\Phi$  bezeichnen wir mit  $\text{Mod}_3^m(\Phi)$ .

**Definition 3.2 (Minimale Konfliktbasis).** Sei  $\Phi$  eine Formel oder eine Formelmenge. Falls  $v \in \text{Mod}_3^m(\Phi)$  gilt, ist die Menge  $\text{Conflictbase}(v)$  eine minimale Konfliktbasis von  $\Phi$ . Die Elemente der minimalen Konfliktbasis heißen **Konfliktatome**.

**Definition 3.3 (Contension-Sum).** Sei  $v$  eine 3-wertige Interpretation. Dann ist das Contension-Sum Maß  $\mathcal{I}_{cS}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$  definiert durch

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})} |\text{Conflictbase}(v)| \quad (1)$$

mit  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Somit ist  $\mathcal{I}_{cS}$  die Summe über die Anzahl von Atomen jeweils aller minimalen Konfliktbasen von  $\mathcal{K}$ .

**Beispiel 3.4.** Nehmen wir Beispiel 2.4 mit  $\mathcal{K} = \{a, \neg b, a \rightarrow b\}$ . Wie wir Tabelle 3 entnehmen können, ist die Menge der minimalen Modelle  $\text{Mod}_3^m = \{v_2, v_6\}$  und es ergibt sich

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\text{Conflictbase}(v_2)| + |\text{Conflictbase}(v_6)| = |\{b\}| + |\{a\}| = 1 + 1 = 2.$$

Zum Vergleich ermitteln wir die Inkonsistenz für das Beispiel 2.4 mit dem Contension Maß. Zuvor benötigen wir noch die Definition.

**Definition 3.5 (Contension [Thi18, GH11]).** Sei  $v$  eine 3-wertige Interpretation. Dann ist das Contension Maß  $\mathcal{I}_c: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^\infty$  definiert durch

$$\mathcal{I}_c(\mathcal{K}) = \min \{ |\text{Conflictbase}(v)| \mid v \models^3 \mathcal{K} \} \quad \text{für } \mathcal{K} \in \mathbb{K}$$

Das heißt,  $\mathcal{I}_c$  entspricht der minimalen Anzahl von Atomen mit Wahrheitswert B, die für ein Modell von  $\mathcal{K}$  benötigt werden.

**Beispiel 3.6.** Wir beziehen uns wieder auf das Beispiel 2.4 mit  $\mathcal{K} = \{a, \neg b, a \rightarrow b\}$ . Wie wir Tabelle 3 entnehmen können, ergibt sich  $\mathcal{I}_c(\mathcal{K}) = 1$ . Für das Contension-Sum Maß ergab sich  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = 2$  nach Beispiel 3.4.

## 4. Eigenschaften

Unter *Eigenschaften* verstehen wir zweckmäßige und sinnvolle Eigenschaften, die für ein Inkonsistenzmaß notwendig oder zumindest wünschenswert sind. Im Englischen werden sie treffend mit *rationality postulates* bezeichnet. Es gibt in der Literatur viele Vorschläge zu wünschenswerten Eigenschaften, aber noch keine Einigkeit über die Menge der notwendigen Eigenschaften. Wir gehen darauf etwas näher im Kapitel 7 ein. Um einen guten Überblick über die Qualität unseres Ansatzes zur Inkonsistenzmessung zu bekommen, untersuchen wir ihn auf alle von Thimm [Thi18] zusammengestellten Eigenschaften. Zudem berücksichtigen wir weitere Eigenschaften, die von Besnard [Bes14] eingeführt wurden und gehen im Kapitel 4.6 auf Eigenschaften von Grant und Hunter [GH23] ein, die eigens zur semantischen Inkonsistenzmessung vorgesehen sind.

### 4.1. Grundlagen

Im Folgenden stellen wir die Definitionen von den Eigenschaften zusammen, hinsichtlich derer wir unseren Ansatz zur Inkonsistenzmessung analysieren. Um konform mit der ausschließlich in englischer Sprache vorhandenen Literatur zu sein, übernehmen wir für die Eigenschaften die verwendeten englischen Bezeichnungen. Für die Definitionen sei  $\mathcal{L}(A)$  die Menge aller aussagenlogischen Formeln der aussagenlogischen Sprache  $\mathcal{L}$  über die Menge  $A$  von Aussagenvariablen.

**Definition 4.1 (Normalization [Thi18, HK06]).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt normiert, falls  $0 \leq \mathcal{I}(\mathcal{K}) \leq 1$  für alle  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ .

Normierte Inkonsistenzmaße eignen sich insbesondere zum Vergleich der Inkonsistenz von unterschiedlich großen Wissensbasen.

**Definition 4.2 (Monotony [Thi18, HK06]).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt monoton, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) \leq \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ .

Bei einem monotonen Inkonsistenzmaß kann sich der Wert für die Inkonsistenz einer Wissensbasis nicht verringern, wenn die Wissensbasis erweitert wird. Eine Erweiterung ist zum Beispiel das Ergänzen von Formeln. Für die nächsten Eigenschaften benötigen wir noch zwei grundlegende Definitionen.

**Definition 4.3 (minimal inkonsistente Menge [Thi18]).** Sei  $M$  eine inkonsistente Formelmengemenge. Wenn es kein  $M' \subset M$  mit  $M' \models \perp$  gibt, dann ist  $M$  eine minimal inkonsistente Menge. Die Menge aller minimal inkonsistenten Untermengen von  $\mathcal{K}$  bezeichnen wir mit  $\text{MI}(\mathcal{K})$ .

**Definition 4.4 (freie Formel [Thi18, HK06]).** Eine Formel in einer Wissensbasis  $\mathcal{K}$  heißt freie Formel, wenn sie in keiner minimal inkonsistenten Untermenge von  $\mathcal{K}$  enthalten ist. Die Menge aller freien Formeln in  $\mathcal{K}$  bezeichnen wir mit  $\text{Free}(\mathcal{K})$ .

**Definition 4.5 (Free-formula Independence [Thi18, HK06]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Free-formula Independence, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$$

für alle  $\alpha \in \text{Free}(\mathcal{K})$  gilt.

Die Eigenschaft Free-formula Independence zeigt, dass sich der Wert für die Inkonsistenz einer Wissensbasis nicht ändert, wenn eine freie Formel aus dieser Wissensbasis entfernt wird.

**Definition 4.6 (Dominance [Thi18, HK06]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Dominance, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) \geq \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\beta\})$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$  mit  $\alpha \not\models \perp$  und  $\alpha \models \beta$ .

Mit der Eigenschaft Dominance vergrößert sich der Wert für die Inkonsistenz einer Wissensbasis nicht, wenn anstelle einer konsistenten Formel mit einem gewissen Informationsgehalt eine Formel mit weniger Information der Wissensbasis hinzugefügt wird.

**Definition 4.7 (sichere Formel [Thi18]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Eine Formel  $\alpha \in \mathcal{K}$  heißt sichere Formel, falls

$$\text{At}(\alpha) \cap \text{At}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\}) = \emptyset \text{ und } \alpha \not\models \perp$$

gilt. Die Menge aller sicheren Formeln in  $\mathcal{K}$  bezeichnen wir mit  $\text{Safe}(\mathcal{K})$ .

**Definition 4.8 (Safe-formula Independence [Thi18, Thi09]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Safe-formula Independence, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$$

für alle  $\alpha \in \text{Safe}(\mathcal{K})$  gilt.

Mit der Eigenschaft Safe-formula Independence ändert sich der Wert für die Inkonsistenz einer Wissensbasis nicht, wenn eine sichere Formel aus dieser Wissensbasis entfernt wird.

**Definition 4.9 (Super-Additivity [Thi18, Thi09]).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt superadditiv, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \geq \mathcal{I}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$ .

Mit der Eigenschaft Super-Additivity wird sichergestellt, dass die Summe der Inkonsistenzwerte von zwei disjunkten Wissensbasen nicht größer ist, als der Inkonsistenzwert ihrer Vereinigung.

**Definition 4.10 (Penalty [Thi18, Thi09]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Penalty, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) > \mathcal{I}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$$

mit  $\alpha \notin \text{Free}(\mathcal{K})$  für alle  $\alpha \in \mathcal{K}$  gilt.

Die Eigenschaft Penalty gewährleistet, dass der Inkonsistenzwert einer Wissensbasis größer wird, wenn eine inkonsistente oder zur Inkonsistenz beitragende Formel dieser Wissensbasis hinzugefügt wird.

**Definition 4.11 (MI-separability [Thi18, HK10]).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt MI-separierbar, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \mathcal{I}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\text{MI}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \text{MI}(\mathcal{K}) \cup \text{MI}(\mathcal{K}')$  und  $\text{MI}(\mathcal{K}) \cap \text{MI}(\mathcal{K}') = \emptyset$ .

Mit der Eigenschaft MI-separability ist die Summe der Inkonsistenzwerte von zwei Wissensbasen gleich dem Inkonsistenzwert ihrer Vereinigung, wenn ihre minimal inkonsistente Untermengen disjunkt sind.

**Definition 4.12 (MI-normalization [Thi18, HK10]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt MI-normiert, falls  $\mathcal{I}(M) = 1$  für alle  $M \in \text{MI}(\mathcal{K})$  gilt.

Mit der Eigenschaft MI-normalization ergibt sich für jede minimal inkonsistente Untermenge einer Wissensbasis der Inkonsistenzwert 1.

**Definition 4.13 (Attenuation [Thi18, MLJ11]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Attenuation, falls

$$\mathcal{I}(M) < \mathcal{I}(M')$$

mit  $|M| > |M'|$  für alle  $M, M' \in \text{MI}(\mathcal{K})$  gilt.

Mit der Eigenschaft Attenuation haben kleinere minimal inkonsistente Untermengen einer Wissensbasis größere Inkonsistenzwerte. Als Begründung für diese Eigenschaft wird das *lottery paradox* herangezogen. Für weitere Informationen verweisen wir auf [Thi18, Fußnote 5] und [Kyb61].

**Definition 4.14 (Equal Conflict [Thi18, MLJ11]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Equal Conflict, falls

$$\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}(M')$$

mit  $|M| = |M'|$  für alle  $M, M' \in \text{MI}(\mathcal{K})$  gilt.

Mit der Eigenschaft Attenuation wird sicher gestellt, dass bei minimal inkonsistenten Untermengen einer Wissensbasis, die gleich groß sind, der Inkonsistenzwert gleich ist.

**Definition 4.15 (Almost Consistency [Thi18, MLJ11]).** Sei  $M_1, M_2, \dots, M_n$  eine Folge von minimal inkonsistenten Mengen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = \infty$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Almost Consistency, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}(M_n) = 0$$

gilt.

Mit der Eigenschaft Almost Consistency ist der Grenzwert für beliebig große minimal inkonsistente Mengen Null.

**Definition 4.16 (Contradiction [Thi18, MLJB11]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Contradiction, falls gilt:

Genau dann ist  $\mathcal{I}(\mathcal{K}) = 1$ , wenn alle  $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$  mit  $\mathcal{K}' \neq \emptyset$  inkonsistent sind.

Ergänzend zur Eigenschaft Normalization zeigt die Eigenschaft Contradiction, dass eine Wissensbasis maximal inkonsistent ist, wenn es keine konsistente Untermenge dieser Wissensbasis gibt.

**Definition 4.17 (Free-formula Dilution [Thi18, MLJB11]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Free-formula Delution, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) \geq \mathcal{I}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$$

für alle  $\alpha \in \text{Free}(\mathcal{K})$  gilt.

Die Eigenschaft Free-formula Dilution ist eine schwächere Formulierung der Eigenschaft Free-formula Independence. Sie stellt sicher, dass der Wert für die Inkonsistenz einer Wissensbasis nicht größer wird, wenn eine freie Formel aus dieser Wissensbasis entfernt wird. Für die Definition der nächsten Eigenschaft benötigen wir erst noch die Definition zu einem etwas strengeren Äquivalenzbegriff.

**Definition 4.18 (bijektive Äquivalenz [Thi18, GH11]).** Zwei Formelmengen  $\Phi, \Psi$  sind bijektiv äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: \Phi \rightarrow \Psi$  gibt, so dass gilt:

$$\varphi \equiv f(\varphi)$$

für alle  $\varphi \in \Phi$ . Symbolisch schreiben wir dies  $\Phi \equiv_b \Psi$ .

**Definition 4.19 (Irrelevanz of Syntax [Thi18, GH11, Thi11]).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  erfüllt die Eigenschaft Irrelevanz of Syntax, falls gilt

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K} \equiv_b \mathcal{K}'$ .

Mit der Eigenschaft Irrelevanz of Syntax ergibt sich der gleiche Inkonsistenzwert für verschiedene Wissensbasen, wenn deren Formeln zueinander paarweise logisch äquivalent sind.

**Definition 4.20 (Exchange [Thi18, Bes14]).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  erfüllt die Eigenschaft Exchange, falls gilt

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}', \mathcal{K}'' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K}' \not\equiv \perp$  und  $\mathcal{K}' \equiv \mathcal{K}''$ .

Die Eigenschaft Exchange soll sicherstellen, dass sich der Inkonsistenzwert nicht ändert, wenn konsistente Teilmengen der Wissensbasis ausgetauscht werden.

**Definition 4.21 (Adjunction Invariance [Thi18, Bes14]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  erfüllt die Eigenschaft Adjunction Invariance, falls gilt

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}) = \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\})$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$ .

Mit der Eigenschaft Adjunction Invariance hat eine zusätzliche Formelmenge den gleichen Einfluss auf den Inkonsistenzwert einer Wissensbasis, wie das Ergänzen der Konjunktion aus allen Formeln dieser Formelmenge.

**Definition 4.22 (Conjunction Dominance [Bes14]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Conjunction Dominance, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}) \geq \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\})$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$ .

Die Eigenschaft Conjunction Dominance gewährleistet, dass durch Hinzufügen einer Konjunktion der Inkonsistenzwert nicht kleiner werden kann, als wenn nur einer ihrer Operanden ergänzt wird.

**Definition 4.23 (Disjunct Maximality [Bes14]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Disjunct Maximality, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \vee \beta\}) \leq \max(\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}), \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\beta\}))$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$ .

Mit der Eigenschaft Disjunct Maximality wird der Einfluss einer zusätzlichen Disjunktion beschränkt durch den maximalen Einfluss, den die einzelnen Operanden dieser Disjunktion durch Hinzufügen haben können.

**Definition 4.24 ( $\wedge$ -over- $\vee$  Dominance [Bes14]).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft  $\wedge$ -over- $\vee$  Dominance, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}) \geq \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \vee \beta\})$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$ .

Die Eigenschaft  $\wedge$ -over- $\vee$  Dominance zeigt die Dominanz einer Konjunktion gegenüber der Disjunktion mit den gleichen Operanden.

## 4.2. Contension-Sum ein Inkonsistenzmaß?

Zuerst zeigen wir, dass das Contension-Sum Maß ein Inkonsistenzmaß ist, bevor wir analysieren, welche Eigenschaften es erfüllt.

**Proposition 4.25.** Das Contension-Sum Maß ist ein Inkonsistenzmaß.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  eine konsistente Wissensbasis. Dann gibt es eine Interpretation  $\omega \in \text{Mod}(\mathcal{K})$ . Somit folgt mit Proposition 2.7, dass ein 3-wertiges Modell  $v$  für  $\mathcal{K}$  mit  $\text{Conflictbase}(v) = \emptyset$  existiert. Das Modell  $v$  ist damit minimal. Es folgt

$$\mathcal{I}_{cs}(\mathcal{K}) = \sum_{\omega} |\emptyset| = 0$$

Sei nun  $\mathcal{K}$  inkonsistent. Dann gibt es einen Konflikt in einer Aussagenvariablen, so dass mindestens eine Formel in  $\mathcal{K}$  inkonsistent ist oder mindestens zwei Formeln in  $\mathcal{K}$  in Konflikt stehen. Das heißt, es ist  $\text{Conflictbase}(v) \neq \emptyset$  für alle minimalen  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K})$ . Es folgt

$$\mathcal{I}_{cs}(\mathcal{K}) = \sum_v |\text{Conflictbase}(v)| > 0$$

□

### 4.3. Analyse hinsichtlich Eigenschaften

Die Analyse wird für die, in Kapitel 4.1, zusammengestellten Eigenschaften durchgeführt. Im Folgenden sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $\mathcal{L}(A)$  die Menge aller aussagenlogischen Formeln der aussagenlogischen Sprache  $\mathcal{L}$  über  $A$ . Zudem gelte  $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots \in A$ .

**Proposition 4.26.** *Das Contension-Sum Maß ist nicht normiert.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} = \{a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c\}$ . Dann ist  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\{a, b, c\}| = 3 > 1$ . Die Bedingung in Definition 4.1 ist nicht erfüllt. Somit gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.27.** *Das Contension-Sum Maß ist monoton.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  und sei  $v$  ein minimales Modell von  $\mathcal{K}$ . Sei weiterhin  $\alpha \in \mathcal{L}(A)$  und  $\mathcal{K}' = (\mathcal{K}) \cup \{\alpha\} \supseteq \mathcal{K}$ . Durch Hinzufügen von Formeln kann sich die Anzahl der Konfliktatome in einem minimalen Modell  $v$  nicht verringern. Da dies für alle  $v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) &= \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})} |\text{Conflictbase}(v)| \\ &\leq \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K}')} |\text{Conflictbase}(v)| = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'). \end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.28.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Free-Formula Independence.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{a \wedge \neg a \wedge \neg b, b\}$  und sei  $\alpha = b$ . Dann ist  $\alpha \in \text{Free}(\mathcal{K})$ , da  $\alpha \notin \bigcup_{M \in \text{MI}(\mathcal{K})} M = \{a \wedge \neg a \wedge \neg b\} = \mathcal{K} \setminus \{\alpha\}$ . Somit folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\{a, b\}| = 2 > \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\}) = |\{a\}| = 1.$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.5 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.29.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Dominance.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{a \wedge \neg a \wedge \neg b\}$ . Seien weiterhin  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$  mit  $\alpha = b$  und  $\beta = b \vee (c \wedge \neg c)$ . Dann gilt  $\alpha \not\models \perp$  und  $\alpha \models \beta$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) &= \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a \wedge \neg b, b\}) = |\{a, b\}| = 2 \\ &< \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\beta\}) &= \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a \wedge \neg b, b \vee (c \wedge \neg c)\}) \\ &= |\{a, b\}| + |\{a, c\}| = 4. \end{aligned}$$

Dies widerspricht Definition 4.6 und es gilt somit die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.30.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt die Eigenschaft Safe-formula Independence.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  und sei  $\alpha \in \text{Safe}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\})$ . Sei weiterhin  $v \in \Upsilon(A)$  ein minimales Modell für  $\mathcal{K} \cup \{\alpha\}$ . Nach Definition 4.7 ist  $\alpha$  konsistent. Mit Proposition 2.7 gibt es ein  $v$ , so dass  $v(\alpha) = \text{T}$  ist. Da  $v$  minimal ist, gilt

$$\text{At}(\alpha) \cap \text{Conflictbase}(v) = \emptyset.$$

Somit ist  $v$  auch ein minimales Modell für  $\mathcal{K}$  und es folgt

$$M_{\mathcal{K}\alpha} := \text{Mod}_3^m(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) \subseteq \text{Mod}_3^m(\mathcal{K}) =: M_{\mathcal{K}}.$$

Wir können somit schließen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) &= \sum_{v \in M_{\mathcal{K}\alpha}} |\text{Conflictbase}(v)| \\ &\leq \sum_{v \in M_{\mathcal{K}}} |\text{Conflictbase}(v)| \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Da das Contension-Sum Maß monoton ist, folgt mit Proposition 4.27

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) \geq \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K})$$

und damit

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}).$$

Somit gilt die Behauptung. □

**Proposition 4.31.** *Das Contension-Sum Maß ist nicht super-additiv nach Definition 4.9.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{a, \neg a\}$  und  $\mathcal{K}' = \{a \wedge \neg a\}$ . Dann ist  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') &= \mathcal{I}_{cS}(\{a, \neg a, a \wedge \neg a\}) = |\{a\}| = 1 \\ &\not\geq \mathcal{I}_{cS}(\{a, \neg a\}) + \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a\}) = |\{a\}| + |\{a\}| = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.32.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Penalty.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} = \{\neg a \wedge b, \neg a, a \wedge \neg b\}$  und  $\alpha = \neg a$ . Dann ist  $M = \{\neg a, a \wedge \neg b\}$  eine minimal inkonsistente Teilmenge von  $\mathcal{K}$ . Es gilt  $\alpha \notin \text{Free}(\mathcal{K})$  und

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\{a, b\}| = 2 \not\geq \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\}) = |\{a, b\}| = 2.$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.10 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung. □

