FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Artificial Intelligence Group

Ranking Semantiken für unendliche Argumentation Frameworks

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science (B.Sc.)
im Studiengang Informatik

vorgelegt von
Patrick Reif-Schimmel

Erstgutachter: Prof. Dr. Matthias Thimm
Artificial Intelligence Group

Betreuer: Lydia Blümel
Artificial Intelligence Group

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Bachelorarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für enthaltene Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Bachelorarbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Bachelorarbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate geprüft werden kann und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

	Ja	Nein
Mit der Einstellung dieser Arbeit in die Bibliothek bin ich einverstanden.	☒	☐
Der Veröffentlichung dieser Arbeit auf der Webseite des Lehrgebiets Künstliche Intelligenz stimme ich zu.	☒	☐
Der Text dieser Arbeit ist unter einer Creative Commons Lizenz (CC BY-SA 4.0) verfügbar.	☒	☐
Der Quellcode ist unter einer GNU General Public License (GPLv3) verfügbar.	☒	☐
Die erhobenen Daten sind unter einer Creative Commons Lizenz (CC BY-SA 4.0) verfügbar.	☒	☐

Eberstalzell, 27.09.2023 .... [signature]

(Ort, Datum) (Unterschrift)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie sich Ranking Semantiken bei unendlichen Argumentations Frameworks verhalten. Im Speziellen soll das Verhalten untersucht werden wenn jeder Knoten nur eine endliche Anzahl an Angriffen hat, sogenannten Finitary AF's.

Abstract

In this thesis it is to be investigated how ranking semantics behave in infinite argumentation frameworks. In particular, the behavior should be investigated if each node has only a finite number of attacks.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Internet gibt es immer wieder Diskussionen, bei denen Kommentare und Gegenkommentare für gewisse Punkte abgegeben werden. Dabei ist es für Algorithmen im Allgemeinen und Computer im Speziellen nicht einfach diese Argumente zu bewerten und zu verarbeiten. Ein Argumentationsframework stellt ein Konstrukt dar, um diese Informationen in eine Form und Struktur zu bringen, in der sie automatisch verarbeitet werden können. Dieses Konstrukt ist ein gerichteter Graph und geht zurück auf Dung [Dun95].

Dabei gibt es verschiedene Methoden die durch ein Argumentationsframework bereitgestellten Daten zu verarbeiten. Eine Möglichkeit besteht darin, Extensions zu bilden, um Mengen an akzeptablen Aussagen zu identifizieren. Dies wird hier aber nicht weiter verfolgt. Eine andere Möglichkeit, die in dieser Arbeit genauer betrachtet wird, ist die Anwendung von Ranking-Semantiken [CLS05]. Bei einer Ranking-Semantik werden die einzelnen Argumente in eine Ordnung gebracht um sie miteinander vergleichen zu können. Dabei wird die Ordnung durch die Semantik anhand bestimmter Eigenschaften, wie zum Beispiel der Anzahl an angreifenden Knoten, bestimmt.

Neben Argumentationsframeworks mit einer endlichen Anzahl an Knoten, und welchen mit einer unendlichen Anzahl an Knoten gibt es auch noch den Spezialfall der finitary Argumentationsframeworks. Diese haben eine unendliche Anzahl an Knoten, jeder Knoten hat aber nur eine endliche Anzahl an Angriffen auf ihn.

Ziel ist die Untersuchung, ob Ranking-Semantiken auf unendlichen Argumentationsframeworks (AF's), besonders auf solche deren Knoten nur eine endliche Anzahl an Angriffen je Knoten haben (*finitary AF's*), anwendbar sind.

2 Ranking-Semantiken auf endlichen Argumentationsframeworks

2.1 Abstrakte Argumentationsframeworks

Ein Argumentationsframework (AF) ist ein Model welches dazu dient Argumente und deren Verhältnis zueinander abzubilden. Dazu werden die Argumente als Knoten und die Angriffe als Kanten in einem gerichteten Graphen aufgefasst [Dun95] Dabei gibt es AF's mit einer endlichen Anzahl an Knoten und AF's mit einer unendlichen Anzahl an Knoten.

Definition 1. *Ein **Argumentationsframework** ist ein Paar $F = \langle A, R \rangle$. Wobei A eine Menge von Argumenten und R eine binäre Relation auf A mit $R \subseteq A \times A$ ist.*

Eine Menge von Argumenten $S \subseteq A$ greift ein Element $b \in A$ an, wenn gilt $a \in S$ und $(a, b) \in R$. Die Menge der direkten Angreifer auf ein Element b notieren wir als $R^{-}(b)$.

*Ein **endliches Argumentationsframework** ist ein AF für welches gilt $|A| < \infty$. Sonst ist es ein **unendliches Argumentationsframework** bei dem A abzählbar unendlich ist.*

Beispiel 1. *Abbildung 1 zeigt ein Beispiel eines endlichen Argumentationsframeworks. In diesem Framework greift die Menge $\{a\}$ den Knoten $\{b\}$ an. Und die Menge der direkten Angreifer von $\{c\}$ ist $\{a, b, d\}$.*

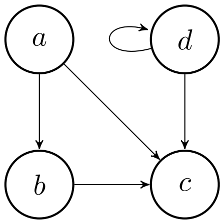

Abbildung 1: $F = \langle A, R\rangle$ mit $A = (a, b, c, d)$ und $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (d, c), (d, d)\}$

Bei allen Beispielen die in diesem Dokument verwendet werden, ist die Null in den natürlichen Zahlen enthalten.