**Proposition 4.33.** *Das Contension-Sum Maß ist nicht MI-separierbar.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{a, \neg a\}$  und  $\mathcal{K}' = \{a \wedge \neg a\}$ . Dann ist  $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}' = \{a, \neg a, a \wedge \neg a\}$  mit

$$\text{MI}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \{\{a, \neg a\}, \{a \wedge \neg a\}\} = \text{MI}(\mathcal{K}) \cup \text{MI}(\mathcal{K}') \text{ und } \text{MI}(\mathcal{K}) \cap \text{MI}(\mathcal{K}') = \emptyset.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') &= \mathcal{I}_{cS}(\{a, \neg a, a \wedge \neg a\}) = |\{a\}| = 1 \\ &\neq \mathcal{I}_{cS}(\{a, \neg a\}) + \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a\}) = |\{a\}| + |\{a\}| = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.34.** *Das Contension-Sum Maß ist nicht MI-normiert.*

*Beweis.* Sei zum Beispiel  $\mathcal{K} = \{a \wedge \neg a \wedge b \wedge \neg b\}$ . Dann ist  $\mathcal{K}$  minimal inkonsistent. Das heißt, es ist  $\text{MI}(\mathcal{K}) = \{\mathcal{K}\}$ . Es folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\{a, b\}| = 2 \neq 1.$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.12 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung. □

**Proposition 4.35.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Attenuation.*

*Beweis.* Sei zum Beispiel  $\mathcal{K} = \{a \wedge \neg a, b \wedge \neg c, \neg b \wedge c\}$ . Dann sind  $M = \{b \wedge \neg c, \neg b \wedge c\}$  und  $M' = \{a \wedge \neg a\}$  zwei minimal inkonsistente Untermengen von  $\mathcal{K}$ . Es gilt

$$|M| = 2 > |M'| = 1,$$

jedoch

$$\mathcal{I}_{cS}(M) = |\{b, c\}| = 2 > \mathcal{I}_{cS}(M') = |\{a\}| = 1.$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.13 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung. □

**Proposition 4.36.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Equal Conflict.*

*Beweis.* Sei zum Beispiel  $\mathcal{K} = \{\neg a, a \wedge b, \neg a \wedge \neg b\}$ . Dann sind  $M = \{\neg a, a \wedge b\}$  und  $M' = \{a \wedge b, \neg a \wedge \neg b\}$  zwei minimal inkonsistente Untermengen von  $\mathcal{K}$ . Es gilt

$$|M| = |M'| = 2,$$

jedoch

$$\mathcal{I}_{cS}(M) = |\{a\}| = 1 \neq \mathcal{I}_{cS}(M') = |\{a, b\}| = 2.$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.14 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung. □

**Proposition 4.37.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Almost Consistency.*

*Beweis.* Sei zum Beispiel  $\mathcal{K}_n = \{a_1, \dots, a_n, \neg a_1, \dots, \neg a_n\}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{K}| = \infty$$

und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\{a_1, \dots, a_n\}| = \infty \neq 0$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.15 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.38.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Contradiction.*

*Beweis.* Sei zum Beispiel  $\mathcal{K} = \{a, \neg a\}$ . Dann ist  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\{a\}| = 1$  und es gibt eine Teilmenge  $\mathcal{K}' = \{a\}$  von  $\mathcal{K}$ , die konsistent ist. Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.16 ist nicht erfüllt. Somit gilt die Behauptung.  $\square$

Das folgende Theorem wurde von Thimm [Thi18] gezeigt und bewiesen [Thi17b]. Es dient uns im Anschluss als eine Grundlage für den Beweis für eine weitere Eigenschaft des Contension-Sum Maßes.

**Theorem 4.39.** *Ein monotones Inkonsistenzmaß erfüllt Free Formula Dilution.*

**Proposition 4.40.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt die Eigenschaft Free-formula Dilution.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt mit Proposition 4.27 und Theorem 4.39.  $\square$

**Proposition 4.41.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Irrelevanz of Syntax.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Das Beispiel haben wir aus [Thi18, Beweis zu Theorem 3] entnommen. Sei  $\mathcal{K} = \{a \wedge \neg a \wedge b \wedge \neg b\}$  und  $\mathcal{K}' = \{a \wedge \neg a\}$ . Dann gilt  $\mathcal{K} \equiv_b \mathcal{K}'$  und es folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = |\{a, b\}| = 2 \neq \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}') = |\{a\}| = 1.$$

Das heißt, die Bedingung nach Definition 4.19 ist nicht erfüllt und es gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.42.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Exchange.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{a \wedge \neg a \wedge \neg b\}$ ,  $\mathcal{K}' = \{b\}$  und  $\mathcal{K}'' = \{b \vee (c \wedge \neg c)\}$ . Dann gilt  $\mathcal{K}' \not\equiv \perp$  und  $\mathcal{K}' \equiv \mathcal{K}''$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') &= \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a \wedge \neg b, b\}) = |\{a, b\}| = 2 \\ &\neq \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'') = \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a \wedge \neg b, b \vee (c \wedge \neg c)\}) \\ &= |\{a, b\}| + |\{a, c\}| = 4. \end{aligned}$$

Dies widerspricht Definition 4.20 und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.43.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt die Eigenschaft Adjunction Invariance.*

*Beweis.* Den Beweis führen wir analog zum Beweis für das Contension Maß nach [Thi17b, Proposition 5]. Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  und seien  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$ . Sei weiterhin  $v \models_3 \mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}$  für ein  $v \in \Upsilon(A)$ . Mit Definition 2.2 gilt somit  $v(\alpha), v(\beta) \in \{T, B\}$ . Daraus folgt  $v(\alpha \wedge \beta) \in \{T, B\}$  mit Tabelle 2. Somit gilt auch  $v \models_3 \mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}$ . Sei umgekehrt  $v \models_3 \mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}$  für ein  $v \in \Upsilon(A)$ . Dann folgt  $v \models_3 \mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}$  analog mit Tabelle 2 und Definition 2.2. Das heißt, es gilt

$$\mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\} \equiv_3 \mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}$$

und folglich

$$\text{Mod}_3^m(\mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}) = \text{Mod}_3^m(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}) =: M_{AI}.$$

Wir können somit schließen, dass

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}) = \sum_{v \in M_{AI}} |\text{Conflictbase}(v)| = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}).$$

Somit gilt die Behauptung. □

Die Eigenschaft Adjunction Invariance wird von Thimm [Thi16] auch mit  $\wedge$ -Invariance bezeichnet.

**Proposition 4.44.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt die Eigenschaft Conjunction Dominance.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  und seien  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$ . Mit der Eigenschaft Adjunction Invariance (Proposition 4.43), gilt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}).$$

Da das Contension-Sum Maß monoton ist, folgt mit Proposition 4.27

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha, \beta\}) \geq \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\})$$

und damit die Behauptung. □

**Proposition 4.45.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Disjunct Maximality.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{c\}$ . Seien  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$  mit  $\alpha = a \wedge \neg a$  und  $\beta = b \wedge \neg b$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \vee \beta\}) &= \mathcal{I}_{cS}(\{(a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg b), c\}) = |\{a\}| + |\{b\}| = 2 \\ &> \max(\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}), \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\beta\})) \\ &= \max(\mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a, c\}), \mathcal{I}_{cS}(\{b \wedge \neg b, c\})) \\ &= \max(|\{a\}|, |\{b\}|) = 1. \end{aligned}$$

Dies widerspricht Definition 4.23 und damit gilt die Behauptung. □

**Proposition 4.46.** *Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft  $\wedge$ -over- $\vee$  Dominance.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Sei  $\mathcal{K} = \{c \wedge \neg c\}$  und seien  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(A)$  mit  $\alpha = a \wedge \neg a$  und  $\beta = b \wedge \neg b$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \wedge \beta\}) &= \mathcal{I}_{cS}(\{a \wedge \neg a \wedge b \wedge \neg b, c \wedge \neg c\}) = |\{a, b, c\}| = 3 \\ &< \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \{\alpha \vee \beta\}) \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\{(a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg b), c \wedge \neg c\}) \\ &= |\{a, c\}| + |\{b, c\}| = 4. \end{aligned}$$

Dies widerspricht Definition 4.24 und damit gilt die Behauptung.  $\square$

#### 4.4. Auswertung

Im vorigen Kapitel haben wir das Contension-Sum Maß auf die in Kapitel 4.1 definierten Eigenschaften hin untersucht. Von den 21 Eigenschaften sind sechs erfüllt und 15 nicht. Eine Übersicht liefert Tabelle 4. Es stellt sich die Frage, ob Eigenschaften, die erfüllt oder nicht erfüllt sind, jeweils einer bestimmten Kategorie zugeordnet werden können.

Von Besnard und Grant [BG20] wird eine Einteilung in relative und absolute Maße vorgenommen, wobei sie darauf hinweisen, dass sich manche Maße nicht einer der beiden Kategorien zuordnen lassen. Dies gilt zum Beispiel für das *Drastic Measure*  $\mathcal{I}_d$  [HK06, Definition 11] und das  *$\eta$ -Inconsistency Measure*  $\mathcal{I}_\eta$  [Kni02]. Die Eigenschaften ordnen sie entsprechend den drei Klassen von Eigenschaften zu, die relative Maße erfüllen sollten, die für relative Maße ungeeignet sind und die relative Maße erfüllen können. Zur Klassifizierung von Wissensbasen hat bereits Grant [Gra78] zwischen absoluten und relativen Maßen unterschieden. Das Contension-Sum Maß ist ein absolutes Maß und erfüllt deshalb auch nicht die beiden Eigenschaften Normalization und Contradiction. Es sind zwei Eigenschaften, die von relativen Maßen erfüllt werden können und von absoluten Maßen in der Regel nicht erfüllt werden. Vergleiche [Thi18, Table 2, Table 3] und [BG20, Table 2].

In der Literatur unterteilt man Inkonsistenzmaße auch oft in *syntaktischer* oder *semantischer* Ansatz [Thi19, HK05, TW19]. Der Kategorie syntaktischer Ansatz werden diejenigen Inkonsistenzmaße zugeordnet, die Inkonsistenz anhand minimal inkonsistenter Formelmengen bewerten. Der Kategorie semantischer Ansatz gelten diejenigen Inkonsistenzmaße als zugehörig, die Inkonsistenz aufgrund von in Konflikt stehenden Literalen beurteilen. Hunter, Konieczny und Grant [HK10, GH23] verwenden zur Klassifizierung auch die Bezeichnungen *formelbasierte* Maße (formula-centric measures) und *atombasierte* Maße (atom-centric measures). Der Unterschied zwischen syntaktischem und semantischem Maß ist allerdings nicht klar definiert und es gibt zudem Inkonsistenzmaße die keiner der beiden Klassen eindeutig zugeordnet werden können [Thi19].

Mit Definition 3.3 folgt, dass das Contension-Sum Maß ein atombasiertes Maß ist, da mit ihm Mengen von Konfliktatomen gemessen werden. Angelehnt an die vorigen Ausführungen unterscheiden wir im Folgenden die untersuchten Eigenschaften in *formelbasiert* und *atombasiert*. Wir bezeichnen eine Eigenschaft als formelbasiert, wenn sich ihre Definition explizit auf Formeln oder Formelmengen bezieht und somit eine formelbasierte Sicht auf Wissensbasen erfolgt. Unter einer atombasierten Eigenschaft verstehen wir, wenn in der Definition der Eigenschaft, direkt oder indirekt auf Atome Bezug genommen wird. Ein Beispiel für eine atombasierte Eigenschaft ist Safe-formula Independence, bei der über die Berücksichtigung einer sicheren Formel in der Definition indirekt eine Sicht auf die Atome der Wissensbasis erfolgt. Vergleiche Definition 4.8 und Definition 4.7.

Betrachten wir nun die untersuchten Eigenschaften. Die Eigenschaft Inkonsistenzmaß ist erfüllt. Sie kann weder als formel- noch als atombasiert klassifiziert werden, ist jedoch fundamental. Die beiden Eigenschaften Normalization und Contradiction sind, wie bereits beschrieben, nicht erfüllt und nicht für absolute Maße geeignet. Von den restlichen 18 Eigenschaften entspricht nur die Eigenschaft Safe-formula Independence unseren Vorstellungen als atombasierte Eigenschaft. Alle anderen Eigenschaften ordnen wir der Kategorie formelbasiert zu. Das heißt, von den atombasierten Eigenschaften ist eine von einer erfüllt. Von den formelbasierten Eigenschaften sind vier von 17 erfüllt.

#### 4.5. Qualitativer Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen

Um einen Überblick zu erhalten, wie das Contension-Sum Maß hinsichtlich der Eigenschaften gegenüber anderen Inkonsistenzmaßen abschneidet, führen wir einen qualitativen Vergleich mit den 22 von Thimm [Thi18] untersuchten Inkonsistenzmaßen durch. Die Bezeichnungen für die Inkonsistenzmaße und die Ergebnisse hinsichtlich der Eigenschaften übernehmen wir von Thimm [Thi18]. Allerdings wiederholen wir nicht die Definitionen für die einzelnen Maße, sondern verweisen dazu auf [Thi18, Figure 1]. Damit wir den Vergleich in einer Tabelle zusammenfassen können, ordnen wir jede Eigenschaft einer Position in einem binären  $n$ -Tupel zu und geben für jedes Maß das zugehörige binäre  $n$ -Tupel an. Eine erfüllte Eigenschaft wird durch 1 und eine nicht erfüllte Eigenschaft durch 0 repräsentiert. Da wir zum Vergleich 18 Eigenschaften heranziehen, ordnen wir jedem Maß ein 18-Tupel  $(e_1, \dots, e_{18})$  folgendermaßen zu:

- $e_1$  ← Consistency (Inkonsistenzmaß),
- $e_2$  ← Normalization,
- $e_3$  ← Monotony,
- $e_4$  ← Free-formula Independence,
- $e_5$  ← Dominance,
- $e_6$  ← Safe-formula Independence,
- $e_7$  ← Super-Additivity,
- $e_8$  ← Penalty,

Eigenschaft		Def.	Prop.
✓	Inkonsistenzmaß	2.9	4.25
×	Normalization	4.1	4.26
✓	Monotony	4.2	4.27
×	Free-formula Independence	4.5	4.28
×	Dominance	4.6	4.29
✓	Safe-formula Independence	4.8	4.30
×	Super-Additivity	4.9	4.31
×	Penalty	4.10	4.32
×	MI-Separability	4.11	4.33
×	MI-Normalization	4.12	4.34
×	Attenuation	4.13	4.35
×	Equal Conflict	4.14	4.36
×	Almost Consistency	4.15	4.37
×	Contradiction	4.16	4.38
✓	Free Formula Dilution	4.17	4.40
×	Irrelevance of Syntax	4.19	4.41
×	Exchange	4.20	4.42
✓	Adjunction Invariance	4.21	4.43
✓	Conjunction Dominance	4.22	4.44
×	Disjunct Maximality	4.23	4.45
×	$\wedge$ -over- $\vee$ Dominance	4.24	4.46
erfüllt: ✓ nicht erfüllt: ×			

Tabelle 4: Übersicht Eigenschaften

- $e_9 \leftarrow$  MI-Separability,
- $e_{10} \leftarrow$  MI-Normalization,
- $e_{11} \leftarrow$  Attenuation,
- $e_{12} \leftarrow$  Equal Conflict,
- $e_{13} \leftarrow$  Almost Consistency,
- $e_{14} \leftarrow$  Contradiction,
- $e_{15} \leftarrow$  Free Formula Dilution,
- $e_{16} \leftarrow$  Irrelevanz of Syntax,
- $e_{17} \leftarrow$  Exchange,
- $e_{18} \leftarrow$  Adjunction Invariance.

Das Verhältnis der Anzahl der erfüllten Eigenschaften  $n_e$ , geteilt durch die Anzahl der Eigenschaften, bezeichnen wir als *Erfüllungsgrad*  $e_g$ . Das heißt, es ist  $e_g = n_e/18$ .

Zum einfacheren Vergleich klassifizieren wir in fünf *Erfüllungsklassen*

$$K_e = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1,0 \geq e_g > 0,8 \\ 2, & \text{falls } 0,8 \geq e_g > 0,6 \\ 3, & \text{falls } 0,6 \geq e_g > 0,4 \\ 4, & \text{falls } 0,4 \geq e_g > 0,2 \\ 5, & \text{falls } 0,2 \geq e_g \geq 0. \end{cases}$$

Der Vergleich ist in Tabelle 5 zusammengestellt. Für die Eigenschaften und Maße, die wir als atombasiert ansehen, sind die Werte jeweils in fetter Schrift angegeben. Wie wir der Tabelle entnehmen können, liegt kein Maß in der Klasse 1 oder in der Klasse 5. Die 23 Inkonsistenzmaße verteilen sich auf die Klasse 2 mit 4 Maßen, auf die Klasse 3 mit 10 Maßen und auf die Klasse 4 mit 9 Maßen. Das atombasierte Contension-Sum Maß liegt in Klasse 4 und gehört zu den Maßen mit dem niedrigsten Erfüllungsgrad.

#### 4.6. Alternative Eigenschaften - Begründungen und Analysen

Wie bereits beschrieben, lassen sich die meisten der vielen unterschiedlichen Ansätze zur Inkonsistenzmessung einer der beiden Klassen *formelbasiert* oder *atombasiert* zuordnen. Wir haben die untersuchten Eigenschaften analog klassifiziert und festgestellt, dass die meisten Eigenschaften eine formelbasierte Sicht auf Wissensbasen haben. Sie werden von dem atombasierten Contension-Sum Maß nicht erfüllt. Dies passt zu den Ergebnissen von Grant und Hunter [GH23], die weitere atombasierte Inkonsistenzmaße einführen und für diese zusätzliche atombasierte Eigenschaften angeben.

Anders als im Kapitel 4.3, in dem wir vorgegebene Eigenschaften analysiert haben, gehen wir in diesem Kapitel umgekehrt vor. Im Fokus steht, was mit dem Contension-Sum Maß gemessen wird. Davon ausgehend, gehen wir den Fragen nach, welche Eigenschaften sich daraus erschließen und welche grundsätzlich nicht erfüllt werden. Da das Contension-Sum Maß Mengen von Konfliktatomen misst, liegt die Vermutung nahe, dass atombasierte Eigenschaften eher als formelbasierte Eigenschaften erfüllbar sind. Im Folgenden führen wir für verschiedene formelbasierte Eigenschaften eine atombasierte Variante ein.

##### 4.6.1. Eigenschaft Super-Additivity

Die Eigenschaft Super-Additivity ist üblicherweise formelbasiert definiert. Bei Ansätzen für Inkonsistenzmaße, die nun eigentlich keine Formelmengen sondern Atommengen messen, ist sie deshalb in der Regel nicht erfüllt. Vergleiche [GH23, Tabelle 11]. Ein Grund ist: Wenn  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$  gilt, kann trotzdem  $\text{At}(\mathcal{K}) \cap \text{At}(\mathcal{K}') \neq \emptyset$  sein. Das heißt, wenn  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  bezüglich ihrer Formeln disjunkt sind, dann können sie

Maß	$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{18})$	$\mathbf{n}_e$	$\mathbf{e}_g$	$\mathbf{K}_e$
$\mathcal{I}_d$	(1, 1, 1, 1, 1, <b>1</b> , 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	12	$\approx 0.67$	2
$\mathcal{I}_{MI}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	10	$\approx 0.56$	3
$\mathcal{I}_{MIC}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	12	$\approx 0.67$	2
$\mathcal{I}_\eta$	(1, 1, 1, 1, 1, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	11	$\approx 0.61$	2
$\mathcal{I}_c$	(1, 0, 1, 1, 1, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)	<b>8</b>	$\approx \mathbf{0.44}$	<b>3</b>
$\mathcal{I}_{mc}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	7	$\approx 0.39$	4
$\mathcal{I}_p$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	9	$\approx 0.50$	3
$\mathcal{I}_{hs}$	(1, 0, 1, 1, 1, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	8	$\approx 0.44$	3
$\mathcal{I}_{dalal}^\Sigma$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	7	$\approx 0.39$	4
$\mathcal{I}_{dalal}^{max}$	(1, 0, 1, 1, 1, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	7	$\approx 0.39$	4
$\mathcal{I}_{dalal}^{hit}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	9	$\approx 0.50$	3
$\mathcal{I}_{D_f}$	(1, 1, 0, 0, 0, <b>0</b> , 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	8	$\approx 0.44$	3
$\mathcal{I}_{P_m}$	(0, 0, 1, 0, 0, <b>1</b> , 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	<b>5</b>	$\approx \mathbf{0.28}$	<b>4</b>
$\mathcal{I}_{mv}$	(1, 1, 0, 0, 0, <b>0</b> , 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	4	$\approx 0.22$	4
$\mathcal{I}_{nc}$	(1, 0, 1, 0, 0, <b>0</b> , 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	8	$\approx 0.44$	3
$\mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz}$	(1, 1, 1, 0, 0, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)	6	$\approx 0.33$	4
$\mathcal{I}_{t_{min}}^{fuz, \Sigma}$	(1, 0, 1, 0, 1, <b>1</b> , 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	8	$\approx 0.44$	3
$\mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz, \Sigma}$	(1, 0, 1, 0, 0, <b>1</b> , 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	5	$\approx 0.28$	4
$\mathcal{I}_{mcsc}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	8	$\approx 0.44$	3
$\mathcal{I}_{forget}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)	7	$\approx 0.39$	4
$\mathcal{I}_{CC}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	9	$\approx 0.50$	3
$\mathcal{I}_{is}$	(1, 0, 1, 1, 0, <b>1</b> , 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	11	$\approx 0.61$	2
$\mathcal{I}_{cS}$	(1, 0, 1, 0, 0, <b>1</b> , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)	<b>5</b>	$\approx \mathbf{0.28}$	<b>4</b>

Tabelle 5: Vergleich der Inkonsistenzmaße

trotzdem gleiche Atome enthalten und sind damit bezüglich der Elemente, die eigentlich betrachtet werden, nicht disjunkt. Dies gilt somit auch für das Contension-Sum Maß. Es ist nicht super-additiv nach Definition 4.9, wie mit Proposition 4.31 gezeigt wird. Nun ist Additivität eine der Eigenschaften, die man üblicherweise mit einem Maß verbindet. Wir führen deshalb die folgenden Varianten der Additivität ein.