Definition 2. $0 \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2. *Abbildungen 2 und 3 zeigen Beispiele von unendlichen Argumentationsframeworks, bei denen Knoten unendlich viele Angriffe haben.*

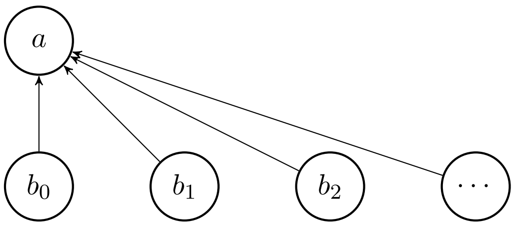

Abbildung 2: $F = \langle A, R\rangle$ mit $A = (a, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $R = \{(b_i, a) \mid i \in \mathbb{N}\}$

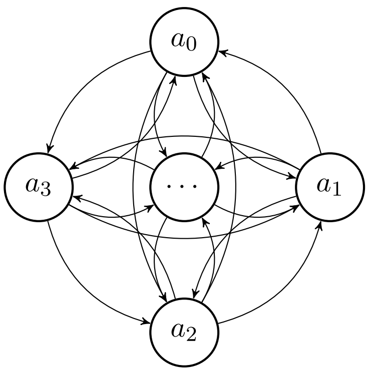

Abbildung 3: $F = \langle A, R\rangle$ mit $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $R = \{(a_i, a_j) \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$

Um das Verhältnis zwischen zwei Knoten zu beschreiben, zum Beispiel ob ein Knoten einen anderen angreift oder verteidigt, wird ein Pfad verwendet. Dabei beschreibt ein Pfad den Weg von einem Knoten zu einem anderen, indem den Angriffen gefolgt wird.

Definition 3. ***Pfad*** *Ein Pfad P von a nach b, geschrieben als $P(a, b)$ ist eine Sequenz $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ von Argumenten, so dass $a_0 = a, a_n = b$ und $\forall i < n, (a_i, a_{i+1}) \in R$. Die Länge des Pfades notieren wir als $l_P = n$.*

Beispiel 3. *In Abbildung 4 hat der Pfad $P(a_0, a_2)$ die Sequenz $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ und eine Länge von 2.*

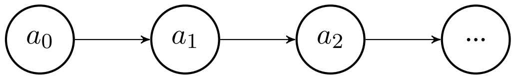

Abbildung 4: $F = \langle A, R \rangle$ mit $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $R = \{(a_i, a_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Definition 4. ***Angreifer, Verteidiger*** *Ein Angreifer ist ein Argument am Beginn eines Pfades mit ungerader Länge. Die Menge der Angreifer auf ein Argument a bezeichnen wir mit $R_n^-(a) = \{b \mid \exists P(b, a)$ mit $l_P \in 2\mathbb{N} + 1\}$.*

Ein Verteidiger ist ein Argument am Beginn eines Pfades mit gerader Länge. Die Menge der Verteidiger eines Arguments a bezeichnen wir mit $R_n^+(a) = \{b \mid \exists P(b, a)$ mit $l_P \in 2\mathbb{N}\}$.

Dabei schreiben wir $R^-(a)$ beziehungsweise $R^+(a)$ statt $R_1^-(a)$ beziehungsweise $R_2^+(a)$ wenn klar ist, dass die direkten Angreifer beziehungsweise Verteidiger gemeint sind.

Beispiel 4. *In dem Argumentationsframework in Abbildung 4 wird jeder Knoten a_i mit $i \in \mathbb{N}$ und $i > 0$ von dem Knoten der vor ihm liegt angegriffen. Es gilt also $R^-(a_i) = \{a_{i-1}\}$.*

Umgekehrt wird jeder Knoten a_i mit $i \in \mathbb{N}$ und $i > 1$ von dem Knoten der vor dem Knoten liegt, welcher vor a_i liegt verteidigt. Es gilt also wieder $R^+(a_i) = \{a_{i-2}\}$.

Ein **Finitary Argumentationsframework** ist ein unendliches Argumentationsframework bei dem jeder Knoten nur eine endliche Anzahl an Angriffen hat.

Definition 5. *Ein unendliches Argumentationsframework $F = \langle A, R \rangle$ heißt finitary, wenn für alle $a \in A$ gilt, dass $\mid R^-(a) \mid < \infty$.*

Zum Beispiel sind die Argumentationsframeworks aus den Abbildungen 2 und 3 keine finitary Argumentationsframeworks, denn es gibt in beiden mindestens einen Knoten, der eine unendliche Anzahl an Angreifern hat.

Beispiel 5. *Abbildung 5 zeigt ein Beispiel eines Finitary Argumentationsframeworks. Denn durch die Konstruktion gibt es eine unendliche Anzahl an Knoten, aber jeder Knoten hat maximal 2 Angreifer.*

Beispiel 6. *Abbildung 6 zeigt ein Beispiel eines Finitary AF's, bei dem es sowohl Knoten gibt, die nicht angegriffen werden, als auch Knoten mit 1 oder 2 Angriffen.*

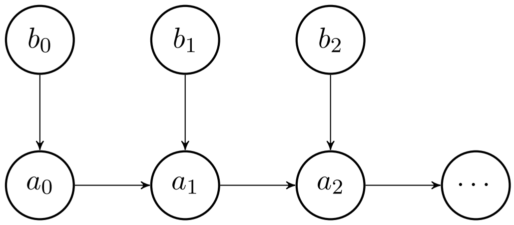

Abbildung 5: $F = \langle A, R \rangle$ mit $A = (a_i \cup b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $R = \{(a_i, a_{i+1}), (b_i, a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$

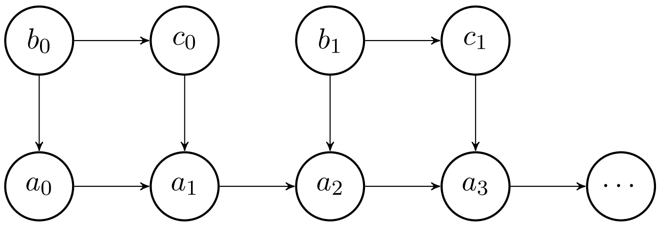

Abbildung 6: $F = \langle A, R \rangle$ mit $A = (a_i, b_i, c_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $R = \{(b_i, c_i), (b_i, a_{2i}), (a_i, a_{i+1}), (c_i, a_{2i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Beispiel 7. *Abbildung 7 zeigt ein Beispiel eines Finitary AF's, das aus lauter Kreisen mit je vier Elementen besteht, die als Kette verbunden sind.*

Beispiel 8. *Die AF's $F_1 = \langle A, R \rangle$ mit $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $R = \{\emptyset\}$, ein AF komplett ohne Angriffe, und $F_2 = \langle A, R \rangle$ mit $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $R = \{(a_i, a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, ein AF bei dem jeder Knoten nur sich selbst angreift, sind ebenfalls Finitary AF's.*

Eine **Ranking basierte Semantik** weißt jedem Argument A in einem Argumentationsframework $F = \langle A, R \rangle$ ein eindeutiges Ranking zu.

Definition 6. *Ein Ranking $\succeq$ ist eine reflexive und transitive Ordnung welche auch partiell sein kann. Für zwei Argumente $a, b \in F$ bedeutet $a \succeq b$, dass a mindestens genauso akzeptabel ist wie b.*

Zusätzlich verwenden wir folgende Abkürzungen:

- $a \succ b$ für $a \succeq b$ und $b \not\succeq a$,
- $a \simeq b$ für $a \succeq b$ und $b \succeq a$,
- $b \prec a$ für $a \succ b$ und
- $b \preceq a$ für $a \succeq b$;

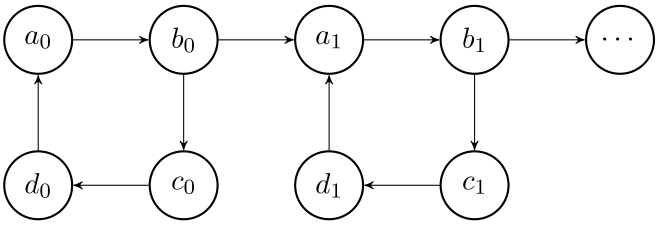

Abbildung 7: $F = \langle A, R\rangle$ mit $A = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $R = \{(a_i, b_i), (b_i, a_{i+1}), (b_i, c_i), (c_i, d_i), (d_i, a_i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$

2.2 Categorizer

Der **Categorizer** ist ein von Besnard und Hunter [BH21] eingeführtes System, welches jedem Argument einen Rang zuweist, welcher sich nur aus der Anzahl der direkten Angriffe auf das Argument ergibt. Um den Wert zu ermitteln wird die Categorizer-Funktion verwendet.

Definition 7. *Die **Categorizer-Funktion** Cat weißt jedem Argument aus einem Argumentationsframework $F = \langle A, R\rangle$ einen Wert aus dem Intervall $(0, 1]$ zu. Sie ist definiert als*

$$Cat(a) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } R_1^-(a) = \emptyset \\ \frac{1}{1+\sum_{c\in R_1^-(a)} Cat(c)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Definition 8. *Die Ranking-Semantik **Categorizer** weißt einem $F = \langle A, R\rangle$ ein Ranking $\succeq^{Cat}$ auf A zu, so dass für alle $a, b \in A$ gilt, wenn $Cat(a) > Cat(b)$ dann gilt $a \succ^{Cat} b$, wenn $Cat(a) \geq Cat(b)$ dann gilt $a \succeq^{Cat} b$ und wenn $Cat(a) = Cat(b)$ dann gilt $a \simeq^{Cat} b$.*

Beispiel 9. *Die Anwendung der Categorizer-Funktion auf das AF aus Abbildung 1 ergibt folgende Werte:*

$$Cat(a) = 1$$

$$Cat(b) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$Cat(d) = \frac{1}{1+Cat(d)}$$

$$\Rightarrow Cat(d)^2 + Cat(d) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow Cat(d^+) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62 \qquad \textit{wird } Cat(d).$$

$$\Rightarrow Cat(d^-) = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \approx -1.62 \qquad \textit{verworfen, da } \notin (0, 1].$$

$$Cat(c) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+4}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+4} \approx 0.32$$

Womit sich die Reihung $a \succ^{Cat} d \succ^{Cat} b \succ^{Cat} c$ ergibt und die Categorizer-Funktion auf diesem Argumentationsframework wohl definiert ist .

2.3 Serialisierungs basierte Semantik

Von Blümel und Thimm [BT22] eingeführte Semantik, welche jedem Argument einen Rang zuweist, welcher davon abhängt wie viele Schritte mindestens nötig sind, um anhand der so genannten Initialen Sets [XC16] das gegebene Argument zu akzeptieren.

Um ein initiales Set zu erhalten, benötigt man alle *akzeptablen Knotenmengen* eines Argumentationsframeworks. Dabei ist eine Menge an Knoten S akzeptabel, wenn kein Knoten aus S einen anderen Knoten aus S angreift und alle Knoten, die nicht in S liegen, aber einen Knoten von S angreifen ebenfalls von einem Knoten aus S angegriffen werden.

Definition 9. *Für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R \rangle$ ist eine Menge $S \subseteq A$ eine* ***akzeptable Knotenmenge*** *wenn für alle $a, b \in S$ gilt $(a, b) \notin R$ und für alle $(c, d) \in R$ mit $c \in A \setminus S$ und $d \in S$ gibt es ein $e \in S$ mit $(e, c) \in R$.*

Beispiel 10. *Die einzige akzeptable Knotenmenge aus dem Argumentationsframework aus Abbildung 1 ist $\{a\}$. Denn d greift sich selbst an und die Knoten b und c können sich nicht gegen den Knoten a verteidigen.*

Die *initialen Sets* sind die akzeptablen Knotenmengen, von denen keine andere akzeptable Knotenmenge eine Teilmenge ist.

Definition 10. *Für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R \rangle$ ist eine Menge $S \subseteq A$ ein* ***initiales Set****, wenn $S \neq \emptyset$ und akzeptabel ist und es keine akzeptable Menge $S' \subset S$ mit $S' \neq \emptyset$ gibt.*

Die Menge der initialen Sets eines Argumentationsframeworks F bezeichnen wir als IS(F).