**Definition 4.47 (Atomic Super-Additivity).** Ein atom-basiertes Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt super-additiv, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \geq \mathcal{I}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\text{At}(\mathcal{K}) \cap \text{At}(\mathcal{K}') = \emptyset$  gilt.

Von Grant und Hunter [GH23, Definition 12] gibt es eine gleichlautende Definition, die sich allerdings ausschließlich auf Mengen von Atomen mit Wahrheitswert  $B$  bezieht. In der Prämisse wird  $[D_1, D_2]$  als Partition von  $\text{Atoms}(K)$  angegeben und nach Definition 11 enthält eine Teilmenge  $D$  von  $\text{Atoms}(K)$  nur Atome, denen der Wahrheitswert  $B$  zugewiesen wird.

**Definition 4.48 (Atomic Additivity).** Ein atom-basiertes Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt additiv, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \mathcal{I}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\text{At}(\mathcal{K}) \cap \text{At}(\mathcal{K}') = \emptyset$  gilt.

**Proposition 4.49.** Das Contension-Sum Maß ist additiv nach Definition 4.48.

*Beweis.* Es seien  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  und es gelte  $\text{At}(\mathcal{K}) \cap \text{At}(\mathcal{K}') = \emptyset$ . Dann folgt  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$  und für alle  $v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})$  und alle  $v' \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K}')$  gilt

$$\text{Conflictbase}(v) \cap \text{Conflictbase}(v') = \emptyset.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') &= \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}')} |\text{Conflictbase}(v)| \\ &= \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})} |\text{Conflictbase}(v)| + \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K}')} |\text{Conflictbase}(v)| \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'). \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.50.** Das Contension-Sum Maß ist super-additiv nach Definition 4.47.

*Beweis.* Die Behauptung folgt mit Proposition 4.49. □

#### 4.6.2. Eigenschaft Monotony

Die Eigenschaft Monotony ist mit Definition 4.2 formelbasiert definiert. Da mit  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$  auch offensichtlich  $\text{At}(\mathcal{K}) \subseteq \text{At}(\mathcal{K}')$  gilt, ist die Definition auch für atom-basierte Inkonsistenzmaße geeignet. Sie wird vom Contension-Sum Maß erfüllt, siehe Proposition 4.27. Von Grant und Hunter [GH23, Definition 12] wurde eine atom-basierte Variante eingeführt. Sie bezieht sich jedoch nur auf Mengen von Atomen, denen der Wahrheitswert  $B$  zugeordnet wird.

### 4.6.3. Mathematische Sicht auf das Contension-Sum Maß

In diesem Kapitel untersuchen wir, inwieweit das Contension-Sum Maß die Anforderungen an ein klassisches mathematisches Maß erfüllt. Wir benötigen dazu den Ausdruck der  $\sigma$ -Algebra für den Definitionsbereich eines mathematischen Maßes und eine Definition, was genau ein mathematisches Maß ist. Es gibt eine Vielzahl an Literatur zur Maßtheorie, weshalb wir nur die notwendigen Definitionen und Aussagen kurz, ohne weitere Erläuterung, angeben.

**Definition 4.51 ( $\sigma$ -Algebra).** Sei  $\mathcal{P}(G)$  die Potenzmenge einer Grundmenge  $G$ . Eine Teilmenge  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{P}(G)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $G \in \mathcal{A}$ ,
- falls  $A \in \mathcal{A}$  ist, dann gilt  $(G \setminus A) \in \mathcal{A}$ ,
- für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Mengen aus  $\mathcal{A}$ , gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Vergleiche [Bau92, Definition 1.1], [Els18, Satz 3.8] und [Hab15, Kapitel 2].

**Korollar 4.52.** Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(G)$  einer Grundmenge  $G$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis.* Da  $\mathcal{P}(G)$  alle Teilmengen von  $G$  enthält, sind die Bedingungen nach Definition 4.51 offensichtlich erfüllt.  $\square$

Sei im Folgenden  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $\mathcal{L}(A)$  die Menge aller aussagenlogischen Formeln der aussagenlogischen Sprache  $\mathcal{L}$  über  $A$ . Die Menge aller Wissensbasen, die wir mit  $\mathbb{K}$  bezeichnen, ist mit Definition 2.1 die Potenzmenge von  $\mathcal{L}(A)$ . Somit können wir mit Korollar 4.52 auf die folgende Aussage schließen.

**Korollar 4.53.** Die Menge aller Wissensbasen, also  $\mathbb{K}$ , ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $\mathcal{L}(A)$ .

**Definition 4.54 (Mathematisches Maß).** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über der Menge  $M$ . Dann ist  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$  ein mathematisches Maß, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise disjunkten Mengen aus  $\mathcal{A}$ , gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Vergleiche [Hab15, Definition 3.1] und [Els18, Folgerung 1.3].

**Definition 4.55.** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$ . Wir bezeichnen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  als atom-disjunkt, wenn  $\text{At}(\mathcal{K}) \cap \text{At}(\mathcal{K}') = \emptyset$  gilt.

**Proposition 4.56.** Das Contension-Sum Maß verhält sich bei paarweise atom-disjunkten Wissensbasen wie ein mathematisches Maß.

*Beweis.* Das Contension-Sum Maß  $\mathcal{I}_{cS}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$  erfüllt die Voraussetzungen und die Bedingung (i) für ein mathematisches Maß. Da für die leere Menge jede klassische Interpretation ein Modell ist, also  $\text{Mod}(\emptyset) = \Omega(A)$  gilt, ist die leere Menge konsistent. Es folgt mit Proposition 4.25 für eine konsistente Wissensbasis, dass  $\mathcal{I}_{cS}(\emptyset) = 0$  ist.

Wir müssen noch zeigen, dass Bedingung (ii) von Definition 4.54 gilt. Seien die Wissensbasen  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n \in \mathbb{K}$  paarweise atom-disjunkt, mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n > 1$ . Sei weiterhin  $\mathcal{K}'_1 = \mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}'_k = \mathcal{K}_k \cup \mathcal{K}'_{k-1}$  für  $k = 2, \dots, n$ . Die Wissensbasen  $\mathcal{K}_k$  und  $\mathcal{K}'_{k-1}$  sind atom-disjunkt, da  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$  per Definition paarweise atom-disjunkt sind. Somit können wir mit Proposition 4.49 schließen, dass

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_k) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_k \cup \mathcal{K}'_{k-1}) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_k) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_{k-1})$$

für  $k = 2, \dots, n$  gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_n) &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n \cup \mathcal{K}'_{n-1}) \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n \cup \mathcal{K}_{n-1} \cup \mathcal{K}'_{n-2}) \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n \cup \mathcal{K}_{n-1} \cup \mathcal{K}_{n-2} \cup \mathcal{K}'_{n-3}) \\ &\quad \vdots \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n \cup \mathcal{K}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{K}_1) \\ &= \mathcal{I}_{cS}\left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{K}_k\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_n) &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_{n-1}) \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_{n-1}) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_{n-2}) \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_{n-1}) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_{n-2}) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_{n-3}) \\ &\quad \vdots \\ &= \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_{n-1}) + \dots + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_1) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_k). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{cS}\left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{K}_k\right) = \mathcal{I}_{cS}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_k). \end{aligned}$$

Das heißt,

$$\mathcal{I}_{cS}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_n).$$

Die Bedingung (ii) von Definition 4.54 ist somit ebenfalls erfüllt und es folgt die Behauptung.  $\square$

Bei nicht atom-disjunkten Wissensbasen verhält sich das Contension-Sum Maß leider nicht wie ein mathematisches Maß. Dies liegt an der besonderen Struktur von Wissensbasen. Es handelt sich um Mengen von aussagenlogischen Formeln. Seien zwei Wissensbasen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  nicht atom-disjunkt, also  $\text{At}(\mathcal{K}) \cap \text{At}(\mathcal{K}') \neq \emptyset$ . Dann ist eine Aufteilung von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  in atom-disjunkte Teilmengen nicht möglich, wenn es Formeln  $\varphi \in \mathcal{K}$  und  $\varphi' \in \mathcal{K}'$  gibt, für die  $\text{At}(\varphi) \cap \text{At}(\varphi') \neq \emptyset$  gilt. In diesen Fällen ist das Contension-Sum Maß weder super-additiv noch sub-additiv und somit nicht  $\sigma$ -additiv. Siehe Proposition 4.31 zum Beweis, dass das Contension-Sum Maß nicht super-additiv ist. Dass es nicht sub-additiv ist, zeigt die folgende Definition und das anschließende Beispiel.

**Definition 4.57 (Sub-Additivity).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  heißt sub-additiv, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \leq \mathcal{I}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$ .

**Beispiel 4.58.** Sei  $\mathcal{K} = \{a\}$  und sei  $\mathcal{K}' = \{\neg a\}$ . Dann sind  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  jeweils konsistent. Das heißt, es ist  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}') = 0$ . Damit folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \mathcal{I}_{cS}(\{a, \neg a\}) = |\{a\}| = 1 \not\leq \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) + \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}') = 0 + 0 = 0.$$

#### 4.6.4. Eigenschaft Free-formula Independence

Die Eigenschaft *Free-formula Independence* ist eine Eigenschaft mit einer formel-basierten Sicht auf eine Wissensbasis. Atombasierte Inkonsistenzmaße können in der Regel die Eigenschaft nicht erfüllen, wie das nachstehende Beispiel zeigt. Das Beispiel ist aus [Bes14, Kapitel 2.2] übernommen, wobei wir die Notation angepasst haben.

**Beispiel 4.59.** Seien  $\mathcal{K} = \{a \wedge c, b \wedge \neg c, \neg a \vee \neg b\}$  und  $\alpha = \neg a \vee \neg b$ . Dann ist  $\alpha \in \text{Free}(\mathcal{K})$ , da  $\alpha \notin \bigcup_{\text{MI} \in \text{MI}(\mathcal{K})} \text{MI} = \{a \wedge c, b \wedge \neg c\} = \mathcal{K} \setminus \{\alpha\}$ . Das heißt, für  $\mathcal{K} \setminus \{\alpha\}$  ist  $\{c\}$  die Menge der Konfliktatome und für  $\mathcal{K}$  entweder  $\{b, c\}$  oder  $\{a, b, c\}$ . Somit erscheint  $\mathcal{I}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$  für ein atombasiertes Inkonsistenzmaß weniger inkonsistent als  $\mathcal{I}(\mathcal{K})$ .

Schwächer als *Free-formula Independence*, aber atombasiert ist die Eigenschaft *Safe-formula Independence*. Sie ist somit eher für atombasierte Inkonsistenzmaße geeignet. Von Grant und Hunter [GH23, Definition 12] wird als Alternative für *Free-formula Independence* die atombasierte Eigenschaft *Free-Atom Independence* angegeben. Sie bezieht sich auf eine von Grant und Hunter definierte Menge von *free*

*atoms*, die wiederum Teil des in diesem Artikel vorgestellten graphischen Verfahrens zur Untersuchung von semantischen Inkonsistenzmaßen ist. Die Eigenschaft lässt sich somit nicht so einfach separat ohne das graphische Verfahren anwenden. Wir betrachten sie deshalb nicht weiter.

Mit Alternativen zur Eigenschaft Free-formula Independence hat sich ebenfalls Mu [Mu19] sehr ausführlich beschäftigt. Als Variante führt er die Eigenschaft *B-atom-free Formula Independence* ein. Wir zeigen, dass das Contension-Sum Maß diese Eigenschaft erfüllt. Wir benötigen dazu die Menge der minimalen Konfliktbasen  $\text{Cb}^m$  nach Definition 5.4. Mu [Mu19, Seite 285] bezeichnet diese Menge mit BA.

**Definition 4.60 (B-atom-free formula [Mu19]).** Seien  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  und  $\alpha \in \mathcal{K}$ . Falls  $\text{Cb}^m(\mathcal{K}) = \text{Cb}^m(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$  gilt, dann bezeichnen wir  $\alpha$  als B-atom-free formula.

**Definition 4.61 (B-atom-free Formula Independence [Mu19]).** Seien  $\mathcal{K}$  eine Wissensbasis und  $\alpha$  eine B-atom-free formula von  $\mathcal{K}$ . Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft B-atom-free Formula Independence, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\}) = \mathcal{I}(\mathcal{K})$$

gilt.

**Proposition 4.62.** Das Contension-Sum Maß hat die Eigenschaft B-atom-free Formula Independence.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K}$  eine Wissensbasis und sei  $\alpha$  eine B-atom-free formula von  $\mathcal{K}$ . Das heißt, es gilt  $\text{Cb}^m(\mathcal{K}) = \text{Cb}^m(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})$ . Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{CS}(\mathcal{K}) &= \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})} |\text{Conflictbase}(v)| \\ &= \sum_{M \in \text{Cb}^m(\mathcal{K})} |M| = \sum_{M \in \text{Cb}^m(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})} |M| \\ &= \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\})} |\text{Conflictbase}(v)| = \mathcal{I}_{CS}(\mathcal{K} \setminus \{\alpha\}). \end{aligned}$$

□

Die Eigenschaft B-atom-free Formula Independence deckt die Eigenschaften *Tautology Independence* und *Safe-formula Independence* ab, wie von Mu [Mu19, Corollary 4.2] gezeigt wird.

**Definition 4.63 (Tautology Independence [Mu19, Bes14]).** Sei  $\mathcal{K}$  eine Wissensbasis. Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  hat die Eigenschaft Tautology Independence, falls

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \{\alpha\}) = \mathcal{I}(\mathcal{K})$$

für  $\alpha \equiv \top$  gilt.

**Korollar 4.64.** Das Contension-Sum Maß hat die Eigenschaft Tautology Independence.

Somit gibt es mit B-atom-free Formula Independence und Safe-formula Independence geeignete atombasierte Varianten zur Eigenschaft Free-formula Independence.

#### 4.6.5. Irrelevanz of Syntax

Das Contension-Sum Maß erfüllt nicht die Eigenschaft Irrelevanz of Syntax nach Definition 4.19 wie mit Proposition 4.41 festgestellt wurde. Der Eigenschaft Irrelevanz of Syntax nach Definition 4.19 liegt die klassische Aussagenlogik  $\mathbf{L}_C$  zugrunde, während das Contension-Sum Maß auf der 3-wertigen Logik  $\mathbf{L}_3$  basiert. Wir zeigen, dass das Contension-Sum Maß die Eigenschaft Irrelevanz of Syntax erfüllt, wenn sich die Definition auf  $\mathbf{L}_3$  bezieht.

**Definition 4.65 (3-wertige bijektive Äquivalenz).** Zwei Formelmengen  $\Phi, \Psi$  sind 3-wertig bijektiv äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: \Phi \rightarrow \Psi$  gibt, so dass gilt:

$$\varphi \equiv_3 f(\varphi)$$

für alle  $\varphi \in \Phi$ . Symbolisch schreiben wir dies  $\Phi \equiv_{3b} \Psi$ .

**Definition 4.66 (3-valued Irrelevanz of Syntax).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  erfüllt die Eigenschaft 3-valued Irrelevanz of Syntax, falls gilt

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}(\mathcal{K}')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K} \equiv_{3b} \mathcal{K}'$ .

**Proposition 4.67.** Das Contension-Sum Maß erfüllt die Eigenschaft 3-valued Irrelevanz of Syntax.

*Beweis.* Für zwei Wissensbasen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  gelte  $\mathcal{K} \equiv_{3b} \mathcal{K}'$ . Mit  $\mathcal{K} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ergibt sich  $\mathcal{K}' = \{\varphi'_{\sigma(1)}, \dots, \varphi'_{\sigma(n)}\}$  mit  $\varphi'_{\sigma(i)} \equiv_3 \varphi_i$ . Aufgrund Definition 2.2 folgt für ein  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K})$ , dass  $v \in \text{Mod}_3(\varphi_i) = \text{Mod}_3(\varphi'_{\sigma(i)})$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt. Damit ist auch  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K}')$ . Das heißt, die Menge aller Modelle ist bei beiden Formelmengen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  gleich. Damit muss ebenso die Menge der minimalen Modelle identisch sein. Somit folgt  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}')$  und es gilt die Behauptung.  $\square$

#### 4.6.6. Eigenschaft Exchange

Die Eigenschaft *Exchange* ist mit Definition 4.20 ebenfalls eine Eigenschaft, der die klassische Aussagenlogik  $\mathbf{L}_C$  zugrunde liegt. Wir zeigen, dass das Contension-Sum Maß die Eigenschaft Exchange erfüllt, wenn sich die Definition auf  $\mathbf{L}_3$  bezieht.

**Definition 4.68 (3-valued Exchange).** Ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  erfüllt die Eigenschaft 3-valued Exchange, falls gilt

$$\mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \mathcal{I}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'')$$

für alle  $\mathcal{K}, \mathcal{K}', \mathcal{K}'' \in \mathbb{K}$  mit  $\mathcal{K}' \equiv_3 \mathcal{K}''$ .

**Proposition 4.69.** Das Contension-Sum Maß erfüllt die Eigenschaft 3-valued Exchange.

*Beweis.* Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{K}', \mathcal{K}'' \in \mathbb{K}$  und es gelte  $\mathcal{K}' \equiv_3 \mathcal{K}''$ . Da Wissensbasen Formelmengen sind, folgt mit Definition 2.2 für ein  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}')$ , dass  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K})$  und  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K}')$  gilt. Das heißt, es ist  $v \in (\text{Mod}_3(\mathcal{K}) \cap \text{Mod}_3(\mathcal{K}'))$ . Aufgrund  $\mathcal{K}' \equiv_3 \mathcal{K}''$  ist  $\text{Mod}_3(\mathcal{K}') = \text{Mod}_3(\mathcal{K}'')$ . Folglich gilt

$$(\text{Mod}_3(\mathcal{K}) \cap \text{Mod}_3(\mathcal{K}')) = (\text{Mod}_3(\mathcal{K}) \cap \text{Mod}_3(\mathcal{K}''))$$

und somit  $v \in (\text{Mod}_3(\mathcal{K}) \cap \text{Mod}_3(\mathcal{K}''))$ . Mit Definition 2.2 folgt  $v \in \text{Mod}_3(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'')$ . Die Menge aller Modelle ist also bei den beiden Formelmengen  $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$  und  $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}''$  gleich. Damit muss auch die Menge der minimalen Modelle identisch sein. Somit folgt  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'')$  und es gilt die Behauptung.  $\square$

Wie wir sehen, ist die Einschränkung  $\mathcal{K}' \not\equiv \perp$  für die Eigenschaft 3-valued Exchange nicht notwendig.

#### 4.6.7. Zusammenfassung

Wir können festhalten, dass das Contension-Sum Maß über weitere atombasierte Eigenschaften verfügt. Es erfüllt die Eigenschaften Atomic-Additivity, B-atom-free Formula Independence, 3-valued Irrelevanz of Syntax und 3-valued Exchange. Zudem verhält es sich wie ein klassisches mathematisches Maß für atom-disjunkte Wissensbasen. Für nicht disjunkte Wissensbasen ist das Contension-Sum Maß nicht additiv. Es ist somit kein klassisches Maß, sondern ein Pseudo-Maß als Hilfsmittel zur Beurteilung von Inkonsistenzen in Wissensbasen.

## 5. Ausdrucksstärke

Unter *Ausdrucksstärke* verstehen wir die Fähigkeit eines Inkonsistenzmaßes, möglichst viele verschiedene inkonsistente Wissensbasen zu unterscheiden. Je größer eine Wissensbasis ist, desto mehr unterschiedliche Inkonsistenzwerte sollte ein Inkonsistenzmaß ausweisen können. Wir folgen damit den Vorstellungen von Thimm [Thi16, Thi18]. Die Voraussetzungen und Definitionen [Thi16], die wir für die Analyse und Bewertung der Ausdrucksstärke unseres Ansatzes zur Inkonsistenzmessung benötigen, sind im nächsten Kapitel zusammengestellt. Im darauf folgenden Kapitel 5.2 führen wir unsere Untersuchung durch. Die Ergebnisse werden im Kapitel 5.3 ausgewertet und beurteilt.