Beispiel 11. *Das einzige initiale Set aus dem Argumentationsframework aus Abbildung 1 ist $\{a\}$. Da es die einzige, nicht leere, akzeptable Knotenmenge ist, kann es auch keine Teilmenge einer anderen akzeptablen Knotenmenge sein und ist daher auch minimal.*

Ein *Redukt* [BBU20] eines Argumentationsframeworks bezüglich einer Knotenmenge S ist die Menge der Knoten die übrig bleiben, wenn man aus dem Argumentationsframework alle Knoten aus S und alle Knoten die von S angegriffen werden entfernt. Zusätzlich müssen noch alle Angriffe die S bzw. S^+ betreffen entfernt werden.

Definition 11. *Für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R \rangle$ und eine Menge $S \subseteq A$ ist $S^+ = \{b \mid (a, b) \in R \text{ und } a \in S\}$ die Menge der Knoten, die von S angegriffen werden.*

Beispiel 12. *Sei $S = \{a, b\}$ aus dem Argumentationsframework aus Abbildung 1. Dann ist $S^+ = \{b, c\}$*

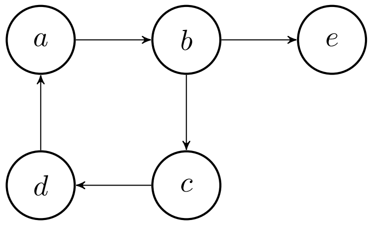

Abbildung 8: $F = \langle A, R\rangle$ mit $A = (a, b, c, d, e)$ und $R = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, d), (d, a)\}$

Definition 12. *Für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R\rangle$ und einer Menge $S \subseteq A$ ist das Redukt von S das AF $F^S = \langle A', R'\rangle$ mit der Knotenmenge $A' = A \setminus (S \cup S^+)$ und die Angriffsrelationen-Menge $R' = \{(a, b) \mid (a, b) \in R \text{ und } a, b \in A'\}$.*

Beispiel 13. *Da unser Standardbeispiel aus Abbildung 1 hier keine Aussagekraft hat, verwenden wir das Argumentationsframework aus Abbildung 8 für dieses Beispiel. Die Menge der Initiales Sets ist $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$. Sei nun $S = \{a, c\}$ dann ist das Redukt $F^S = \langle\{e\}, \emptyset\rangle$ und das Redukt für $\{b, d\}$ ist $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$.*

Eine *Serialisierungssequenz* ist eine schrittweise Erweiterung einer Knotenmenge eines Initialen Sets eines Argumentationsframeworks um einen Knoten zu akzeptieren, welcher nicht in dem Initialen Set enthalten ist.

Definition 13. *Eine Serialisierungssequenz für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R\rangle$ ist eine Sequenz $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ mit $S_1 \in IS(AF)$ und für jedes $2 \geq i \geq n$ ist $S_i \in IS(AF^{S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1}})$.*

Da unser Standardbeispiel aus Abbildung 1 hier wieder keine Aussagekraft hat, verwenden wir nochmals Argumentationsframework aus Abbildung 8 für dieses Beispiel.

Beispiel 14. *Die Initialen Sets für dieses AF sind $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$. Eine Serialisierungssequenz für e ergibt sich, indem man $S_1 = \{a, c\}$ wählt. Dann ist $IS(F^{S_1}) = \{\{e\}\}$ und $S_2 = \{e\}$. Somit ergibt sich eine Serialisierungssequenz $\mathcal{S} = (\{a, c\}, \{e\})$.*

Definition 14. *Für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R, \rangle$ mit den akzeptablen Knotenmengen M ist der **Serialisierungsindex** $Ser(a)$ definiert als*

$$Ser(a) = \begin{cases} a \in M & \mathit{min}\ \{n | (S_1, \ldots S_n) \text{ ist eine Serialisierungssequenz und } a \in S_n\} \\ \mathit{sonst} & \infty \end{cases}$$

Definition 15. *Die **Serialisierungs basierte Semantik** weißt einem Argumentationsframework $F = \langle A, R\rangle$ ein Ranking $\succeq^{Ser}$ auf A zu, so dass für alle $a, b \in A$ gilt, wenn $Ser(a) \leq Ser(b)$ dann gilt $a \succeq^{Ser} b$.*

Beispiel 15. *Die Anwendung der Serialisierungs-Funktion auf das AF aus Abbildung 1 ergibt folgende Werte:*

$Ser(a) = 1$ *da im (einzigen) Initialen Set* $\{a\}$.

$Ser(b) = \infty$ *da fix nicht akzeptiert*

$Ser(c) = \infty$ *da fix nicht akzeptiert*

$Ser(d) = \infty$ *da fix nicht akzeptiert*

Womit sich die Reihung $a \succ^{Ser} b \simeq^{Ser} c \simeq^{Ser} d$ *ergibt und die Serialisierungs-Funktion auf diesem Argumentationsframework wohldefiniert ist .*

2.4 Discussion-based Semantik

Von Amgoud und Ben-Naim [LSW13] eingeführte Semantik, welche die Pfade, die bei dem Argument enden, zählt. Bei Knoten mit gleichem Wert, werden die Pfade schrittweise erweitert.

Definition 16. *Die* ***Discussion-based-Funktion*** Dis *weißt jedem Argument aus einem Argumentationsframework* $F = \langle A, R \rangle$ *einen Wert anhand der an dem Argument endenden Pfade zu.*

$$Dis_i(a) = \begin{cases} -|R_i^+(a)| & \textit{wenn } i \textit{ gerade ist} \\ |R_i^-(a)| & \textit{wenn } i \textit{ ungerade ist} \end{cases}$$

Die Discussion-Nummer von a wird geschrieben als $Dis(a) = \langle Dis_1(a), Dis_2(a), \dots \rangle$ und wird lexikographisch verglichen.

Definition 17. *Die Ranking-Semantik* ***Discussion based Semantik*** *weißt einem* $F = \langle A, R \rangle$ *ein Ranking* $\succeq^{Dis}$ *auf* A *zu, so dass für alle* $a, b \in A$ *gilt, wenn* $Dis(a) \leq Dis(b)$ *dann gilt* $a \succeq^{Dis} b$.