### 5.1. Grundlagen

Es sei  $\mathcal{L}(A)$  die Menge aller aussagenlogischen Formeln der aussagenlogischen Sprache  $\mathcal{L}$  über eine Menge  $A$  von Aussagenvariablen. Mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen. Das heißt  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

**Definition 5.1 (Länge einer Formel).** Seien  $\varphi, \varphi', \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(A)$ . Wir definieren die Länge einer Formel  $\varphi$  rekursiv mit

$$\text{len}(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi \in A \\ 1 + \text{len}(\varphi'), & \text{wenn } \varphi = \neg\varphi' \\ 1 + \text{len}(\varphi_1) + \text{len}(\varphi_2), & \text{wenn } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ 1 + \text{len}(\varphi_1) + \text{len}(\varphi_2), & \text{wenn } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2. \end{cases}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \text{len}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) &:= \text{len}(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \text{ und} \\ \text{len}(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) &:= \text{len}((\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)). \end{aligned}$$

Das heißt, die Länge einer Formel ergibt sich aus der Anzahl an Atomen plus der Anzahl der aussagenlogischen Junktoren  $\neg, \wedge$  und  $\vee$ . Die Formel  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$  hat somit eine Länge von  $2 + \text{len}(\varphi_1) + \text{len}(\varphi_2)$ . Für die Formel  $\text{len}(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$  folgt eine Länge von  $5 + 2(\text{len}(\varphi_1) + \text{len}(\varphi_2))$ .

**Definition 5.2 (Größencharakteristiken für Wissensbasen).** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren die Menge aller Wissensbasen mit maximal  $n$  verschiedenen Atomen mit

$$\mathbb{K}^v(n) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid |\text{At}(\mathcal{K})| \leq n\}.$$

Die Menge aller Wissensbasen, bestehend aus maximal  $n$  Formeln, ist

$$\mathbb{K}^f(n) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid |\mathcal{K}| \leq n\}.$$

Die Menge aller Wissensbasen, deren Formeln maximal die Länge  $n$  haben, ist

$$\mathbb{K}^l(n) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid \forall \varphi \in \mathcal{K}: \text{len}(\varphi) \leq n\}.$$

Die Menge aller Wissensbasen, deren Formeln maximal aus  $n$  verschiedenen Atomen aufgebaut sind, definieren wir mit

$$\mathbb{K}^p(n) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid \forall \varphi \in \mathcal{K}: |\text{At}(\varphi)| \leq n\}.$$

Mit der obigen Definition nutzen wir vier verschiedene Eigenschaften um Wissensbasen hinsichtlich ihrer Größe zu klassifizieren. Ein Maß für die Ausdrucksstärke eines Inkonsistenzmaßes ist die Anzahl an unterschiedlichen Werten, die es für jede der vier Klassen von Wissensbasen annehmen kann.

**Definition 5.3 ( $\alpha$ -Charakteristik).** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in \{v, f, l, p\}$ . Die  $\alpha$ -Charakteristik  $\mathcal{C}^\alpha$  eines Inkonsistenzmaßes  $\mathcal{I}$  ist definiert durch

$$\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}, n) = |\{\mathcal{I}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathbb{K}^\alpha(n)\}|.$$

## 5.2. Analyse

In diesem Kapitel zeigen wir die  $\alpha$ -Charakteristiken, also die Ausdrucksstärke des Contension-Sum Maßes für die mit Definition 5.2 eingeführten vier verschiedenen Klassen von Wissensbasen.

Betrachten wir zuerst die Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$ . Hier bezeichnet  $n$  die maximale Anzahl der Atome, die in einer Wissensbasis dieser Klasse enthalten sein kann. Das Contension-Sum Maß berechnet die Inkonsistenz einer Wissensbasis  $\mathcal{K}$  als Summe über die Anzahl von Atomen jeweils aller minimalen Konfliktbasen von  $\mathcal{K}$ . Da nur die Anzahl der minimalen Konfliktbasen und die Anzahl der jeweils in den minimalen Konfliktbasen enthaltenen Atome zur Ermittlung der Inkonsistenz einer Wissensbasis berücksichtigt werden, können wir die Wissensbasen zur Ermittlung von  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$  entsprechend klassifizieren.

**Definition 5.4.** Die Menge der minimalen Konfliktbasen einer Wissensbasis  $\mathcal{K}$  ist definiert durch

$$\text{Cb}^m(\mathcal{K}) = \{\text{Conflictbase}(v) \mid v \in \text{Mod}_3^m(\mathcal{K})\}.$$

Die Menge der minimalen Konfliktbasen einer Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$  ist gegeben mit

$$\text{Cb}^m(\mathbb{K}^v(n)) = \{\text{Cb}^m(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)\}.$$

Für eine Menge  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$  einer Wissensbasis  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$  erstellen wir nun ein Profil in der Art, wie es zum Beispiel von Thimm [Thi16] für minimal inkonsistente Mengen, von Stephen und Yusun [SY14] für monotone boolesche Funktionen und von Engel [Eng97, Seite 7] für teilweise geordnete Mengen mit Rangfolge eingeführt wurde.

**Definition 5.5 (Konfliktprofil einer Wissensbasis).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann definieren wir das Profil von  $\mathcal{K}$  durch

$$\text{profil}(\mathcal{K}) = (|C^{(1)}(\mathcal{K})|, \dots, |C^{(n)}(\mathcal{K})|) \in \mathbb{N}^n$$

mit

$$C^{(i)}(\mathcal{K}) = \{C \in \text{Cb}^m(\mathcal{K}) \mid |C| = i\}$$

und bezeichnen es als Konfliktprofil.

Mit Definition 5.5 können wir die Berechnungsformel für das Contension-Sum Maß so formulieren, dass seine Beziehung zum Konfliktprofil deutlich wird.

**Proposition 5.6 (Contension-Sum profilbezogen).** Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist das Contension-Sum Maß  $\mathcal{I}_{cS}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$  profilbezogen gegeben durch

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^n i \cdot \text{profil}(\mathcal{K})_i = \sum_{i=1}^n |C^{(i)}(\mathcal{K})| \cdot i. \quad (2)$$

*Beweis.* Mit Definition 5.4 und Definition 5.5 folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) &= \sum_{v \in \text{Mod}_3^m(\Phi)} |\text{Conflictbase}(v)| \\
&= \sum_{C \in \text{Cb}^m(\mathcal{K})} |C| \\
&= \sum_{i=1}^n |C^{(i)}(\mathcal{K})| \cdot i = \sum_{i=1}^n i \cdot \text{profil}(\mathcal{K})_i.
\end{aligned}$$

□

Mit Gleichung (2) folgt, dass das Contension-Sum Maß nur vom Konfliktprofil einer Wissensbasis und nicht von der Struktur der einzelnen minimalen Modelle abhängt. Das folgende Beispiel zeigt die Berechnung der Konfliktprofile und der Contension-Sum Maße mit Gleichung (2) für zwei verschiedene Wissensbasen.

**Beispiel 5.7.** Sei  $A = \{a, b, c\}$  eine Menge von Aussagenvariablen. Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}^v(3)$  mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &:= \{(a \wedge \neg a \wedge c \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg c)\} \text{ und} \\
\mathcal{K}' &:= \{(a \wedge \neg a \wedge b \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg c)\}.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich  $\text{Cb}^m(\mathcal{K}) = \{\{a, c\}, \{b, c\}\}$  und  $\text{Cb}^m(\mathcal{K}') = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ . Somit gilt  $\text{profil}(\mathcal{K}) = (0, 2, 0) = \text{profil}(\mathcal{K}')$  und  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}') = 0 + 2 \cdot 2 + 0 = 4$ .

Die Bestimmung von  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$  ist somit verbunden mit der Frage, wie viele Konfliktprofile es in der Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$  geben kann. Um dies zu beantworten, nutzen wir die Kenntnis, dass es eine eins-zu-eins Zuordnung zwischen Sperner Familien über Mengen mit der Mächtigkeit  $n$  und monotonen booleschen Funktionen mit  $n$  Variablen gibt [Thi16, SY14]. Wir werden zeigen, dass die Anzahl der Konfliktprofile in der Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$  genau der Anzahl der Profile von monotonen booleschen Funktionen mit  $n$  Variablen entspricht.

**Definition 5.8 (Sperner Familie [Thi16]).** Sei  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$  eine Menge von Teilmengen einer Menge  $M \neq \emptyset$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Falls  $S \not\subseteq S'$  für alle  $S, S' \in \mathcal{S}$  mit  $S \neq S'$  gilt, bezeichnen wir  $\mathcal{S}$  als Sperner Familie über  $M$ .

Zur Theorie der Sperner Familien, deren Grundstein unter anderem das Theorem von Sperner [Spe28] ist, gibt es auch eine Vielzahl an Literatur und viele Anwendungen in unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik [Eng97].

**Definition 5.9 (Monotone boolesche Funktion [SY14]).** Eine boolesche Funktion mit  $n$  Variablen ist eine Funktion

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Wenn aus  $x \leq y$  mit  $x, y \in \{0, 1\}^n$  folgt, dass  $f(x) \leq f(y)$  gilt, dann heißt  $f$  monoton. Es ist  $x \leq y$ , wenn  $x_i \leq y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Es gilt  $x < y$ , wenn  $x \leq y$  und  $x_i < y_i$  für ein  $i$ . Die Menge aller booleschen Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}(n)$  und die Menge aller monotonen booleschen Funktionen mit  $\mathcal{M}_B(n)$ .

Mit Definition 5.9 folgt, dass es insgesamt  $|\mathcal{B}(n)| = 2^{2^n}$  boolesche Funktionen mit  $n$  Variablen gibt und  $\mathcal{M}_B(n)$  offensichtlich eine Teilmenge von  $\mathcal{B}(n)$  ist. Monotone boolesche Funktionen haben ein paar besondere Eigenschaften, die wir für unsere Zwecke benötigen. Bevor wir diese jedoch angeben können, brauchen wir noch die folgenden Definitionen.

**Definition 5.10.** Wir bezeichnen eine DNF als vollständige DNF, wenn kein Monom in einem der anderen Monome enthalten ist und jede Variable in einem Monom nur einmal vorkommt. Die Monome einer vollständigen DNF heißen Primimplikanten.

**Definition 5.11 (PrimDNF).** Sei  $f \in \mathcal{B}(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Sei zudem  $\varphi = \bigvee_{i \in I} \phi_i$  eine vollständige DNF von  $f$ . Dann bezeichnen wir  $\varphi$  mit PrimDNF von  $f$ , wenn es kein  $j \in I$  gibt, so dass  $\bigvee_{i \in I \setminus \{j\}} \phi_i$  die Funktion  $f$  repräsentiert. (Vergleiche [CH11, Definitionen 1.19 und 1.20]).

**Lemma 5.12.** Sei  $f \in \mathcal{M}_B(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

- (i) Eine DNF Repräsentation von  $f$  enthält kein negiertes Atom. Vergleiche [CH11, Theorem 1.21].
- (ii) Lässt man die Reihenfolge der Primimplikanten außer Acht, dann ist eine vollständige DNF von  $f$  eindeutig. Sie ist die einzige PrimDNF. Vergleiche [CH11, Theorem 1.23].

Wir verzichten hier auf den Beweis von Lemma 5.12 und verweisen stattdessen auf [CH11, Chapter 1.10 Monotone Boolean functions].

Sei nun  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine Menge von Aussagenvariablen und sei  $\mathcal{P}(A)$  die Potenzmenge von  $A$ . Wir definieren die Potenzmenge der Potenzmenge von  $A$  mit  $\mathcal{P}_2(A)$ . Somit gilt  $|\mathcal{P}_2(A)| = 2^{|\mathcal{P}(A)|} = 2^{2^n}$ . Das heißt,  $\mathcal{B}(n)$  und  $\mathcal{P}_2(A)$  sind gleichmächtig. Somit gibt es eine bijektive Abbildung von  $\mathcal{B}(n)$  nach  $\mathcal{P}_2(A)$ .

Konzentrieren wir uns nun auf die monotonen booleschen Funktionen. Mit Lemma 5.12 folgt, dass jedes  $f \in \mathcal{M}_B(n)$  durch genau eine PrimDNF  $\varphi_{pr} \in \mathcal{L}(A)$  repräsentiert werden kann und  $\varphi_{pr}$  kein negiertes Atom enthält. Sei  $p_k$  die Menge, welche jeweils die Aussagenvariablen des  $k$ -ten Primimplikanten von  $\varphi_{pr}$  enthält und sei  $P(f) = P(\varphi_{pr}) = \{p_k\}$ . Es ist  $P(f) \in \mathcal{P}_2(A)$ . Zudem folgt mit Definition 5.10, dass  $p \not\subseteq p'$  mit  $p \neq p'$  für alle  $p, p' \in P(f)$  gilt. Das heißt,  $P(f)$  bildet eine Sperner Familie über  $A$ .

Sei umgekehrt  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\} \in \mathcal{P}_2(A)$  eine Sperner Familie über  $A$  mit  $m \in \mathbb{N}$ . Mit den in  $\mathcal{S}$  enthaltenen Aussagenvariablen können wir eine DNF

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^m \left( \bigwedge_{a \in S_i} a \right)$$

formulieren. Dann folgt mit Definition 5.8 für Sperner Familien und mit Definition 5.10, dass  $\varphi$  eine vollständige DNF ist. Da  $\varphi$  kein negiertes Atom enthält, repräsentiert  $\varphi$  eine monotone boolesche Funktion  $f \in \mathcal{M}_B(n)$ . Mit Lemma 5.12 ist  $\varphi$  eine PrimDNF von  $f$ .

Sei  $\mathcal{S}_A(n) = \{\mathcal{S}\}_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}_2(A)}$  die Menge aller Sperner Familien über  $A$  mit  $|A| = n$ . Es gilt  $|\mathcal{M}_B(n)| = |\mathcal{S}_A(n)| =: D(n)$ . Die Zahl  $D(n)$ , also die Mächtigkeit der beiden genannten Mengen, wird auch *Dedekind Zahl* genannt. Es ist keine geschlossene Form bekannt, um sie zu berechnen [Thi16]. Bisher konnten nur Werte bis  $n = 9$  ermittelt werden, vergleiche [SSM23]. Fassen wir zusammen: Es gibt eine bijektive Abbildung  $f_{\mathcal{S}}: \mathcal{M}_B(n) \rightarrow \mathcal{S}_A(n)$ ,

$$f_{\varphi_{pr}}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{k=1}^m \left( \bigwedge_{i \in I_k} x_i \right) \mapsto \left\{ \{x_i \mid i \in I_k\}_{k \in \{1, \dots, m\}} \right\}, \quad (3)$$

die jeder monotonen booleschen Funktion  $f$  die Sperner Familie zuordnet, in der die Struktur der PrimDNF von  $f$  erhalten bleibt.

Stephen und Yusun [SY14] haben für monotone boolesche Funktionen ein *Profil* zur Klassifizierung dieser Funktionen definiert, das die Anzahl der Primimplikanten und die Anzahl der in ihnen enthaltenen Atome berücksichtigt.

**Definition 5.13 (Profil monotone boolesche Funktion [SY14]).** Sei  $f \in \mathcal{M}_B(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Sei weiterhin  $P(f)$  die Menge der Primimplikanten von  $f$ . Dann definieren wir das Profil von  $f$  durch

$$\text{profil}(f) = (|p^{(1)}(f)|, \dots, |p^{(n)}(f)|) \in \mathbb{N}^n$$

mit

$$p^{(i)}(f) = \{p \in P(f) \mid |\text{At}(p)| = i\}.$$

**Definition 5.14 (Profil Sperner Familie).** Sei  $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_A(n)$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Dann definieren wir das Profil von  $\mathcal{S}$  durch

$$\text{profil}(\mathcal{S}) = (|S^{(1)}(\mathcal{S})|, \dots, |S^{(n)}(\mathcal{S})|) \in \mathbb{N}^n$$

mit

$$S^{(i)}(\mathcal{S}) = \{S \in \mathcal{S} \mid |S| = i\}.$$

**Proposition 5.15.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Profile für monotone boolesche Funktionen mit  $n$  Variablen und die Profile für Sperner Familien über eine Menge mit der Mächtigkeit  $n$  sind gleich. Somit auch deren Anzahl.

*Beweis.* Die Abbildung  $f_{\mathcal{S}}$ , Definition 5.13 und Definition 5.14 zeigen, dass das Profil einer monotonen booleschen Funktion mit dem Profil der zugehörigen Sperner Familie übereinstimmt. Vergleiche auch [Slo12, SK11].  $\square$

**Definition 5.16.** Sei  $\Psi(n)$  die Anzahl der Profile für monotone boolesche Funktionen mit  $n \in \mathbb{N}$  Variablen. [Thi16, SY14].

Wie bei der Dedekind Zahl, ist keine geschlossene Form bekannt um  $\Psi(n)$  zu berechnen [Thi16]. Bisher konnten nur Werte bis  $n = 16$  ermittelt werden [Slo12]. Um nun zu beweisen, dass die Anzahl der Konfliktprofile in der Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$  genau  $\Psi(n)$  entspricht, müssen wir mit Lemma 5.15 nur zeigen, dass die Menge der minimalen Konfliktbasen  $\text{Cb}^m(\mathbb{K}^v(n))$  identisch ist mit der Menge von Sperner Familien  $\mathcal{S}_A(n)$  mit  $A = \text{At}(\mathbb{K}^v(n))$ .

**Lemma 5.17.** *Die Menge der minimalen Konfliktbasen einer Wissensbasis  $\mathcal{K}$  bildet eine Sperner Familie über die Menge der in  $\mathcal{K}$  vorkommenden Atome, also über  $\text{At}(\mathcal{K})$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K}$  eine inkonsistente Wissensbasis. Angenommen es gibt  $C, C' \in \text{Cb}^m(\mathcal{K})$  mit  $C \neq C'$  und  $C \subseteq C'$ . Dann kann  $C'$  mit Definition 3.1 nicht die Konfliktbasis eines minimalen Modells und somit nicht in  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$  enthalten sein. Dies ist ein Widerspruch, also gilt die Behauptung.  $\square$

Das heißt, für jedes  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$  gibt es mit der zugehörigen Menge der minimalen Konfliktbasen eine Sperner Familie. Umgekehrt zeigen wir noch, dass jede mögliche Sperner Familie durch eine Menge der minimalen Konfliktbasen einer Wissensbasis der Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$  repräsentiert werden kann.

**Lemma 5.18.** *Sei  $A$  eine Menge von Aussagenvariablen. Dann repräsentiert jede Sperner Familie über  $A$  eine Menge der minimalen Konfliktbasen einer Wissensbasis  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$  mit  $n = |A|$ .*

*Beweis.* Seien  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Sei  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine Menge von Aussagenvariablen und sei  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  eine Sperner Familie über  $A$ . Sei weiterhin  $\mathcal{K} = \{\varphi\}$  eine Wissensbasis mit

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{i=1}^m \left( \bigwedge_{a_j \in S_i} \tilde{a}_j \right) \quad \text{mit } \tilde{a}_j = a_j \wedge \neg a_j.$$

Dann gilt  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$ . Die Formel  $\varphi$  ist in disjunktiver Normalform. Das heißt, sie wird erfüllt, wenn eines der Monome erfüllt ist. Sei nun  $v$  eine 3-wertige Interpretation, so dass für genau ein  $S \in \mathcal{S}$  gilt:  $v(a) = \text{B}$  für alle  $a \in S$ . Dann folgt  $v(\varphi) = \text{B}$  und somit  $v \models_3 \mathcal{K}$ . Es gilt  $\text{Conflictbase}(v) = S$  und mit der Definition für eine Sperner Familie folgt, dass das Modell  $v$  minimal ist. Das heißt, zu jeder Sperner Familie  $\mathcal{S}$  über  $A$  gibt es eine Wissensbasis  $\mathcal{K}$  in der Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$ , so dass  $\mathcal{S} = \text{Cb}^m(\mathcal{K})$  gilt.  $\square$

**Beispiel 5.19.** *Sei  $A = \{a, b\}$  eine Menge von Aussagenvariablen. Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathbb{K}^v(2)$  mit  $\mathcal{K} := \{a, \neg a, b \wedge \neg b\}$  und  $\mathcal{K}' := \{(a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg b)\}$ .*

*Somit gilt  $\text{Cb}^m(\mathcal{K}) = \{\{a, b\}\}$  und  $\text{Cb}^m(\mathcal{K}') = \{\{a\}, \{b\}\}$ . Es ergibt sich damit  $\text{profil}(\mathcal{K}) = (0, 1, 0) \neq \text{profil}(\mathcal{K}') = (2, 0, 0)$ . Allerdings ist  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2 = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}') = 1 \cdot 2 + 0 + 0$ .*

Funktion (2) zur Berechnung von  $\mathcal{I}_{cS}$  ist damit nicht injektiv und  $\Psi(n)$  ist deshalb nur eine obere Schranke.