Beispiel 16. *Die Anwendung der Discussion based Semantik-Funktion auf das AF aus Abbildung 1 ergibt folgende Werte:*

Schritt	*a*	*b*	*c*	*d*
1	***0***	*1*	***3***	*1*
2	0	***0***	-2	***-1***

Womit sich die Reihungen $a \succ^{Dis} d \succ^{Dis} b \succ^{Dis} c$ *ergibt und die Discussion based Semantik-Funktion auf diesem Argumentationsframework wohl definiert ist .*

2.5 Burden-based Semantik

Von Amgoud und Ben-Naim [LSW13] eingeführte Semantik, die bei jedem Schritt i eine Burden-Nummer zuweist, die von den Burden-Nummern der direkten Angreifer abhängt.

Definition 18. *Die **Burden-based-Funktion** Bur weißt jedem Argument aus einem Argumentationsframework $F = \langle A, R \rangle$ einen Wert in Abhängigkeit der direkten Angreifer zu.*

$$Bur_i(a) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } i = 0 \\ 1 + \sum_{b \in R_1^-(a)} \frac{1}{Bur_{i-1}(b)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Die Burden Nummer von a wird geschrieben als $Bur(a) = \langle Bur_0(a), Bur_1(a), \dots \rangle$ und zwei Argumente werden lexikographisch aufgrund ihrer Burden-Nummern verglichen.

Definition 19. *Die Ranking-Semantik **Burden-based Semantik** weißt einem $F = \langle A, R \rangle$ ein Ranking $\succeq^{Bur}$ auf A zu, so dass für alle $a, b \in A$ gilt, wenn $Bur(a) \leq Bur(b)$ dann gilt $a \succeq^{Bur} b$.*

Beispiel 17. *Die Anwendung der Burden-based Semantik-Funktion auf das AF aus Abbildung 1 ergibt folgende Werte:*

Schritt	*a*	*b*	*c*	*d*
1	***1***	*2*	***4***	*2*
2	*1*	**2**	*3*	***1.5***

Womit sich die Reihungen $a \succ^{Bur} d \succ^{Bur} b \succ^{Bur} c$ ergibt und die Burden-based Semantik-Funktion auf diesem Argumentationsframework wohl definiert ist.

3 Vorgehen

Um zu untersuchen ob Ranking-Semantiken auf unendlichen Argumentationsframeworks und auf finitary Argumentationsframeworks anwendbar sind, werde ich unterschiedliche Semantiken im einzelnen testen und prüfen ob sie wohldefiniert sind oder nicht. Eine Ranking-Semantik ist auf unendlichen Argumentationsframeworks wohldefiniert, wenn sie jedem Argumentationsframework ein eindeutiges Ranking zuweist. Gleiches gilt für Finitary Argumentationsframeworks, welche hier hauptsächlich betrachtet werden.

Wenn eine Semantik in einem Fall nicht wohldefiniert ist, dann ist sie auch nicht allgemein wohldefiniert.

4 Ranking Semantiken auf unendlichen Argumentationsframeworks

4.1 Categorizer

Als erstes untersuchen wir den Categorizer (2.2) indem wir ihn auf einige Argumentationsframeworks anwenden.

Beispiel 18. *Als erstes wenden wir den Categorizer auf das Argumentationsframework aus Abbildung 4 an.*

$$Cat(a_0) = 1$$
$$Cat(a_i) = \frac{1}{1 + Cat(a_{i-1})} \qquad i \in \mathbb{N}, i > 0$$

Proposition 1. *Für das Argumentationsframework aus Abbildung 4 ist der Categorizer wohldefiniert. Es gilt dass Knoten mit einem geraden Index ein höheres Ranking unter dem Categorizer haben, als alle Knoten mit einem höheren, geraden Index. Umgekehrt gilt für Knoten mit ungeraden Index, dass dort alle Knoten mit höherem, ungeradem Ranking, ein höheres Ranking haben.*

Beweis. Wir beweisen per Induktion über den Index, dass $Cat(a_{2i}) > Cat(a_{2i+2})$ also $a_{2i} \succ^{Cat} a_{2i+2}$ mit $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Für $Cat(a_0) = 1$ und $Cat(a_2) = \frac{2}{3}$ stimmt die Aussage da $Cat(a_0) > Cat(a_2)$ ist, dies ist der Induktionsanfang.

$$\begin{array}{rrcl}
 & Cat(a_{2i}) & > & Cat(a_{2i+2}) \\
\Rightarrow & 1 + Cat(a_{2i}) & > & 1 + Cat(a_{2i+2}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{1+Cat(a_{2i})} & < & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+2})} \\
\Rightarrow & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+2})} & > & \frac{1}{1+Cat(a_{2i})} \\
\Rightarrow & Cat(a_{2i+3}) & > & Cat(a_{2i+1}) \\
\Rightarrow & 1 + Cat(a_{2i+3}) & > & 1 + Cat(a_{2i+1}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+3})} & < & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+1})} \\
\Rightarrow & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+1})} & > & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+3})} \\
\Rightarrow & Cat(a_{2i+2}) & > & Cat(a_{2i+4})
\end{array}$$

□

Der Beweis von $a_{2i+1} \prec a_{2i+3}$ lässt sich analog durchführen.

Proposition 2. *Für das Argumentationsframework aus Abbildung 4 gilt dass ein Knoten mit einem geraden Index ein höheres Ranking hat als der Knoten mit dem nächst höheren Index.*

Dazu beweisen wir als erstes per Induktion über den Index, dass $Cat(a_{2i}) > Cat(a_{2i+1})$ gilt.