**Proposition 5.20.** *Es gilt  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n) \leq \Psi(n)$  für jede natürliche Zahl  $n > 0$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^v(n)$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und sei  $A = \text{At}(\mathbb{K}^v(n))$ . Somit gilt  $|A| = n$ . Die Funktionsgleichung (2) zeigt, dass  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K})$  nur vom Konfliktprofil von  $\mathcal{K}$  abhängt. Mit Lemma 5.17 und Lemma 5.18 folgt, dass die Menge der minimalen Konfliktbasen  $\text{Cb}^m(\mathbb{K}^v(n))$  und die Menge der Sperner Familien  $\mathcal{S}_A(n)$  identisch sind. Somit sind die Konfliktprofile auf  $\text{Cb}^m(\mathbb{K}^v(n))$  und die Profile auf der Menge der Sperner Familien  $\mathcal{S}_A(n)$  gleich. Mit Proposition 5.15 und Definition 5.16 ist die Anzahl  $\Psi(n)$ . Wie wir anhand des Beispiels 5.19 sehen können, gibt es unterschiedliche Profile, die den gleichen Wert für  $\mathcal{I}_{cS}$  liefern. Somit ist  $\Psi(n)$  nur eine obere Schranke.  $\square$

In der Tabelle 6 sind die Werte von  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$  für  $n = 1, \dots, 5$  zusammengestellt. Die Berechnung haben wir anhand der Profile für monotone boolesche Funktionen durchgeführt. Für  $n = 5$  sind sie [SY14, Table 6] entnommen. Für  $n = 1$  bis  $n = 3$  wurden die Profile auf Grundlage des Beispiels von Wiseman [SYM23, Example] für nicht-isomorphe Antiketten erstellt. Die Profile für  $n = 4$  wurden aus den Profilen für  $n = 5$  abgeleitet. Die Berechnung ist in Anlage A dokumentiert.

$n$	$\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$	$\Psi(n)$
1	2	2
2	3	4
3	6	9
4	12	25
5	27	95

Tabelle 6: Werte von  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$  und  $\Psi(n)$  für  $n = 1, \dots, 5$

Als nächstes untersuchen wir die  $\alpha$ -Charakteristik für die Klassen  $\mathbb{K}^f(n)$ ,  $\mathbb{K}^l(n)$  und  $\mathbb{K}^p(n)$ . Dabei orientieren wir uns an den Ausführungen und Beweisen von Thimm [Thi16].

**Proposition 5.21.** *Es gilt  $\mathcal{C}^f(\mathcal{I}_{cS}, n) = \infty$  für jede natürliche Zahl  $n > 0$ .*

*Beweis.* Sei  $A = \{a_1, \dots, a_i\}$  eine Menge von Aussagenvariablen. Sei weiterhin  $(\mathcal{K}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Wissensbasen mit

$$\mathcal{K}_i = \{a_1 \wedge \dots \wedge a_i \wedge \neg a_1 \wedge \dots \wedge \neg a_i\}.$$

Dann besteht jedes  $\mathcal{K}_i$  nur aus einer Formel, also  $\mathcal{K}_i \in \mathbb{K}^f(1)$ . Es folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_i) = |\{a_1, \dots, a_i\}| = i.$$

Damit gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} |\{a_1, \dots, a_i\}| = \infty$$

mit  $|\mathcal{K}_i| = 1$ . Es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 5.22.** *Es gilt  $\mathcal{C}^l(\mathcal{I}_{cS}, n) = \infty$  für jede natürliche Zahl  $n > 1$ .*

*Beweis.* Falls  $n \leq 1$  ist, besteht jede Wissensbasis entweder aus der leeren Menge oder enthält Atome als Formeln. Das heißt, jede Wissensbasis  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^l(1)$  ist konsistent und somit für die Bewertung der Ausdrucksstärke des Contension-Sum Maßes nicht relevant. Wir betrachten deshalb die Fälle mit  $n > 1$ . Sei  $A = \{a_1, \dots, a_i\}$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $(\mathcal{K}_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$  eine Familie von Wissensbasen mit

$$\mathcal{K}_i = \{a_1, \dots, a_i, \neg a_1, \dots, \neg a_i\}.$$

Dann besteht jedes  $\mathcal{K}_i$  nur aus Formeln, die maximal eine Länge von 2 haben, also  $\mathcal{K}_i \in \mathbb{K}^l(2)$ . Es folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_i) = \sum_1^i |\{a_i\}| = i$$

und damit gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_1^i |\{a_i\}| = \infty.$$

Somit folgt die Behauptung. □

**Proposition 5.23.** *Es gilt  $\mathcal{C}^p(\mathcal{I}_{cS}, n) = \infty$  für jede natürliche Zahl  $n > 0$ .*

*Beweis.* Sei  $A = \{a_1, \dots, a_i\}$  eine Menge von Aussagenvariablen und  $(\mathcal{K}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Wissensbasen mit

$$\mathcal{K}_i = \{a_1, \dots, a_i, \neg a_1, \dots, \neg a_i\}.$$

Dann enthält jedes  $\mathcal{K}_i$  nur Formeln mit jeweils einem Atom, also  $\mathcal{K}_i \in \mathbb{K}^p(1)$ . Es folgt

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_i) = \sum_1^i |\{a_i\}| = i$$

und damit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_1^i |\{a_i\}| = \infty.$$

Folglich gilt die Behauptung. □

**Theorem 5.24 (Ausdrucksstärke Contension-Sum).** *Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Das Contension-Sum Maß hat die folgenden  $\alpha$ -Charakteristiken.*

$$\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n) \leq \Psi(n) \text{ mit } n > 0$$

$$\mathcal{C}^f(\mathcal{I}_{cS}, n) = \infty \text{ mit } n > 0$$

$$\mathcal{C}^l(\mathcal{I}_{cS}, n) = \infty \text{ mit } n > 1$$

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{I}_{cS}, n) = \infty \text{ mit } n > 0$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt mit Proposition 5.20, Proposition 5.21, Proposition 5.22 und Proposition 5.23. □

### 5.3. Auswertung und Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen

Thimm [Thi18, Thi16] hat eine breite Auswahl von insgesamt 23 unterschiedlichen Inkonsistenzmaßen hinsichtlich der Ausdrucksstärke untersucht. Wir zeigen, wie gut das Contension-Sum Maß im Vergleich mit diesen Maßen abschneidet. Dazu ordnen wir es qualitativ in eine absteigende Reihe von hoher Ausdrucksstärke bis geringe Ausdrucksstärke ein. Die Bezeichnungen für die Inkonsistenzmaße übernehmen wir von Thimm [Thi18]. Die Definitionen wiederholen wir allerdings nicht erneut sondern verweisen auf [Thi18, Figure 1].

Um die verschiedenen Inkonsistenzmaße hinsichtlich der Ausdrucksstärke vergleichen zu können, führen wir eine Ordnung auf Grundlage der  $\alpha$ -Charakteristiken ein.

**Definition 5.25 ([Thi16]).** Seien  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  Inkonsistenzmaße und  $n_0, n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\succsim_\alpha$  eine Ordnung auf den Inkonsistenzmaßen mit  $\alpha \in \{v, f, l, p\}$ , die wie folgt definiert ist.

- (i)  $\mathcal{I} \succsim_\alpha \mathcal{I}'$ , falls es ein  $n_0$  gibt, so dass für alle  $n > n_0$  gilt  $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}, n) \geq \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}', n)$ . Das heißt,  $\mathcal{I}$  ist mindestens so ausdrucksstark wie  $\mathcal{I}'$ .
- (ii) Falls  $\mathcal{I} \succsim_\alpha \mathcal{I}'$  und  $\mathcal{I}' \succsim_\alpha \mathcal{I}$  gilt, dann sind  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  gleich ausdrucksstark und wir schreiben  $\mathcal{I} \sim_\alpha \mathcal{I}'$ .
- (iii) Falls  $\mathcal{I} \succsim_\alpha \mathcal{I}'$  und  $\mathcal{I} \not\sim_\alpha \mathcal{I}'$  gilt, dann ist  $\mathcal{I}$  ausdrucksstärker als  $\mathcal{I}'$ .

Zur besseren Übersichtlichkeit ordnen wir ein Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}$  der Klasse  $\mathcal{I}_{\sim_\alpha}^\infty$  zu, wenn  $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}, n) = \infty$  für alle  $n \geq n_0$  ist. Grundlage für unsere Klassifizierung sind die von Thimm [Thi18, Table 4] zusammengestellten Charakteristiken für 22 Inkonsistenzmaße. Damit ergeben sich die nachstehenden Klassen.

$$\mathcal{I}_{\sim_v}^\infty = \{\mathcal{I}_{MI}, \mathcal{I}_{MIC}, \mathcal{I}_{mc}, \mathcal{I}_p, \mathcal{I}_{dalal}^\Sigma, \mathcal{I}_{dalal}^{hit}, \mathcal{I}_{Df}, \mathcal{I}_{P_m}, \mathcal{I}_{nc}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz}, \mathcal{I}_{t_{min}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{mcsc}, \mathcal{I}_{forget}, \mathcal{I}_{CC}, \mathcal{I}_{is}\}$$

mit  $n_0 = 1$ .

$$\mathcal{I}_{\sim_f}^\infty = \{\mathcal{I}_c, \mathcal{I}_{dalal}^\Sigma, \mathcal{I}_{dalal}^{max}, \mathcal{I}_{P_m}, \mathcal{I}_{mv}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{forget}\}$$

mit  $n_0 = 2$  für  $\mathcal{I} \in \{\mathcal{I}_{dalal}^\Sigma, \mathcal{I}_{dalal}^{max}, \mathcal{I}_{mv}\}$  und  $n_0 = 1$  sonst.

$$\mathcal{I}_{\sim_l}^\infty = \{\mathcal{I}_{MI}, \mathcal{I}_{MIC}, \mathcal{I}_\eta, \mathcal{I}_c, \mathcal{I}_{mc}, \mathcal{I}_p, \mathcal{I}_{hs}, \mathcal{I}_{dalal}^\Sigma, \mathcal{I}_{dalal}^{hit}, \mathcal{I}_{Df}, \mathcal{I}_{P_m}, \mathcal{I}_{mv}, \mathcal{I}_{nc}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz}, \mathcal{I}_{t_{min}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{mcsc}, \mathcal{I}_{forget}, \mathcal{I}_{CC}, \mathcal{I}_{is}\}$$

mit  $n_0 = 4$  für  $\mathcal{I}_\eta$  und  $\mathcal{I}_{hs}$ , sowie  $n_0 = 2$  sonst.

$$\mathcal{I}_{\sim_p}^\infty = \{\mathcal{I}_{MI}, \mathcal{I}_{MIC}, \mathcal{I}_\eta, \mathcal{I}_c, \mathcal{I}_{mc}, \mathcal{I}_p, \mathcal{I}_{hs}, \mathcal{I}_{dalal}^\Sigma, \mathcal{I}_{dalal}^{hit}, \mathcal{I}_{Df}, \mathcal{I}_{P_m}, \mathcal{I}_{mv}, \mathcal{I}_{nc}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz}, \mathcal{I}_{t_{min}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{t_{prod}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{mcsc}, \mathcal{I}_{forget}, \mathcal{I}_{CC}, \mathcal{I}_{is}\}$$

mit  $n_0 = 2$  für  $\mathcal{I}_\eta$  und  $\mathcal{I}_{hs}$ , sowie  $n_0 = 1$  sonst. Ergänzend bilden wir die Klassen

$$\mathcal{I}_{\sim_v}^{(n+1)} = \{\mathcal{I}_c, \mathcal{I}_{mv}\} \text{ und } \mathcal{I}_{\sim_f}^{(n+1)} = \{\mathcal{I}_p, \mathcal{I}_{hs}, \mathcal{I}_{dalal}^{hit}, \mathcal{I}_{nc}, \mathcal{I}_{t_{min}}^{fuz, \Sigma}, \mathcal{I}_{mcsc}, \mathcal{I}_{CC}\}$$

für die  $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}, n) = n + 1$  für alle  $n \geq 1$  gilt. Tabelle 7 liefert eine Zusammenstellung der  $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}, n)$ -Werte. Sie sind, bis auf die Werte für das Contension-Sum Maß, aus [Thi18, Table 4] übernommen. Für das Contension-Sum Maß resultieren die Werte aus Theorem 5.24.

$i$	$\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{I}, n)$ für $n \geq 1$	$\alpha$			
		$v$	$f$	$l^*$	$p$
1	$\infty$	$\mathcal{I}_{\sim_v}^\infty$	$\mathcal{I}_{\sim_f}^\infty \cup \{\mathcal{I}_{cS}\}$	$\mathcal{I}_{\sim_l}^\infty \cup \{\mathcal{I}_{cS}\}$	$\mathcal{I}_{\sim_p}^\infty \cup \{\mathcal{I}_{cS}\}$
2	$\leq \Psi(n)$	$\mathcal{I}_{cS}$	$\mathcal{I}_{MI^c}, \mathcal{I}_{Df}$	-	-
3	$\Phi(2^n)$	$\mathcal{I}_\eta$	-	-	-
4	$\leq \Phi\left(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$	-	$\mathcal{I}_\eta$	-	-
5	$\leq 2^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} + 1$	-	$\mathcal{I}_{is}$	-	-
6	$2^n + 1$	$\mathcal{I}_{hs}$	-	-	-
7	$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$	-	$\mathcal{I}_{MI}$	-	-
8	$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{**}$	-	$\mathcal{I}_{mc}$	-	-
9	$n + 2$	$\mathcal{I}_{dalal}^{max}$	-	-	$\mathcal{I}_{dalal}^{max}$
10	$n + 1$	$\mathcal{I}_{\sim_v}^{(n+1)}$	$\mathcal{I}_{\sim_f}^{(n+1)}$	-	-
11	$\lfloor (n+7)/3 \rfloor^{**}$	-	-	$\mathcal{I}_{dalal}^{max}$	-
12	2	$\mathcal{I}_d$	$\mathcal{I}_d$	$\mathcal{I}_d$	$\mathcal{I}_d$

$\Psi(n)$  siehe [Slo12],  $\Phi(n)$  siehe [Slo], \*nur für  $n > 1$ , \*\*nur für  $n > 3$

Tabelle 7: Charakteristik-Klassen der Inkonsistenzmaße

**Korollar 5.26 (Position  $\mathcal{I}_{cS}$  hinsichtlich Ausdrucksstärke).** Es gelten die folgenden Ordnungen

$$\mathcal{I}_{\sim_v}^\infty \succ_v \mathcal{I}_{cS} \succ_v \mathcal{I}_{dalal}^{max} \succ_v \mathcal{I}_{\sim_v}^{(n+1)} \succ_v \mathcal{I}_d$$

und

$$\mathcal{I}_{\sim_f}^\infty \cup \{\mathcal{I}_{cS}\} \succ_f \mathcal{I}_{MI} \succ_f \mathcal{I}_{mc} \succ_f \mathcal{I}_{\sim_f}^{(n+1)} \succ_f \mathcal{I}_d$$

und

$$\mathcal{I}_{\sim_l}^\infty \cup \{\mathcal{I}_{cS}\} \succ_l \mathcal{I}_{dala}^{max} \succ_l \mathcal{I}_d$$

und

$$\mathcal{I}_{\sim_p}^\infty \cup \{\mathcal{I}_{cS}\} \succ_p \mathcal{I}_{dala}^{max} \succ_p \mathcal{I}_d.$$

Das Contension-Sum Maß gehört somit hinsichtlich der  $f, l, p$ -Charakteristiken zu den ausdrucksfähigsten Inkonsistenzmaßen.

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich mit Theorem 5.24. □

In Korollar 5.26 haben wir die Inkonsistenzmaße  $\mathcal{I}_\eta$  und  $\mathcal{I}_{hs}$  nicht in der Ordnung der  $v$ -Charakteristik berücksichtigt. Der Grund ist, dass die Beziehungen zwischen diesen beiden Maßen und  $\mathcal{I}_{cS}$  nicht bekannt sind und auch nicht so einfach nachgewiesen werden können. Mit Theorem 5.24 liegt für  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$  nur eine obere Schranke mit der Zahlenfolge  $(\Psi(n))$  [Slo12] vor. Die Zahlenfolge  $(\Psi(n))$  wächst bei größeren  $n$  zwar wesentlich stärker als  $(\Phi(2^n))$  [Slo], damit auch als  $(2^n + 1)$ , jedoch liefert die Funktionsgleichung (2) dann für eine zunehmende Zahl an Profilen die gleichen Werte. Vermutlich gibt es trotzdem ein  $n_0$ , so dass die Ordnung

$$\mathcal{I}_{cS} \succ_v \mathcal{I}_\eta \succ_v \mathcal{I}_{hs}$$

für alle  $n > n_0$  gilt. Der formelle Beweis ist allerdings noch zu erbringen. Siehe in Ergänzung dazu Tabelle 8.

In der Ordnung der  $f$ -Charakteristik haben wir die Inkonsistenzmaße  $\mathcal{I}_{MIC}, \mathcal{I}_{Df}, \mathcal{I}_\eta$  und  $\mathcal{I}_{is}$  nicht berücksichtigt, da für diese Maße diesbezüglich ebenfalls nur obere Schranken bekannt sind. Weitere Informationen und eine Vermutung zur Einordnung der Maße  $\mathcal{I}_{MIC}, \mathcal{I}_{Df}$  und  $\mathcal{I}_\eta$ , finden sich in [Thi16].

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(n)$	2	4	9	25	95	552	5460	100708	3718353	289725508
$\Phi(2^n)$	3	7	23	81	325	1261	5023	19949	79853	318965
$2^n + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025
<small><math>\Psi(n)</math> aus [Slo12], <math>\Phi(2^n)</math> aus [Slo, Link: Mathys - Table of n ...]</small>										

Tabelle 8: Werte von  $\Psi(n)$ ,  $\Phi(2^n)$  und  $2^n + 1$  für  $n = 1, \dots, 10$

## 6. Komplexität

Mit dem Kriterium *Komplexität* bewerten wir, wie schwierig die Berechnung mit dem Contension-Sum Maß ist. Nachdem wir in Kapitel 6.1 die Grundlagen zusammengestellt haben, analysieren wir im Kapitel 6.2 die Komplexität. Die Ergebnisse bewerten wir im Kapitel 6.3.

## 6.1. Grundlagen

Wir untersuchen die Komplexität des *Contension-Sum Maßes* für drei verschiedene Entscheidungsprobleme und ein Funktionsproblem. Als wesentliche Grundlage dienen uns der Beitrag von Thimm [Thi18] sowie der Artikel von Thimm und Wallner [TW19]. Die folgende Darstellung der Entscheidungsprobleme und des Funktionsproblems haben wir von dort übernommen.

**EXACT $_{\mathcal{I}_{cS}}$**     **Input:**     $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$   
**Output:**    true if and only if  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) = x$

**UPPER $_{\mathcal{I}_{cS}}$**     **Input:**     $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$   
**Output:**    true if and only if  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) \leq x$

**LOWER $_{\mathcal{I}_{cS}}$**     **Input:**     $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty} \setminus \{0\}$   
**Output:**    true if and only if  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}) \geq x$

**VALUE $_{\mathcal{I}_{cS}}$**     **Input:**     $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$   
**Output:**    The value of  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K})$

Bezüglich der Komplexitätstheorie, den Bezeichnungen und Definitionen zu den Komplexitätsklassen verweisen wir auf die Zusammenstellung von Thimm [TW19, Kapitel 2.2], das Buch von Papadimitriou [Pap94] und den Anhang A im Buch von Hemaspaandra und Ogihara [HO02]. Weitere Grundlagen sind der Artikel von Stockmeyer [Sto76] zur *Polynomial-Time Hierarchy* und der Artikel von Wagner [Wag86] zur *Counting Polynomial-Time Hierarchy*.

## 6.2. Analyse

Bevor wir die Komplexität analysieren, betrachten wir nochmal wie viele unterschiedliche Werte das Contension-Sum Maß für eine bestimmte Größe einer Wissensbasis annehmen kann. In Kapitel 5 haben wir dazu vier verschiedene Eigenschaften von Wissensbasen genutzt, um sie hinsichtlich ihrer Größe zu klassifizieren. Wir führen nun eine weitere Definition zur Klassifizierung der Größe einer Wissensbasis ein. Dazu erweitern wir Definition 5.1 für die Länge einer Formel auf die Länge für eine Wissensbasis. Im Folgenden sei wieder  $\mathcal{L}(A)$  die Menge aller aussagenlogischen Formeln der aussagenlogischen Sprache  $\mathcal{L}$  über eine Menge  $A$  von Aussagenvariablen.

**Definition 6.1 (Länge einer Wissensbasis [TW19]).** Sei  $\varphi \in \mathcal{L}(A)$  und  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Die Länge von  $\mathcal{K}$  definieren wir mit  $\text{len}(\mathcal{K}) = \sum_{\varphi \in \mathcal{K}} \text{len}(\varphi)$ .

**Definition 6.2 ([TW19]).** Sei  $\mathcal{I}$  ein Inkonsistenzmaß und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Menge

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(n) = \{\mathcal{I}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathbb{K} \text{ und } \text{len}(\mathcal{K}) \leq n\}$$

enthält die unterschiedlichen Werte, die  $\mathcal{I}$  annehmen kann, wenn die Länge der Wissensbasen maximal  $n$  beträgt.

**Lemma 6.3.** Für das Contension-Sum Maß gilt  $|\mathcal{C}_{\mathcal{I}_{cS}}(n)| \in O(2^{2^n})$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Mit Theorem 5.24 gilt  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n) \leq \Psi(n)$  für jedes  $n > 0$ . Hierbei ist nach Definition 5.2 die Zahl  $n$  die maximale Anzahl der Atome einer Klasse  $\mathbb{K}^v(n)$  von Wissensbasen. In Definition 6.2 hingegen repräsentiert  $n$  die maximale Länge der betrachteten Wissensbasen. Somit können wir schließen, dass

$$|\mathcal{C}_{\mathcal{I}_{cS}}(n)| \leq \mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n) \leq \Psi(n)$$

für  $n > 0$  gilt. Nach Definition 5.16 ist  $\Psi(n)$  die Anzahl der Profile für monotone boolesche Funktionen mit  $n$  Variablen. Da es insgesamt  $2^{2^n}$  boolesche Funktionen mit  $n$  Variablen gibt, ist  $\Psi(n) \leq 2^{2^n}$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 6.4.** Jeder Wert  $w \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}_{cS}}(n)$  benötigt  $O(n)$  viel Speicherplatz.

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $w = \mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K})$  für eine Wissensbasis  $\mathcal{K}$  mit  $\text{len}(\mathcal{K}) \leq n$ . Dann ergibt sich  $w$  aus der Menge der minimalen Konfliktbasen  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$ . Nach Lemma 5.17 bildet  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$  eine Sperner Familie über die Menge der in  $\mathcal{K}$  vorkommenden Atome, also über  $\text{At}(\mathcal{K})$ . Die maximale Anzahl der Elemente in einer Sperner Familie über eine Menge mit  $n$  Elementen ist  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ . Siehe [Thi16, Theorem 2] und [Spe28]. Mit  $\tilde{n} := |\text{At}(\mathcal{K})|$  erhalten wir somit

$$\max |\text{Cb}^m(\mathcal{K})| \leq \binom{\tilde{n}}{\lfloor \frac{\tilde{n}}{2} \rfloor}.$$

Damit folgt mit Proposition 5.6 und wegen  $\tilde{n} \leq n$ , dass

$$\max w \leq \binom{\tilde{n}}{\lfloor \frac{\tilde{n}}{2} \rfloor} \cdot \left\lceil \frac{\tilde{n}}{2} \right\rceil \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

ist. Für alle  $n \geq 1$  gilt mit [Hoc10, Proposition 2.10]

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

Somit erhalten wir

$$\max w < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < 2^n \frac{n}{\sqrt{n}} = 2^n \sqrt{n}.$$

Das heißt, für eine binäre Repräsentation von  $w$  wird der folgende Speicherplatz benötigt:

$$\log(2^n \sqrt{n}) = n + \log(n^{1/2}) = n + \frac{1}{2} \log n \in O(n).$$

$\square$

### 6.2.1. Deterministische Analyse

Für die Berechnung des Contension-Sum Maßes für eine Wissensbasis  $\mathcal{K}$  werden alle minimalen Modelle von  $\mathcal{K}$  benötigt. Um einen ersten Eindruck zu bekommen, wie schwierig die Berechnung ist, betrachten wir den folgenden deterministischen Algorithmus zur Berechnung des Contension-Sum Maßes für eine Wissensbasis  $\mathcal{K}$ .

#### Algorithmus 1

```
Input: Wissensbasis K mit der Länge n
Output: Ics(K)

1. Anzahl der 3-wertigen Interpretationen:  $I=3^{|\text{At}(K)|}$ 
2. Ermitteln aller Modelle.
   Das heißt, prüfe jede Interpretation i:
     Wenn i ein Modell von K ist:
       Speichere i in Mod_Array.
3. Prüfen der Modelle hinsichtlich Minimalität.
   Das heißt, für alle Paare (m, m') in Mod_Array:
     Wenn Conflictbase(m) Teilmenge von Conflictbase(m') :
       Entferne m' aus Mod_Array.
     Wenn Conflictbase(m') Teilmenge von Conflictbase(m) :
       Entferne m aus Mod_Array
4. Berechne Ics(K).
   Start mit Ics=0 und dann für jedes m in Mod_Array:
     Ics = Ics + |Conflictbase(m)|.
5. Return Ics.
```

Für das Prüfen der Interpretationen und das Ermitteln der Modelle (Schritt 2) benötigt der Algorithmus eine Laufzeit von  $O(I) = O(3^n)$ . Das Filtern der minimalen Modelle (Schritt 3) erfordert den Vergleich von  $\binom{3^n}{2} = \frac{3^n}{2}(3^n - 1)$  Paaren von Konfliktbasen, also eine Laufzeit von  $O(3^{2n})$ . Sei  $\tilde{n} = |\text{At}(\mathcal{K})|$ . Wie wir im Beweis zu Lemma 6.4 festgestellt haben, kann es maximal  $\binom{\tilde{n}}{\lfloor \tilde{n}/2 \rfloor} < 2^{\tilde{n}} < 2^n$  minimale Modelle von  $\mathcal{K}$  geben. Somit hat Schritt 4, also das Berechnen von  $\mathcal{I}_{CS}(\mathcal{K})$ , die Zeitkomplexität  $O(2^n)$ . Das heißt, jeder Berechnungsschritt von 2 bis 4 benötigt jeweils im ungünstigsten Fall exponentiellen Zeitaufwand bezogen auf die Länge von  $\mathcal{K}$ . Wir können allerdings zeigen, dass die Berechnung von  $\mathcal{I}_{CS}(\mathcal{K})$  mit polynomiell viel Speicherplatz möglich ist.

**Definition 6.5 ([TW19]).** Die Komplexitätsklasse PSPACE enthält alle Probleme, die sich mit polynomiellen Speicherplatz berechnen lassen. Vergleiche auch [Pap94, Kapitel 7.1] und [Sip05, Kapitel 8.2].

**Lemma 6.6.** Die Entscheidungsprobleme  $\text{EXACT}_{\mathcal{I}_{CS}}$ ,  $\text{UPPER}_{\mathcal{I}_{CS}}$  und  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{CS}}$  sind in PSPACE. Das Funktionsproblem  $\text{VALUE}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist in FPSPACE.

*Beweis.* Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass die Berechnung von  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K})$  nur polynomiell viel Speicherplatz benötigt für alle  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ . Dazu analysieren wir den Algorithmus 1 nochmal hinsichtlich des Speicherbedarfs. Beim Schritt 2 wird jeweils eine Interpretation in den Speicher geladen. Dann wird geprüft, ob sie alle Formeln von  $\mathcal{K}$  erfüllt. Dabei werden die Formeln nacheinander untersucht, so dass immer nur eine Formel im Speicher ist. Dieser Prozess wird für jede Interpretation wiederholt, wobei sich immer nur die aktuelle Interpretation im Speicher befindet. Die Länge einer Interpretation ist durch  $|\text{At}(\mathcal{K})|$  und die Länge einer Formel durch die Länge von  $\mathcal{K}$  auf  $n$  beschränkt. Somit liegt der Speicherplatzbedarf für Schritt 2 in  $O(n)$ . Für den Vergleich der  $O(3^{2n})$  Paare muss sich jeweils nur das Paar im Speicher befinden, das gerade verglichen wird. Schritt 3 erfordert damit  $O(n)$  viel Speicherplatz. Für Schritt 4 wird ebenfalls nur  $O(n)$  viel Speicherplatz gebraucht. Im Speicher werden nur Platz für eine Variable benötigt in der die Akkumulation von  $\mathcal{I}_{cS}$  erfolgt und Platz für die in der Berechnungsschleife aktuelle minimale Konfliktbasis, deren Länge akkumuliert wird. Zusammengefasst gilt, dass die Berechnung von  $\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K})$  mit polynomiellen Speicherplatz durchgeführt werden kann.  $\square$

Die Analyse in diesem Kapitel vermittelt einen ersten Eindruck wo die Probleme einer Berechnung des Contension-Sum Maßes für eine Wissensbasis liegen. Lemma 6.6 ist nur ein Zwischenergebnis, denn die Komplexitätsklasse PSPACE ist sehr umfassend. Im nächsten Kapitel versuchen wir deshalb die oberen und unteren Schranken genauer zu bestimmen.

### 6.2.2. Obere und untere Schranken

Im ersten Schritt haben wir die Laufzeiten und den Speicherplatzbedarf für eine deterministische Ermittlung des Contension-Sum Maßes abgeschätzt. Im Folgenden versuchen wir bessere Schranken für die Berechnungszeiten zu finden und anzugeben. Wir orientieren uns dabei an den Ausführungen von Thimm [TW19, Kapitel 2.2 und Kapitel 4]. Ein zentrales Teilproblem ist das Entscheidungsproblem, ob eine gegebene 3-wertige Interpretation ein minimales Modell ist.

**MINMOD<sub>3</sub>**    **Input:**    Eine Formel  $\varphi$  und eine 3-wertige Interpretation  $v$ .  
                   **Output:**    true genau dann, wenn  $v \in \text{Mod}_3^m(\varphi)$ .

Für die folgenden Aussagen und Beweise benötigen wir noch eine Definition für ein *klassisch minimales* Modell.

**Definition 6.7 (Klassisch minimales Modell).** Seien  $\Phi$  eine Formel oder eine Formelmenge und  $\text{At}(\Phi) = \{a_1, \dots, a_n\}$  die Menge, der in  $\Phi$  vorkommenden Atome. Sei  $\leq$  eine punktweise partielle Ordnung auf den Wahrheitswerten von Interpretationen unter der Bedingung, dass  $\text{false} < \text{true}$  ist. Für zwei Interpretationen  $\omega, \omega'$  ist  $\omega < \omega'$ , wenn  $\omega \neq \omega'$  und  $\omega(a_i) \leq \omega'(a_i)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt. Ein Modell  $\omega \in \text{Mod}(\Phi)$  ist *klassisch minimal*, wenn es kein  $\omega' \in \text{Mod}(\Phi)$  gibt mit  $\omega' < \omega$ . Vergleiche [DHK05, Kapitel 5].

**Lemma 6.8.** Das Entscheidungsproblem MINMOD<sub>3</sub> ist coNP-vollständig.

*Beweis.* Sei  $v$  eine 3-wertige Interpretation und  $\varphi$  eine Formel. Um zu prüfen, ob  $v$  kein minimales Modell von  $\varphi$  ist, raten wir nicht-deterministisch eine weitere 3-wertige Interpretation  $v'$ . Wir prüfen, ob  $v$  und  $v'$  Modelle von  $\varphi$  sind. Dies ist polynomiell möglich. Falls  $v, v' \models_3 \varphi$  und  $\text{Conflictbase}(v') \subset \text{Conflictbase}(v)$  gilt, dann ist  $v$  nicht minimal. Ob  $\text{Conflictbase}(v') \subset \text{Conflictbase}(v)$  gilt, ist ebenfalls polynomiell überprüfbar. Somit liegt  $\text{MINMOD}_3$  in  $\text{coNP}$ .

Zum Beweis, dass  $\text{MINMOD}_3$  auch  $\text{coNP}$ -schwierig ist, reduzieren wir eine Instanz des Problems *Model Checking* [Cad92] auf eine Instanz von  $\text{MINMOD}_3$ .

**MODELCHECK**    **Input:**     $A, (P, Q, Z), \varphi, \omega$   
                           **Output:**    true gdw.  $\omega$  ein  $(P, Z)$ -minimales Modell von  $\varphi$  ist.

Hierbei bezeichnet  $A$  die Menge der aussagenlogischen booleschen Variablen,  $(P, Q, Z)$  eine Partition von  $A$ ,  $\varphi$  eine Formel in KNF und  $\omega$  ein Modell von  $\varphi$ . Auf die einzelnen Teilmengen der Partition  $(P, Q, Z)$  gehen wir nicht näher ein sondern verweisen auf die Erläuterungen von Cadoli [Cad92, Kapitel 2]. Wir definieren  $Q := Z := \emptyset$ . Ein  $(P, Z)$ -minimales Modell ist dann ein klassisch minimales Modell [Cad92, Kapitel 2] und die Komplexität für **MODELCHECK** ist  $\text{coNP}$ -vollständig [Cad92, Theorem 4]. Für die Reduktion müssen wir beachten, dass **MODELCHECK** auf der klassischen Aussagenlogik beruht und  $\text{MINMOD}_3$  auf der 3-wertigen Aussagenlogik  $L_3$ . Sei  $\varphi$  eine Formel in KNF und  $\omega$  ein Modell von  $\varphi$ . Dann können wir folgende Reduktionsfunktion angeben:

$$\left. \begin{array}{l} A = \text{At}(\varphi) = \{a_1, \dots, a_n\}, \\ (P = A, \emptyset, \emptyset), \\ \varphi, \\ \omega \end{array} \right\} \mapsto \phi, v$$

mit

$$\phi := \varphi \wedge \bigwedge_{a \in P} (a \rightarrow \neg a)$$

und

$$v := \{v_\omega(\omega(a_1)), \dots, v_\omega(\omega(a_n))\}$$

und

$$v_\omega: \{T, F\} \rightarrow \{T, B, F\}, T \mapsto B, F \mapsto F.$$

Die Berechnung der Reduktionsfunktion ist mit polynomielltem Zeitaufwand möglich. Da  $\omega$  ein Modell von  $\varphi$  ist, gibt es in  $\varphi$  keine Literale die in Konflikt stehen. Atome, die unter  $\omega$  den Wahrheitswert T haben, erhalten unter  $v$  jeweils der Wahrheitswert B zugewiesen. Sie erscheinen in  $\phi$  entsprechend als Literale die in Konflikt stehen. Das heißt,  $\phi$  wird genau dann minimal erfüllt, wenn  $\varphi$  klassisch minimal erfüllt wird. Somit folgt für  $\text{MINMOD}_3$ , dass es  $\text{coNP}$ -schwierig ist und damit die Behauptung.  $\square$

**Proposition 6.9.** *Das Funktionsproblem  $\text{VALUE}_{L_{CS}}$  ist  $\# \cdot \text{coNP}$ -vollständig.*

*Beweis.* Mit Lemma 6.8 liegt eine Überprüfung, ob eine 3-wertige Interpretation ein minimales Modell ist, in  $\text{coNP}$ . Es gilt  $\text{coNP} = \Pi_1^p \subseteq \Delta_2^p$ , siehe [Sto76]. Hemaspaandra und Vollmer [HV95, Theorem 1.5] haben gezeigt, dass  $\# \cdot \text{coNP} = \# \cdot \Delta_2^p$  gilt. Somit und mit den minimalen Modellen als Zertifikatsfunktion folgt, dass  $\text{VALUE}_{\mathcal{I}_{CS}}$  in  $\# \cdot \text{coNP}$  liegt. Die Größe der minimalen Modelle, und damit die Größe der minimalen Konfliktbasen, ist jeweils durch die Größe der gegebenen Wissensbasis beschränkt. Der Beweis erfolgte inspiriert durch die Darstellungen von Thimm [TW19, Proposition 13] zum Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}_{MI}$ .

Zum Nachweis der Schwere reduzieren wir das  $\# \cdot \text{coNP}$ -vollständige Zählproblem  $\# \text{SATISFIABLE CIRCUMSCRIPTION}$  [DHK05, Theorem 5.1] auf das Problem  $\# \text{CS}$ . Wir bezeichnen in Folgenden  $\# \text{SATISFIABLE CIRCUMSCRIPTION}$  etwas kürzer mit  $\# \text{SATCIRCUM}$ .

**#SATCIRCUM**    **Input:**    Erfüllbare Formel  $\varphi$  in KNF.  
                   **Output:**    Anzahl der klassisch minimalen Modelle von  $\varphi$ .

**#CS**    **Input:**     $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ .  
                   **Output:**     $|\text{Cb}^m(\mathcal{K})|$ , vergleiche Definition 5.4.

*Hinweis:* Die Reduktion auf  $\# \text{CS}$  anstelle auf  $\text{VALUE}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist hinsichtlich der Komplexität keine entscheidende Abweichung. Wenn  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$  bekannt ist, kann  $\mathcal{I}_{CS}(\mathcal{K})$  in polynomieller Zeit berechnet werden. Wie im Beweis zu Proposition 5.6 angegeben, ist dazu die Summe über die Größen der einzelnen Elemente aus  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$  zu bilden. Im Kapitel 6.2.1 haben wir zwar gezeigt, dass  $\text{Cb}^m(\mathcal{K})$  maximal  $O(2^n)$  Elemente enthalten kann. Bei geeigneter Implementierung ist jedoch eine Berechnung in  $O(\log 2^n) = O(n)$  Zeit möglich. Die Laufzeitdifferenz zur Berechnung von  $|\text{Cb}^m(\mathcal{K})|$  ist somit polynomiell groß.

Für die Reduktion müssen wir beachten, dass dem Problem  $\# \text{SATCIRCUM}$  die klassische Aussagenlogik zugrunde liegt, dem Problem  $\text{CS}$  jedoch die 3-wertige Aussagenlogik  $\mathbf{L}_3$ . Sei  $\varphi$  eine erfüllbare boolesche Formel in KNF. Dann können wir folgende Reduktionsfunktion angeben:

$$\varphi \mapsto \mathcal{K} := \left\{ \varphi \wedge \bigwedge_{a \in \text{At}(\varphi)} (a \rightarrow \neg a) \right\}$$

Die Abbildung von  $\varphi$  auf  $\mathcal{K}$  ist ohne weiteren Nachweis mit polynomielltem Zeitaufwand möglich. Da  $\varphi$  erfüllbar ist, gibt es keine Literale in  $\varphi$ , die in Konflikt stehen. Somit haben in  $\mathcal{K}$  nur genau die Atome einen Konflikt, die im klassisch minimalen Modell von  $\varphi$  den Wahrheitswert T haben. Sei nun  $\omega$  ein klassisch minimales Modell von  $\varphi$  und  $v$  ein minimales Modell von  $\mathcal{K}$ . Dann folgt für die Umkehrrelationen  $\omega^{-1}(T) = v^{-1}(B)$ . Somit ist ein klassisches Modell von  $\varphi$  genau dann klassisch minimal, wenn ein 3-wertiges Modell von  $\mathcal{K}$  minimal ist. Sei  $n_c$  die Anzahl der klassisch minimalen Modelle von  $\varphi$ . Damit gilt  $n_c = |\text{Cb}^m(\mathcal{K})|$ . Das heißt,  $\text{VALUE}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist  $\# \cdot \text{coNP}$ -schwer und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 6.10.** *Das Entscheidungsproblem  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  ist CNP-vollständig.*

*Beweis.* Den Beweis führen wir angelehnt an den Beweis von Thimm [TW19, Proposition 12] für das Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}_{MI}$ . Sei  $\mathcal{K}$  eine Wissensbasis und sei  $v$  eine 3-wertige Interpretation für  $\mathcal{K}$ . Wir führen ein Paar  $y_v = (v, a)$  ein, bestehend aus  $v$  und  $a \in \text{Conflictbase}(v)$ . Sei  $(\mathcal{K}, y_v)$  eine Instanz eines Entscheidungsproblems  $B$ , das genau dann true liefert, wenn  $v$  minimal ist. Im Folgenden verwenden wir das Symbol  $C$  als *Zählquantor* (counting quantifier) entsprechend der Definition von Wagner [Wag86]. Sei zudem  $k$  eine natürliche Zahl. Es folgt  $C_{|y_v|}^k(\mathcal{K}, y_v) \in B$ , da die Größe von  $y_v$  durch die Größe von  $\mathcal{K}$  polynomiell beschränkt ist und  $k$  als natürliche Zahl ebenfalls die polynomielle Anforderung erfüllt. Eine Instanz  $(\mathcal{K}, k)$  des Entscheidungsproblems  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  liefert genau dann true, wenn  $C_{|y_v|}^k(\mathcal{K}, y_v)$  wahr ist. Mit Lemma 6.8 ist  $B \in \text{coNP}$  und es folgt, dass  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  in  $\text{CcoNP}$  liegt. Da  $\text{CcoNP} = \text{coCNP} = \text{CNP}$  gilt [Wag86, Theorem 4], ist  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  in CNP.