Beweis. Es gilt $Cat(a_0) = 1 > \frac{1}{2} = Cat(a_1)$ für $i = 0$. Dies sei unser Induktionsstart.

$$\begin{array}{rrcl}
 & Cat(a_{2i}) & > & Cat(a_{2i+1}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{1+Cat(a_{2i})} & < & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+1})} \\
\Rightarrow & Cat(a_{2i+1}) & < & Cat(a_{2i+2}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+1})} & > & \frac{1}{1+Cat(a_{2i+2})} \\
\Rightarrow & Cat(a_{2i+2}) & > & Cat(a_{2i+3})
\end{array}$$

□

Proposition 3. *Für das Argumentationsframework aus Abbildung 4 gilt dass ein Knoten mit einem geraden Index ein höheres Ranking hat als alle Knoten mit einem ungeraden Index.* $Cat(a_{2i}) > Cat(a_{2j+1})$ *mit* $i, j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wegen Proposition 1 hat jeder Knoten mit geradem Index ein niedrigeres Ranking als alle geraden Knoten mit niedrigerem, geraden, Index. Ebenfalls wegen Proposition 1 hat jeder Knoten mit ungeradem Index ein höheres Ranking als alle Knoten mit ungeradem und niedrigerem Index. Mit Proposition 2 erkennt man, dass alle Knoten mit geradem Index ein höheres Ranking haben als alle Knoten mit ungeradem Index. Denn wäre $a_{2i} \prec a_{2j+1}$, mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann gäbe es einen Knoten a_{2i+1} mit $a_{2i} \succ a_{2i+1}$ und einen Knoten a_{2j} mit $a_{2j} \succ a_{2j+1}$.

Sei $i < j$ dann ist mit Proposition 1 $a_{2j} \prec a_{2i}$ und weiter $a_{2j} \prec a_{2i} \prec a_{2j+1}$. Ein Widerspruch zu Proposition 2.

Sei nun $i = j$, dann wäre $a_{2j} = a_{2i} \prec a_{2i+1}$. Ein Widerspruch zu Proposition 2.

Der Fall $i > j$ lässt sich analog zu $i < j$ beweisen. □

Anhand der Proposition 1 u. 3 erkennen wir, dass jeder Knoten mit jedem vergleichbar ist. Daher ist der Categorizer auf dem Argumentationsframework aus Abbildung 4 wohldefiniert.

Beispiel 19. *Für das Argumentationsframework aus Abbildung 5 ergibt die Categorizer-Funktion folgende Werte*

$$Cat(b_i) = 1$$
$$Cat(a_0) = \frac{1}{1 + Cat(b_0)} = \frac{1}{2}$$
$$Cat(a_i) = \frac{1}{1 + Cat(b_i) + Cat(a_{i-1})} = \frac{1}{2 + Cat(a_{i-1})} \qquad i \in \mathbb{N}, i > 0$$

Da alle $b_i = 1$ und $a_i < 1$ sind, gilt $b_i \simeq b_j$ und $b_i \succ a_j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ Bei den a-Knoten ist wieder keine direkte Ordnung anhand des Index möglich, da $a_0 = \frac{1}{2}(0.5), a_1 = \frac{2}{5}(0.4)$ und $a_2 = \frac{5}{12}(\approx 0.42)$.

die Berechnung von $a_i \mid i \in \mathbb{N}$ erfordert i rekursive Aufrufe der Categorizer-Funktion. Daher lässt sich jedes a_i berechnen und alle Knoten sind miteinander vergleichbar. Somit ist der Categorizer auf diesem Argumentationsframework wohldefiniert.

Für das Argumentationsframework aus Abbildung 5 lässt sich analog zu Abbildung 4 beweisen, dass der Categorizer auf diesem Framework wohldefiniert ist.

Beispiel 20. *Für das Argumentationsframework aus Abbildung 7 ergibt die Categorizer-Funktion folgende Werte*

$$\begin{array}{lclclcl}
Cat(a_0) & = & \frac{1}{1+Cat(d_0)} & \textit{und} & Cat(a_{i+1}) & = & \frac{1}{1+Cat(b_i)+Cat(d_{i+1})} \\
Cat(b_0) & = & \frac{1}{1+Cat(a_0)} & \textit{und} & Cat(b_{i+1}) & = & \frac{1}{1+Cat(a_{i+1})} \\
Cat(c_0) & = & \frac{1}{1+Cat(b_0)} & \textit{und} & Cat(c_{i+1}) & = & \frac{1}{1+Cat(b_{i+1})} \\
Cat(d_0) & = & \frac{1}{1+Cat(c_0)} & \textit{und} & Cat(d_{i+1}) & = & \frac{1}{1+Cat(c_{i+1})}
\end{array}$$

Wenn wir dies nun konsequent einsetzten, um a_i zu ermitteln kommen wir auf folgende Formel:

$$Cat(a_0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(a_0)}}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57$$

$$Cat(b_0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(b_0)}}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57$$

$$Cat(c_0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(c_0)}}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57$$

$$Cat(d_0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(d_0)}}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57$$

$$Cat(a_{i+1}) = \frac{1}{1 + Cat(b_i) + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(a_{i+1})}}}} \qquad Cat(a_1) \approx 0.438 \tag{1}$$

$$Cat(b_{i+1}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+Cat(b_i)+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(b_{i+1})}}}} \qquad Cat(b_1) \approx 0.664 \tag{2}$$

$$Cat(c_{i+1}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(b_i)+\frac{1}{1+Cat(c_{i+1})}}}} \qquad Cat(c_1) \approx 0.565 \tag{3}$$

$$Cat(d_{i+1}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+Cat(b_i)+Cat(d_{i+1})}}}} \qquad Cat(d_1) \approx 0.607 \tag{4}$$

Da die Knoten mit dem Index 0 eindeutig definiert sind, und sich alle Knoten mit höherem Index durch mehrmaliges anwenden der Formeln aus 1 bis 4 herleiten lassen, kann man jedem Knoten einen eindeutigen Wert zuweisen. Dadurch ist der Categorizer auf diesem Argumentationsframework wohldefiniert.

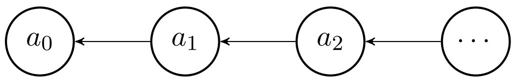

Abbildung 9: $F = \langle A, R\rangle$ mit $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $R = \{(a_{i+1}, a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Um zu sehen wie sich der Categorizer auf finitary Argumentationsframeworks verhält, die keinen nicht angegriffenen Knoten, und somit keinen direkten Startpunkt zur

Berechnung der Categorizer-Funktion aufweisen, sehen wir uns das AF aus Abbildung 9 an.

Proposition 4. *Der Categorizer ist auf das Argumentationsframework aus Abbildung 9 nicht anwendbar.*

Beweis. Um $Cat(a_0)$ zu berechnen benötigen wir den Wert $Cat(a_1)$. Um jedoch $Cat(a_1)$ zu ermitteln wird $Cat(a_2)$ benötigt. Dies lässt sich unendlich fortführen. So, dass es uns nicht möglich ist, das Ergebnis der Categorizer-Funktion auf ein beliebiges $a_i \in A$ zu bestimmen. $\square$

Proposition 5. *Der Categorizer ist nicht auf allen finitary Argumentationsframeworks wohldefiniert.*

Beweis. Da der Categorizer nicht auf das Argumentationsframework aus Abbildung 9 anwendbar ist, ist er auch nicht auf allen finitary AF's wohldefiniert. $\square$

Da es nicht möglich ist, die Berechnung des Categorizers für das AF aus Abbildung 9 bis in die Unendlichkeit fortzuführen, müssen wir uns hier eine Anpassung überlegen.

Eine Möglichkeit wäre, die Anzahl der zu berücksichtigenden Knoten auf einen bestimmten Wert zu fixieren. Die Anzahl der Knoten wäre dann aber willkürlich gewählt. Wie weit sollte dann in dem Argumenatationsframework aus Abbildung 10 der Einfluss des Knoten b reichen.

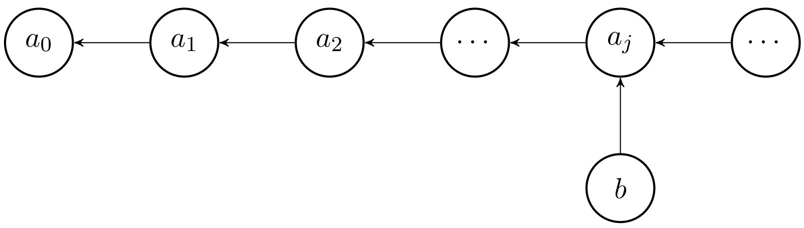

Abbildung 10: $F = \langle A, R \rangle$ mit $A = \{a_i, b\} \mid i \in \mathbb{N}$ und $R = \{(a_{i+1}, a_i), (b, a_j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

Eine zweite Möglichkeit wäre, die Berechnung schrittweise durchzuführen, aber erst zu beenden, wenn sich der Wert von einem Schritt auf den anderen nur noch gering ändert. Dies erfordert Anpassung der Categorizer-Funktion:

$$Cat^1_n(a) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } R_1^-(a) = \emptyset \text{ oder wenn } n = 0 \\ \frac{1}{1+\sum_{c \in R_1^-(a)} Cat^1_{n-1}(c)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $n \in \mathbb{N}$ und die Berechnung wird so lange fortgeführt, bis für eine zuvor definierte, Zahl $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\mid Cat^1_n(a) - Cat^1_{n+1}(a) \mid < \varepsilon$.

Diese Methode scheint zu funktionieren. Bei allen Versuchen galt $Cat^1_{2i}(a) \geq Cat^1_{2i+2}(a)$ und $Cat^1_{2i+1}(a) \leq Cat^1_{2i+3}(a)$. Dass die geraden Indizes und die ungeraden Indizes auf den gleichen Wert konvergieren lies sich jedoch nicht allgemein nachweisen. Wodurch auch $|Cat_i^1(a) - Cat_{i+1}^1(a)| \geq |Cat_{i+1}^1(a) - Cat_{i+2}^1(a)|$ nicht nachweisbar war und ein Pendeln zwischen zwei Werten $> \varepsilon$ nicht ausgeschlossen werden kann.

Der dritte Ansatz wäre es, die Berechnung rekursiv zu gestalten und dabei einen fixen Startwert für den ersten Schritt zu verwenden und so lange zu berechnen, bis der Knoten einen anderen Wert hat, als der zu vergleichende Knoten. Dies würde den Categorizer aber stark an die Burden-based Semantik angleichen. Daher ist dies ein Ansatz der hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Da die finitary Argumentationsframeworks eine Teilmenge der unendlichen Argumentationsframeworks sind, ist der Categorizer auch auf allen unendlichen Argumentationsframeworks wohldefiniert.

Proposition 6. *Der Categorizer ist nicht auf allen unendlichen Argumentationsframeworks wohldefiniert.*

Beweis. Da der Categorizer auf das AF aus Abbildung 9 nicht anwendbar ist, und dieses Argumenatationsframework ein unendliches Argumenatationsframework ist, ist der Categorizer nicht auf allen unendlichen AF's wohldefiniert. □

4.2 Serialisierungs basierte Semantik

Als nächstes untersuchten wir die Serialisierungs basierte Semantik (2.3) indem wir sie auf einige Argumentationsframeworks anwenden.

Um die Serialisierungs basierte Semantik auf finitary und unendlichen Argumentationsframeworks anzuwenden, muss erst sicher gestellt werden, dass das Initiale Set auf diesen AF's auch definiert ist. Dazu sehen wir uns als erstes an, ob die akzeptable Knotenmengen wohldefiniert ist und leiten aus deren Existenz dann ab, dass initiale Sets ebenfalls wohldefiniert sind.

Proposition 7. *Auf einem unendlichen Argumentationsframework ist eine akzeptable Knotenmenge definiert.*

Beweis. Da die leere Knotenmenge $\{\emptyset\}$ immer akzeptiert wird, gibt es in auch in unendlichen Argumentationsframeworks mindestens eine akzeptable Knotenmenge. □

Mit den akzeptablen Knotenmengen auf unendlichen Argumentationsframeworks, können wir nun auch die initialen Sets auf unendlichen AF's definieren.