Um CNP-Schwierigkeit zu beweisen, reduzieren wir das Problem  $\#_{\geq} \text{SATCIRCUM}$  auf  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$ . Für eine Formel  $\varphi$  sei  $\text{Mod}^m(\varphi)$  die Menge aller klassisch minimalen Modelle.

$\#_{\geq} \text{SATCIRCUM}$  **Input:** Erfüllbare Formel  $\varphi$  in KNF und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .  
**Output:** true genau dann, wenn  $|\text{Mod}^m(\varphi)| \geq k$ .

Für die Reduktion ist zu beachten, dass dem Problem  $\#_{\geq} \text{SATCIRCUM}$  die klassische Aussagenlogik zugrunde liegt, dem Problem  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  jedoch die 3-wertige Aussagenlogik  $\mathbf{L}_3$ . Sei  $\varphi$  eine erfüllbare boolesche Formel in KNF. Als Reduktionsfunktion können wir die gleiche Funktion, wie im Beweis zur Proposition 6.9, verwenden.

$$\varphi \mapsto \mathcal{K} := \left\{ \varphi \wedge \bigwedge_{a \in \text{At}(\varphi)} (a \rightarrow \neg a) \right\}$$

Die Abbildung von  $\varphi$  auf  $\mathcal{K}$  ist mit polynomiellem Zeitaufwand möglich. Da  $\varphi$  erfüllbar ist, gibt es keine Literale in  $\varphi$ , die in Konflikt stehen. Somit haben in  $\mathcal{K}$  nur genau die Atome einen Konflikt, die im klassisch minimalen Modell von  $\varphi$  den Wahrheitswert T haben. Sei nun  $\omega$  ein klassisch minimales Modell von  $\varphi$  und  $v$  ein minimales Modell von  $\mathcal{K}$ . Dann folgt für die Umkehrrelationen  $\omega^{-1}(T) = v^{-1}(B)$ . Somit ist ein klassisches Modell von  $\varphi$  genau dann klassisch minimal, wenn ein 3-wertiges Modell von  $\mathcal{K}$  minimal ist. Das heißt, es gilt  $|\text{Mod}^m(\varphi)| = |\text{Mod}_3^m(\mathcal{K})|$ . Damit ist  $|\text{Mod}^m(\varphi)| \geq k$  genau dann erfüllt, wenn  $\mathcal{I}_{cs} \geq rk$  zutrifft. Hierbei bezeichnet  $r \in \mathbb{R}$  den Mittelwert über die Größe aller minimalen Konfliktbasen von  $\mathcal{K}$ . Der Wert  $r$  lässt sich in polynomieller Zeit berechnen. Somit ist  $(\varphi, k)$  genau dann eine true-Instanz von  $\#_{\geq} \text{SATCIRCUM}$  wenn  $(\mathcal{K}, rk)$  eine true-Instanz von  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  ist. Es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 6.11.** *Das Entscheidungsproblem  $\text{UPPER}_{\mathcal{I}_{cs}}$  ist CNP-vollständig.*

*Beweis.* Den Beweis führen wir in Anlehnung an den Beweis von Thimm [TW19, Proposition 12] für das Inkonsistenzmaß  $\mathcal{I}_{MI}$ . Seien  $\mathcal{K}$  eine Wissensbasis und  $k$  eine

natürliche Zahl. Eine Instanz  $(\mathcal{K}, k)$  des Entscheidungsproblems  $\text{UPPER}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist genau dann wahr, wenn  $(\mathcal{K}, k + 1)$  eine false-Instanz des Problems  $\text{LOWER}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist. Somit folgt mit Proposition 6.10 und mit  $\text{coCNP} = \text{CNP}$  [Wag86, Theorem 4] die CNP-Vollständigkeit für  $\text{UPPER}_{\mathcal{I}_{CS}}$ .  $\square$

**Proposition 6.12.** *Das Entscheidungsproblem  $\text{EXACT}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist  $\text{C}_{=}\text{NP}$ -schwierig.*

*Beweis.* Für den Beweis orientieren wir uns an der Nachweisführung von Thimm [TW19, Proposition 12]. Wir reduzieren das Problem  $\#_{=}\text{SATCIRCUM}$  auf  $\text{EXACT}_{\mathcal{I}_{CS}}$ .

$\#_{=}\text{SATCIRCUM}$  **Input:** Erfüllbare Formel  $\varphi$  in KNF und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .  
**Output:** true genau dann, wenn  $|\text{Mod}^m(\varphi)| = k$ .

Mit  $\varphi$  und  $\mathcal{K}$  aus Proposition 6.10 folgt:  $(\varphi, k)$  ist eine true-Instanz von  $\#_{=}\text{SATCIRCUM}$  genau dann, wenn  $|\text{Mod}^m(\varphi)| = k$  ist, genau dann, wenn  $\mathcal{I}_{CS} = rk$  ist und genau dann, wenn  $(\mathcal{K}, rk)$  eine true-Instanz von  $\text{EXACT}_{\mathcal{I}_{CS}}$  ist. Dabei ist  $r \in \mathbb{R}$  der Mittelwert über die Größe der minimalen Konfliktbasen von  $\mathcal{K}$ . Er lässt sich in polynomieller Zeit berechnen. Somit gilt die Behauptung.  $\square$

### 6.3. Auswertung und Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen

Damit wir eine Vorstellung bekommen, wie schwer die Berechnung des Contension-Sum Maßes  $\mathcal{I}_{CS}$  im Vergleich mit anderen Inkonsistenzmaßen ist, vergleichen wir unsere Ergebnisse aus Kapitel 6.2 mit der Komplexität von 22 weiteren verschiedenen Inkonsistenzmaßen. Die Komplexität dieser Maße wurde von Thimm [TW19, Thi17a, Thi18] untersucht. Für das Maß  $\mathcal{I}_{mv}$  wurden die Beweise von Xiao und Ma [XM12] geführt. Die Ergebnisse der Untersuchungen übernehmen wir von [Thi18, Table 5] und [TW19, Table 2]. Bezüglich der Definitionen zu den 22 Inkonsistenzmaßen verweisen wir auf [Thi18, Figure 1]. Aus Tabelle 9 können wir entnehmen, das 12 der 22 Inkonsistenzmaße der ersten Stufe, drei Maße der zweiten und ein Maß der dritten Stufe der Polynomial-Time Hierachy zugeordnet werden können. Die restlichen sechs Maße sind komplexer. Vier von ihnen sind jeweils Elemente einer *Counting-Komplexitätsklasse* und zwei Maße liegen in  $\text{PSPACE} / \text{FPSPACE}$ . Detaillierte Informationen finden sich in [TW19, Thi18].

Das Contension-Sum Maß  $\mathcal{I}_{CS}$  gehört zu den komplexeren Maßen. Um  $\mathcal{I}_{CS}(\mathcal{K})$  für ein  $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$  zu berechnen, müssen alle minimalen Modelle von  $\mathcal{K}$  ermittelt werden. Die Anzahl der minimalen Modelle von  $\mathcal{K}$  kann, bezogen auf die Länge von  $\mathcal{K}$ , exponentiell sein. Zudem ist bereits das Problem zu Entscheiden, ob ein minimales Modell vorliegt,  $\text{coNP}$ -vollständig wie Lemma 6.8 zeigt. Das Contension-Sum Maß ist hinsichtlich der Komplexität vergleichbar mit den Maßen  $\mathcal{I}_{MI}$ ,  $\mathcal{I}_{mc}$  und  $\mathcal{I}_{is}$ , siehe Tabelle 9.

Maß	EXACT $\mathcal{I}$	UPPER $\mathcal{I}$	LOWER $\mathcal{I}$	VALUE $\mathcal{I}$
$\mathcal{I}_d$	$D_1^p \cap \text{co}D_1^p$	NP -c	coNP -c	FNP -c
$\mathcal{I}_\eta$	$D_1^p$ -c	NP -c	coNP -c	$\text{FP}^{\text{NP}[n]}$
$\mathcal{I}_c, \mathcal{I}_{dalal}^\Sigma, \mathcal{I}_{dalal}^{hit}, \mathcal{I}_{forget}$	$D_1^p$ -c	NP -c	coNP -c	$\text{FP}^{\text{NP}[\log n]}$ -c
$\mathcal{I}_{hs}, \mathcal{I}_{dalal}^{max}, \mathcal{I}_{mcsc}$	$D_1^p$ -c	NP -c	coNP -c	$\text{FP}^{\text{NP}[\log n]}$
$\mathcal{I}_{tprod}^{fuz}, \mathcal{I}_{tmin}^{fuz,\Sigma}, \mathcal{I}_{tprod}^{fuz,\Sigma}$	$D_1^p$	NP -c	coNP -c	?
$\mathcal{I}_p, \mathcal{I}_{mv}$	$D_2^p$ -c	$\Pi_2^p$ -c	$\Sigma_2^p$ -c	$\text{FP}^{\Sigma_2^p[\log n]}$
$\mathcal{I}_{nc}$	$D_2^p$	$\Pi_2^p$ -c	$\Sigma_2^p$ -c	$\text{FP}^{\Sigma_2^p[\log n]}$
$\mathcal{I}_{CC}$	$D_3^p$	$\Pi_3^p$	$\Sigma_3^p$	$\text{FP}^{\Sigma_3^p[\log n]}$
$\mathcal{I}_{MI}, \mathcal{I}_{mc}, \mathcal{I}_{is}$	C=NP -h	CNP -c	CNP -c	$\# \cdot \text{coNP}$ -c <sup>*,**</sup>
$\mathcal{I}_{MIC}$	C=NP -h	CNP -h	CNP -h	$\text{P}\# \cdot \text{coNP}$
$\mathcal{I}_{CS}$	C=NP -h	CNP -c	CNP -c	$\# \cdot \text{coNP}$ -c <sup>***</sup>
$\mathcal{I}_{Df}, \mathcal{I}_{Pm}$	PSPACE	PSPACE	PSPACE	FSPACE

\* bezieht sich auf Problem #MCAndContradictory [TW19, Kapitel 4.4] statt auf  $\mathcal{I}_{mc}$ .  
\*\* bezieht sich auf Problem #is [TW19, Kapitel 4.4] statt auf  $\mathcal{I}_{is}$ .  
\*\*\* bezieht sich auf Problem #CS statt auf  $\mathcal{I}_{CS}$ , siehe Proposition 6.9.  
? Komplexitätsklasse ist nicht bekannt.  
-c steht für *complete*, also vollständig.  
-h steht für *hardness*, also schwer, schwierig oder hart.

Tabelle 9: Komplexität von Inkonsistenzmaßen

## 7. Hintergrund und Diskussion

In diesem Kapitel geben wir eine kleine Übersicht zum Hintergrund der Bearbeitung, diskutieren bestimmte Probleme bei der Inkonsistenzmessung und beschreiben kurz unseren Beitrag.

### 7.1. Überblick

Ein Grundstein zur Inkonsistenzmessung wurde bereits 1978 von Grant [Gra78] gelegt. Nachdem das Thema zuerst wenig Beachtung fand, hat es vor allem in den letzten 20 Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen. Im Zuge der Digitalisierung müssen viele unterschiedliche Arten von Daten und Informationen elektronisch erfasst, gespeichert, weiterverarbeitet und weiter genutzt werden. In zunehmendem Maße sind gespeicherte Daten in vielen kommerziellen und technischen Bereichen auch eine Quelle um Zusammenhänge oder Muster zu erkennen, oder um neues Wissen abzuleiten. Aufgrund der Vielzahl an Daten, deren Verarbeitung und Wartung, können sich Fehler und Widersprüche in eine Datenbasis einschleichen.

Je nach Datenbasis und Fachgebiet ergeben sich viele unterschiedliche Fragestellungen, wie solche Inkonsistenzen behandelt werden sollten. Zweckentsprechende Maßnahmen setzen in der Regel eine geeignete Bewertung voraus. Somit werden Hilfsmittel zum Messen und Bewerten von Inkonsistenzen immer wichtiger.

Mittlerweile wurden viele unterschiedliche Ansätze zur Inkonsistenzmessung veröffentlicht. Eine Übersicht zu Inkonsistenzmaßen und deren Eigenschaften, in verschiedenen Anwendungsgebieten und in Kombinationen mit unterschiedlichen Logiken, liefert das Buch von Grant und Martinez [GM18]. Zur *Inkonsistenzmessung in aussagenlogischen Wissensbasen* vermitteln die Zusammenstellungen und Untersuchungen von Thimm [Thi18, Thi19, Thi17b] einen detaillierten Überblick. Er hat eine breite Auswahl von 22 verschiedenen Inkonsistenzmaßen hinsichtlich 18 üblichen Eigenschaften (*Rationality Postulates*) untersucht. Zusätzlich wurden Ausdrucksstärke (*Expressivity*) [Thi18, Thi16] und Komplexität (*Computational Complexity*) [Thi18, TW19] der Maße bewertet. Das Kriterium Ausdrucksstärke wurde von Thimm [Thi16] als ergänzendes Bewertungskriterium zu den Eigenschaften eingeführt. Es quantifiziert das Vermögen eines Inkonsistenzmaßes, verschiedene Wissensbasen mit unterschiedlichem Inkonsistenz-Grad zu unterscheiden. Die Untersuchungen von Thimm hatten unter anderem zum Ergebnis, dass sich die verschiedenen Maße, bezogen auf die genannten Bewertungskriterien, sehr unterschiedlich verhalten. Allgemeine Bewertungen zur Qualität der einzelnen Inkonsistenzmaße konnten deshalb nicht gegeben werden. Zudem schließen sich viele Eigenschaften gegenseitig aus oder beschreiben widersprüchliche Anforderungen. Für jede untersuchte Eigenschaft gibt es mindestens ein Maß, welches sie erfüllt und mindestens ein Maß, das sie nicht erfüllt. Die Frage, welche Eigenschaften *richtig* sind, und die Definition eines *allgemeingültigen* Inkonsistenzmaßes wurden als noch offene Forschungsfragen ausgewiesen.

## 7.2. Probleme und Sichtweisen in der Inkonsistenzmessung

Das Thema Inkonsistenzmessung erweist sich in vielerlei Hinsicht als schwierig. Ein Grund ist die Struktur von Wissensbasen. Es handelt sich um Mengen, die Formeln als Elemente enthalten. Inkonsistenzen können innerhalb von Formeln auftreten, aber ebenso durch zwei oder mehr Formeln in der Menge bedingt sein. Wenn zwei Formelmengen oder Wissensbasen bezüglich ihrer Formeln disjunkt sind, dann können sie trotzdem gleiche Atome enthalten und sind damit hinsichtlich der Messung von Inkonsistenzen nicht disjunkt. Vergleiche unsere Ausführungen in den Kapiteln 4.6.1, 4.6.3 und 4.6.7. Einen weiteren Grund erschließt sich aus den vielen verschiedenen Ansätzen, die zur Inkonsistenzmessung vorgeschlagen wurden. Es gibt somit unterschiedliche Sichtweisen auf das Thema und folglich entsprechend viele Vorschläge zu den Eigenschaften, die ein Inkonsistenzmaß erfüllen sollte. Je nach Anwendung können sicherlich unterschiedliche Eigenschaften zweckmäßig sein. Eventuell handelt es sich auch um ein multi-dimensionales Problem, vergleiche [Gra18, Kapitel 6].

In der Literatur werden Inkonsistenzmaße oft gruppiert in *syntaktische* oder *semantische* Maße [Thi19, HK05, TW19]. Ein syntaktisches Maß bewertet Inkonsistenz anhand minimal inkonsistenter Formelmengen. Ein semantisches Maß beurteilt Inkonsistenz aufgrund von in Konflikt stehenden Literalen. Hunter, Konieczny und Grant [HK10, GH23] verwenden auch die Bezeichnungen *formelbasiert* (*formula-centric*) und *atombasiert* (*atom-centric*). Es gibt auch Maße, die keiner der beiden Klassen eindeutig zugeordnet werden können [Thi19]. Andererseits wird zum Beispiel von Hunter und Konieczny [HK06] eine Möglichkeit vorgestellt, die Vorteile der beiden Sichtweisen formel- und atombasiert zu kombinieren. Insgesamt sind viele der in den letzten 20 Jahren vorgeschlagenen Inkonsistenzmaße syntaktisch und nur wenige semantisch ausgeprägt [GH23, Abstract]. Für semantische Ansätze besteht somit weiterer Forschungsbedarf, insbesondere unter Berücksichtigung mehrwertiger Logiken [Thi17a, Kapitel 1].

### 7.3. Beitrag dieser Arbeit

Wir haben ein neues Maß zur Messung von Inkonsistenzen in aussagenlogischen Wissensbasen definiert. Es basiert auf dem Konzept der minimalen 3-wertigen Modelle über den Wahrheitswerten *true*, *false* und *both*. Minimal sind diejenigen 3-wertigen Modelle, bei denen die Anzahl der *both*-Zuweisungen minimal bezüglich der Mengeninklusion ist. Die Inkonsistenz einer Wissensbasis ergibt sich dann aus der Summe über die Anzahl der *both*-Zuweisungen über alle minimalen Modelle. Es handelt sich damit um ein atombasiertes Maß, das wir mit *Contension-Sum* Maß ( $\mathcal{I}_{CS}$ ) bezeichnen. Wir haben das Contension-Sum Maß hinsichtlich Eigenschaften, Ausdrucksstärke und Komplexität untersucht.

*Zu den Eigenschaften:* Die Analyse haben wir für 21 übliche Eigenschaften durchgeführt. Da die meisten Eigenschaften eine formelbasierte Sicht auf Wissensbasen haben, das Contension-Sum Maß jedoch ein atombasiertes Maß ist, erfüllt es von den 21 Eigenschaften nur sechs. Detaillierte Informationen sind im Kapitel 4.4 und in Tabelle 4 enthalten. Ergänzend wurde im Kapitel 4.5 ein qualitativer Vergleich mit 22 anderen Inkonsistenzmaßen durchgeführt. Im Kapitel 4.6 haben wir zu verschiedenen Eigenschaften atombasierte Varianten vorgeschlagen und gezeigt, dass diese vom Contension-Sum Maß erfüllt werden. Wir konnten weiterhin zeigen, dass sich das Contension-Sum Maß bei atom-disjunkten Formelmengen wie ein klassisches mathematisches Maß verhält.

*Zur Ausdrucksstärke:* Unsere Analyse hat ergeben, dass das Contension-Sum Maß sehr viele inkonsistente Wissensbasen unterscheiden kann. Verglichen mit 22 anderen Inkonsistenzmaßen ist es damit eines der ausdrucksstärkeren Maße. Ausführliche Angaben können Kapitel 5.3 und Tabelle 7 entnommen werden. Von den 22 Maßen, die wir zum Vergleich berücksichtigt haben, können zwei Maße als atombasiert und die restlichen als formelbasiert eingestuft werden. Die beiden atombasierten Maße sind das *Minimal Proof-Based* Maß  $\mathcal{I}_{P_m}$  [JR13] und das *Contension* Maß  $\mathcal{I}_c$  [GH11]. Das Maß  $\mathcal{I}_{P_m}$  schneidet bezüglich der *v*-Charakteristik etwas besser ab

als das Contension-Sum Maß. Thimm [Thi18, Example 4] hat jedoch gezeigt, dass  $\mathcal{I}_{P_m}$  die Eigenschaft *Consistency* (siehe Kapitel 4.5) nicht erfüllt. Somit entspricht es nicht unserer Definition von einem Inkonsistenzmaß (vergleiche Definition 2.9). Das Maß  $\mathcal{I}_c$  ist hinsichtlich der  $v$ -Charakteristik weniger ausdrucksstark als das Contension-Sum Maß, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

**Beispiel 7.1.** *Vergleichen wir die beiden Wissensbasen  $\mathcal{K}_1 = \{\neg a, a, b, \neg b \vee (c \wedge \neg c)\}$  und  $\mathcal{K}_2 = \{\neg a, a, b, \neg b\}$ . Mit dem Contension Maß ergeben sich mit*

$$\mathcal{I}_c(\mathcal{K}_1) = \min \{|\{a, b\}|, |\{a, c\}|\} = \min\{2, 2\} = 2$$

und mit

$$\mathcal{I}_c(\mathcal{K}_2) = \min \{|\{a, b\}|\} = 2$$

für beide Wissensbasen der gleiche Wert für die Inkonsistenz. Das Contension-Sum Maß hingegen bewertet mit

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_1) = |\{a, b\}| + |\{a, c\}| = 2 + 2 = 4$$

und mit

$$\mathcal{I}_{cS}(\mathcal{K}_2) = |\{a, b\}| = 2$$

beide Wissensbasen unterschiedlich inkonsistent.

Bei den anderen Charakteristiken sind das Contension Maß und das Contension-Sum Maß gleich ausdrucksfähig.

*Zur Komplexität:* Die Berechnung des Contension-Sum Maßes für eine Wissensbasis liegt in der Komplexitätsklasse  $\#coNP$ -vollständig. Ein Vergleich mit 22 anderen Inkonsistenzmaßen hat gezeigt, dass es damit zu den komplexeren Maßen gehört. Detaillierte Informationen sind im Kapitel 6.3 und in Tabelle 9 enthalten.