Proposition 8. *Auf einem unendlichen Argumentationsframework sind die initialen Sets wohldefiniert.*

Der Beweis wurde aus einer Arbeit von Baumann ([BS15]) übernommen, in der er zeigt, dass bevorzuge Extensions auf unendlichen Argumentationsframeworks wohldefiniert sind. Er baut hauptsächlich auf *Zorn's Lemma* ([Zor35]) auf. Um das Paper in sich geschlossen zu halten, rekapitulieren wir das Lemma nochmal.

Lemma 1. *Gegeben sei eine teilweise geordnete Menge $(P, \leq)$. Wenn eine $\leq$-Kette eine Obergrenze hat, dann hat $(P, \leq)$ ein maximales Element.*

Anhand dieses Lemmas ist leicht zu erkennen, dass die folgende, strengere, Version äquivalent zu Zorn's Lemma ist.

Lemma 2. *Gegeben sei eine teilweise geordnete Menge* $(P, \leq)$*. Wenn eine* $\leq$*-Kette eine Obergrenze hat, dann gilt für ein beliebiges* $p \in P$*, dass es ein maximales Element* $m \in P$ *gibt, für welches* $p \leq m$ *gilt.*

Definition 20. *Sei* $F = \langle A, R \rangle$ *ein unendliches Argumentationsframework und* $E \subseteq A$*. Wenn* E *in den akzeptablen Knotenmengen von* F *enthalten ist, dann gibt es ein* E' *in den initialen Sets, mit* $E' \subseteq E$*.*

Definition 21. *Sei* K *die Menge der Akzeptablen Knotenmengen eines beliebigen Argumentationsframeworks* F*, dann ist* $ad(F) = K$*.*

Beweis. Betrachten wir nun die partiell geordneten Fragmente $\mathcal{A} = (ad(F), \subseteq)$. Mittels Lemma 2 ist die Existenz einer initialen Obermenge garantiert, wenn eine $\subseteq$-Kette eine Obergrenze in $\mathcal{A}$ hat. Sei nun eine $\subseteq$-Kette $(E_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Dann sei $E = \cup_{i \in I} E_i$.

Offensichtlich ist E eine Obergrenze von $(E_i)_{i \in I}$ für ein beliebiges $i \in I$. Nun müssen wir noch zeigen dass E eine akzeptable Knotenmenge ist. Dies heißt, wenn es zwei widersprüchliche Argumente $a, b \in E$ gibt, müsste es ein $i \in I$ mit $a, b \in E_i$ geben.

Nehmen wir nun an, dass E keine akzeptable Knotenmenge ist. Folglich gibt es ein $a \in E$, das nicht durch E verteidigt wird. Daher haben wir für ein $i \in I$ ein $a \in E_i$, was der Zulässigkeit von E_i widerspricht. □

Beispiel 21. *Die Anwendung der Serialisierungs basierten Semantik auf das AF aus Abbildung 4 ergibt die Werte*

$$Ser(a_{2n}) = \frac{n}{2} + 1$$
$$Ser(a_{2n+1}) = \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Und somit haben die Knoten des AF die Reihung* $a_{2i} \succ^{Ser} a_j, a_{2i+1} \simeq^{Ser} a_{2i+3}$ *mit* $i, j, \in \mathbb{N}$ *und* $j > i$*.*

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Serialisierungs basierte Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 22. *Die Anwendung der Serialisierungs basierten Semantik auf das AF aus Abbildung 5 ergibt die Werte*

$$Ser(a_n) = \infty$$
$$Ser(b_n) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Und somit haben die Knoten des AF die Reihung* $b_i \succ^{Ser} a_j, a_k \simeq^{Ser} b_l, b_m \simeq^{Ser} b_m$ *mit* $i, j, k, l, m, n \in \mathbb{N}$*.*

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Serialisierungs basierte Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 23. *Die Anwendung der Serialisierungs basierten Semantik auf das AF aus Abbildung 7 ergibt die Werte*

$$Ser(a_n) = n + 1$$
$$Ser(b_n) = 1$$
$$Ser(c_n) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } n = 0 \\ i + 2 & \textit{sonst} \end{cases}$$
$$Ser(d_n) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Und somit hat jeder Knoten des AF einen eindeutigen Serialisierungsindex.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Serialisierungs basierte Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 24. *Wenn wir die Serialisierungs basierte Semantik auf das AF aus Abbildung 2 anwenden erhalten wir folgende Werte:*

$$Ser(a) = \infty$$
$$Ser(b_n) = 1 \qquad \textit{mit } n \in \mathbb{N}$$

und hat somit die Reihung $b_i \simeq^{Ser} b_j$ und $b_k \succ^{Ser} a$ mit $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Serialisierungs basierte Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 25. *Die Anwendung der Serialisierungs basierten Semantik auf das AF aus Abbildung 3 ergibt die Werte*

$$Ser(a_n) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Womit die Knoten die Reihung $a_i \simeq^{Ser} a_j$ mit $i, j, \in \mathbb{N}$ haben.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Serialisierungs basierte Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 26. *Da die bisherigen Beispiele nicht sehr aussagekräftig waren, wenden wir die Semantik nun noch auf das Argumentationsframework aus Abbildung 11 an.*

$$Ser(a) = \infty \qquad \textit{da } \infty \textit{ Schritte nötig sind}$$
$$Ser(b_n) = \infty \qquad \textit{da nicht akzeptiert}$$
$$Ser(c_n) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies führt zu dem unerwünschten Ergebnis $a \simeq^{Ser} b_i i \in \mathbb{N}$, denn alle b_i sind unter keinen Umständen akzeptabel, a kann jedoch akzeptiert werden, da alle c_i akzeptabel sind.

Proposition 9. *Die Serialisierungs basierte Semantik liefert nicht auf allen unendlichen Argumentationsframeworks ein erwünschtes Ranking.*