## 8. Zusammenfassung

Wir haben einen neuen Ansatz zur Inkonsistenzmessung für aussagenlogische Wissensbasen definiert und ihn hinsichtlich Eigenschaften, Ausdrucksstärke und Komplexität analysiert. In den letzten Jahren wurden viele unterschiedliche Ansätze zur Inkonsistenzmessung veröffentlicht. Allerdings wird noch ein allgemeingültig formal definiertes Inkonsistenzmaß mit wenigen charakteristischen Eigenschaften gesucht. Unser Ansatz basiert auf dem Konzept der minimalen 3-wertigen Modelle über den Wahrheitswerten *true*, *false* und *both*, also denjenigen 3-wertigen Modellen, bei denen die Anzahl der *both*-Zuweisungen minimal hinsichtlich der Mengeninklusion ist. Das Maß für die Inkonsistenz einer Wissensbasis ergibt sich dann aus der Summe über die Anzahl der *both*-Zuweisungen über alle minimalen Modelle.

Wir haben unseren Ansatz, das Contension-Sum Maß, hinsichtlich 21 üblicher Eigenschaften untersucht. Da die meisten Eigenschaften eine formelbasierte Sicht

auf Wissensbasen haben, das Contension-Sum Maß jedoch Konflikte zwischen Literalen misst, erfüllt es von den 21 Eigenschaften nur sechs. Deshalb haben wir zu verschiedenen Eigenschaften atombasierte Varianten vorgeschlagen und gezeigt, dass diese vom Contension-Sum Maß erfüllt werden. Zudem konnten wir nachweisen, dass sich das Contension-Sum Maß bei atom-disjunkten Formelmengen wie ein klassisches mathematisches Maß verhält. Verglichen mit 22 anderen Maßen gehört das Contension-Sum Maß zu den ausdrucksstärkeren Inkonsistenzmaßen. Es ist somit eines der fähigeren Maße um verschiedene Wissensbasen mit unterschiedlichem Inkonsistenz-Grad zu unterscheiden. Allerdings liegt die Berechnung des Contension-Sum Maßes in der Komplexitätsklasse  $\# \cdot \text{coNP}$ -vollständig. Es gehört somit zu den komplexeren Inkonsistenzmaßen.

Mit dem Contension-Sum Maß haben wir ein neues absolutes Maß zur Inkonsistenzmessung in aussagenlogischen Wissensbasen angegeben. Zum Vergleich von unterschiedlich großen Wissensbasen hinsichtlich ihrer Inkonsistenz könnten zusätzlich zu den absoluten Werten auch entsprechende relative Werte, bezogen auf die jeweilige Größe der Wissensbasen, aufschlussreich sein. Eine Option für weitere Untersuchungen wäre zum Beispiel das normierte Contension-Sum Maß

$$\mathcal{I}_{cSn} = \frac{\mathcal{I}_{cS}}{|\text{At}(\mathcal{K})|}.$$

Gespeicherte Daten werden vermehrt zum Generieren von neuen Erkenntnissen genutzt. Das Thema Inkonsistenzmessung wird somit zunehmend wichtiger und voraussichtlich für immer mehr technische und kommerzielle Bereiche interessant. Ein Maß zur Quantifizierung von Inkonsistenz kann ein wichtiges Kriterium zur Bewertung und damit für eine sichere und zuverlässige Nutzung von Wissensbasen sein. Dies gilt insbesondere, falls große Daten- oder Wissensbasen automatisiert als Grundlage für zum Beispiel weitreichende Entscheidungen, kritische Prozesse oder sicherheitsrelevante Berechnungen berücksichtigt werden.

## Literatur

- [Bau92] H. Bauer. *Mass- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [Bes14] Ph. Besnard. Revisiting Postulates for Inconsistency Measures. In *JELIA 2014*, pages 383–396, 2014.
- [BG20] Ph. Besnard and J. Grant. Relative inconsistency measures. *Artificial Intelligence*, 280:103231–103231, 2020.
- [BW20] C. Beierle and G. Kern-Isberner; Mitarbeit: M. Widera. *Methoden der Wissensrepräsentation und -verarbeitung*. FernUniversität in Hagen, Kurs 01845, 2020.
- [Cad92] M. Cadoli. The complexity of model checking for circumscriptive formulae. *Information Processing Letters*, 44(3):113–118, 1992.

- [CH11] Y. Crama and P. L. Hammer. *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. Cambridge University Press, 2011.
- [DHK05] A. Durand, M. Hermann, and P. G. Kolaitis. Subtractive reductions and complete problems for counting complexity classes. *Theoretical Computer Science*, 340(3):496–513, 2005.
- [Els18] J. Elstrodt. *Mass- und Integrationstheorie*. Springer Spektrum, 2018.
- [Eng97] K. Engel. *Sperner Theory*, volume 00065 of *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [GH11] J. Grant and A. Hunter. Measuring Consistency Gain and Information Loss in Stepwise Inconsistency Resolution. volume 6717 of *Lecture Notes in Computer Science*. 6717 *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. 6717, pages 362–373, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [GH23] J. Grant and A. Hunter. Semantic inconsistency measures using 3-valued logics. *International Journal of Approximate Reasoning*, 156:38–60, 2023.
- [GM18] J. Grant and M. V. Martinez, editors. *Measuring Inconsistency in Information*. Studies in Logic, Volume 73. College Publications, 2018.
- [Gra78] J. Grant. Classifications for Inconsistent Theories. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 19(3):435 – 444, 1978.
- [Gra18] J. Grant. From Measuring Infinities to Measuring Inconsistencies. In *Measuring Inconsistency in Information*, Studies in Logic (London), 73, pages 1–18. College Publications, 2018.
- [Hab15] R. Hable. *Einführung in die Stochastik, Ein Begleitbuch zur Vorlesung*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [HK05] A. Hunter and S. Konieczny. Approaches to Measuring Inconsistent Information. volume 3300 of *Lecture Notes in Computer Science*. 3300, pages 191–236. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [HK06] A. Hunter and S. Konieczny. Shapley Inconsistency Values. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Tenth International Conference (KR2006)*, pages 249–259. AAAI Press, Menlo Park, California, 2006.
- [HK10] A. Hunter and S. Konieczny. On the measure of conflicts: Shapley Inconsistency Values. *Artificial Intelligence*, 174(14):1007–1026, 2010.
- [HO02] L. A. Hemaspaandra and M. Ogihara. *The Complexity Theory Companion*. Texts in theoretical computer science. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.

- [Hoc10] W. Hochstättler. *Algorithmische Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [HV95] L. A. Hemaspaandra and H. Vollmer. The Satanic Notations: Counting Classes Beyond #P and Other Definitional Adventures. *SIGACT News*, 26(1):2–13, 1995.
- [JR13] S. Jabbour and B. Raddaoui. Measuring Inconsistency through Minimal Proofs. In *Lecture Notes in Computer Science (7958): 12th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, ECSQARU '13*, pages 290–301. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Kni02] K. Knight. Measuring Inconsistency. *Journal of Philosophical Logic*, 31(1):77, 2002.
- [Kyb61] H. E. Kyburg. *Probability and the Logic of Rational Belief*. Wesleyan University Press, Middletown, Connecticut, 1st edition, 1961.
- [MLJ11] K. Mu, W. Liu, and Z. Jin. A general framework for measuring inconsistency through minimal inconsistent sets. *Knowledge & Information Systems*, 27(1):85–114, 2011.
- [MLJB11] K. Mu, W. Liu, Z. Jin, and D. Bell. A syntax-based approach to measuring the degree of inconsistency for belief bases. *International Journal of Approximate Reasoning*, 52(7):978–999, 2011.
- [Mu19] K. Mu. Formulas Free From Inconsistency: An Atom-Centric Characterization in Priest’s Minimally Inconsistent LP. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 66:279–296, 2019.
- [Pap94] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison Wesley Longman, Reprinted with corrections August, 1995 edition, 1994.
- [Pri79] G. Priest. The Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 8(1):219–241, 1979.
- [Sip05] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation, Second Edition*. Thomson Course Technology, Boston, Massachusetts, 2005.
- [SK11] N. J. A. Sloane and Don Knuth. A007695 - Cardinalities of Sperner families on  $1, \dots, n$ . OEIS, September 2011. <https://oeis.org/A007695> [Accessed: 2024-08-18].
- [Slo] N. J. A. Sloane. A005728 - Number of fractions in Farey series of order  $n$ . OEIS. <https://oeis.org/A220880> [Accessed: 2024-09-06] and Link: Antoine Mathys, Table of  $n, a(n)$  for  $n = 0 \dots 20000$ , <https://oeis.org/A005728/b005728.txt> [Accessed: 2024-09-06].

- [Slo12] N. J. A. Sloane. A220880 - Number of profiles of monotone Boolean functions of  $n$  variables. OEIS, December 2012. <https://oeis.org/A220880> [Accessed: 2024-08-18].
- [Spe28] E. Sperner. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):544–548, 1928.
- [SSM23] N. J. A. Sloane, M. Somos, and M. Marcus. A000372 - Dedekind numbers or Dedekinds problem: number of monotone Boolean functions of  $n$  variables, number of antichains of subsets of an  $n$ -set, number of elements in a free distributive lattice on  $n$  generators, number of Sperner families. OEIS, April 2023. <https://oeis.org/A000372> [Accessed: 2024-08-19].
- [Sto76] L. J. Stockmeyer. The polynomial-time hierarchy. *Theoretical Computer Science*, 3(1):1–22, 1976.
- [SY14] T. Stephen and T. Yusun. Counting inequivalent monotone Boolean functions. *Discrete Applied Mathematics*, 167:15–24, 2014.
- [SYM23] N. J. A. Sloane, T. Yusun, and M. Marcus. A003182 - Dedekind numbers: inequivalent monotone Boolean functions of  $n$  or fewer variables, or antichains of subsets of an  $n$ -set. OEIS, May 2023. <https://oeis.org/A003182> [Accessed: 2024-08-19].
- [Thi09] M. Thimm. Measuring Inconsistency in Probabilistic Knowledge Bases. In J. Bilmes and A. Ng, editors, *Proceedings of the Twenty-Fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'09)*, pages 530–537. AUAI Press, June 2009.
- [Thi11] M. Thimm. Analyzing Inconsistencies in Probabilistic Conditional Knowledge Bases using Continuous Inconsistency Measures. In C. Beierle and G. Kern-Isberner, editors, *Proceedings of the Third Workshop on Dynamics of Knowledge and Belief (DKB'11)*, pages 31–45, October 2011.
- [Thi16] M. Thimm. On the expressivity of inconsistency measures. *Artificial Intelligence*, 234:120–151, 2016.
- [Thi17a] M. Thimm. Measuring inconsistency with many-valued logics. *Int. J. Approx. Reason*, 86:1–23, 2017.
- [Thi17b] M. Thimm. On the Compliance of Rationality Postulates for Inconsistency Measures: A More or Less Complete Picture. *Künstliche Intelligenz*, 31(1):31–39, 2017.
- [Thi18] M. Thimm. On the Evaluation of Inconsistency Measures. In *Measuring Inconsistency in Information*, Studies in Logic (London), 73, pages 19–60. College Publications, 2018.

- [Thi19] M. Thimm. Inconsistency Measurement. In *Scalable Uncertainty Management : 13th International Conference, SUM 2019, Compiègne, France, December 16–18*, volume 11940 of *Lecture Notes in Computer Science. 11940 Lecture Notes in Artificial Intelligence. 11940*, pages 9–23, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [TW19] M. Thimm and J. P. Wallner. On the Complexity of Inconsistency Measurement. *Artificial Intelligence*, 275:411–456, 2019.
- [Wag86] K. W. Wagner. The Complexity of Combinatorial Problems with Succinct Input Representation. *Acta Informatica*, 23(3):325 – 356, 1986.
- [XM12] G. Xiao and Y. Ma. Inconsistency Measurement based on Variables in Minimal Unsatisfiable Subsets. In *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'12)*, France, August 2012.

**A. Ermittlung der Werte von  $\mathcal{C}^v(\mathcal{I}_{cS}, n)$  für  $n = 1, \dots, 5$**

# Anlage A1

## Ermittlung der möglichen Werte für $I_{cS}$ bis $n = 5$

### Berechnung von $C^v(I_{cS}, n)$

Anhand der Profile für Antiketten wird berechnet, wieviele verschiedene Werte  $I_{cS}$  annehmen kann. Die Berechnung wird bis  $n = 5$  durchgeführt. Die Profile für  $n = 5$  sind [SY14] entnommen. Die Profile für  $n = 1$  bis  $n = 3$  sind [SYM23] entnommen. Die Profile für  $n = 4$  wurden aus den Profilen für  $n = 5$  abgeleitet.

[SY14] Tamon Stephen and Timothy Yusun. Counting inequivalent monotone boolean functions. *Discrete Applied Mathematics*, 167:15-24, 2014.

[SYM23] N.J.A. Sloane, Timothy Yusun and Michel Marcus. A003182 - Dedekind numbers: inequivalent boolean functions of  $n$  variables, or antichains of subsets of an  $n$ -set. OEIS, May 2023. <https://oeis.org/A003182> [Assessed 2024-08-19].

## 1 Eingabe der Profile

```
[1]: # Eingabe der Profile

# n=1:
profiles_1 = [(0,), (1,)]

# n=2:
profiles_2 = [(0,0), (1,0), (2,0), (0,1)]

# n=3:
profiles_3 = [(0,0,0), (1,0,0), (2,0,0), (3,0,0),
              (0,1,0), (1,1,0), (0,2,0), (0,3,0), (0,0,1)]

# n=4:
profiles_4 = [(0,0,0,0), (1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0),
              (1,1,0,0), (1,2,0,0), (1,3,0,0), (1,0,1,0), (2,1,0,0),
              (0,1,0,0), (0,2,0,0), (0,3,0,0), (0,4,0,0), (0,5,0,0), (0,6,0,0),
              (0,1,1,0), (0,1,2,0), (0,2,1,0), (0,3,1,0),
              (0,0,1,0), (0,0,2,0), (0,0,3,0), (0,0,4,0),
              (0,0,0,1)]

# n=5:
profiles_5 = [(0,0,0,0,0), (0,9,0,0,0), (1,0,3,0,0), (0,2,0,1,0),
              (1,0,0,0,0), (0,10,0,0,0), (0,1,3,0,0), (0,3,0,1,0),
              (2,0,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,2,3,0,0), (0,4,0,1,0),
              (3,0,0,0,0), (1,0,1,0,0), (0,3,3,0,0), (0,0,1,1,0),
              (4,0,0,0,0), (2,0,1,0,0), (0,4,3,0,0), (0,1,1,1,0),
              (5,0,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,4,0,0), (0,2,1,1,0),
              (0,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,0,4,0,0), (0,0,2,1,0),
              (1,1,0,0,0), (0,2,1,0,0), (0,1,4,0,0), (0,1,2,1,0),
              (2,1,0,0,0), (1,2,1,0,0), (0,2,4,0,0), (0,0,3,1,0),
              (3,1,0,0,0), (0,3,1,0,0), (0,3,4,0,0), (0,1,3,1,0),
              (0,2,0,0,0), (1,3,1,0,0), (0,4,4,0,0), (0,0,4,1,0),
              (1,2,0,0,0), (0,4,1,0,0), (0,0,5,0,0), (0,0,5,1,0),
              (2,2,0,0,0), (0,5,1,0,0), (0,1,5,0,0), (0,0,6,1,0),
              (0,3,0,0,0), (0,6,1,0,0), (0,2,5,0,0), (0,0,0,2,0),
              (1,3,0,0,0), (0,7,1,0,0), (0,0,6,0,0), (0,1,0,2,0),
              (2,3,0,0,0), (0,0,2,0,0), (0,1,6,0,0), (0,0,1,2,0),
```

```
(0,4,0,0,0), (1,0,2,0,0), (0,0,7,0,0), (0,0,2,2,0),
(1,4,0,0,0), (0,1,2,0,0), (0,1,7,0,0), (0,0,3,2,0),
(0,5,0,0,0), (1,1,2,0,0), (0,0,8,0,0), (0,0,0,3,0),
(1,5,0,0,0), (0,2,2,0,0), (0,0,9,0,0), (0,0,1,3,0),
(0,6,0,0,0), (0,3,2,0,0), (0,0,10,0,0), (0,0,0,4,0),
(1,6,0,0,0), (0,4,2,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,5,0),
(0,7,0,0,0), (0,5,2,0,0), (1,0,0,1,0), (0,0,0,0,1),
(0,8,0,0,0), (0,0,3,0,0), (0,1,0,1,0)]
```

## 2 Funktionen für die Berechnung

```
[2]: # Berechnung der möglichen Werte für Ics
def Ics(profiles):
    _Ics = []
    for p in profiles:
        Ics_p = 0
        for i in range(len(p)):
            Ics_p = Ics_p + (i+1)*p[i]
        _Ics.append(Ics_p)
    return _Ics

# Berechnung der unterschiedlichen Werte für Ics
def Ics_unique(Ics):
    Ics_u = []
    for i in Ics:
        if i not in Ics_u:
            Ics_u.append(i)
    return Ics_u
```

## 3 Ergebnisse

Die Liste **Ics** gibt die möglichen Werte für  $I_{CS}$  an. In der Liste **Ics\_u** sind die mehrfach vorkommenden Werte entfernt.

```
[3]: print(f'n = 5:')
print(f'Anzahl der Profile = {len(profiles_5)}')
Ics_5 = Ics(profiles_5)
Ics_5u = Ics_unique(Ics_5)
print(f'Ics = {Ics_5}')
print(f'Ics_u = {Ics_5u}')
print(f'Cv(Ics,5) = {len(Ics_5u)}\n')

print(f'n = 4:')
print(f'Anzahl der Profile = {len(profiles_4)}')
Ics_4 = Ics(profiles_4)
Ics_4u = Ics_unique(Ics_4)
print(f'Ics = {Ics_4}')
print(f'Ics_u = {Ics_4u}')
print(f'Cv(Ics,4) = {len(Ics_4u)}\n')

print(f'n = 3:')
print(f'Anzahl der Profile = {len(profiles_3)}')
Ics_3 = Ics(profiles_3)
Ics_3u = Ics_unique(Ics_3)
print(f'Ics = {Ics_3}')
print(f'Ics_u = {Ics_3u}')
print(f'Cv(Ics,3) = {len(Ics_3u)}\n')

print(f'n = 2:')
```

```

print(f'Anzahl der Profile = {len(profiles_2)}')
Ics_2 = Ics(profiles_2)
Ics_2u = Ics_unique(Ics_2)
print(f'Ics = {Ics_2}')
print(f'Ics_u = {Ics_2u}')
print(f'Cv(Ics,2) = {len(Ics_2u)}\n')

print(f'n = 1:')
print(f'Anzahl der Profile = {len(profiles_1)}')
Ics_1 = Ics(profiles_1)
Ics_1u = Ics_unique(Ics_1)
print(f'Ics = {Ics_1}')
print(f'Ics_u = {Ics_1u}')
print(f'Cv(Ics,1) = {len(Ics_1u)}\n')

```

```

n = 5:
Anzahl der Profile = 95
Ics = [0, 18, 10, 8, 1, 20, 11, 10, 2, 3, 13, 12, 3, 4, 15, 7, 4, 5, 17, 9, 5,
5, 12, 11, 2, 6, 13, 10, 3, 7, 14, 12, 4, 8, 16, 13, 5, 9, 18, 15, 4, 10, 20,
16, 5, 11, 15, 19, 6, 13, 17, 22, 6, 15, 19, 8, 7, 17, 18, 10, 8, 6, 20, 11, 8,
7, 21, 14, 9, 8, 23, 17, 10, 9, 24, 12, 11, 10, 27, 15, 12, 12, 30, 16, 13, 14,
4, 20, 14, 16, 5, 5, 16, 9, 6]
Ics_u = [0, 18, 10, 8, 1, 20, 11, 2, 3, 13, 12, 4, 15, 7, 5, 17, 9, 6, 14, 16,
19, 22, 21, 23, 24, 27, 30]
Cv(Ics,5) = 27

```

```

n = 4:
Anzahl der Profile = 25
Ics = [0, 1, 2, 3, 4, 3, 5, 7, 4, 4, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 5, 8, 7, 9, 3, 6, 9,
12, 4]
Ics_u = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 10, 12, 9]
Cv(Ics,4) = 12

```

```

n = 3:
Anzahl der Profile = 9
Ics = [0, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 3]
Ics_u = [0, 1, 2, 3, 4, 6]
Cv(Ics,3) = 6

```

```

n = 2:
Anzahl der Profile = 4
Ics = [0, 1, 2, 2]
Ics_u = [0, 1, 2]
Cv(Ics,2) = 3

```

```

n = 1:
Anzahl der Profile = 2
Ics = [0, 1]
Ics_u = [0, 1]
Cv(Ics,1) = 2

```

[ ]: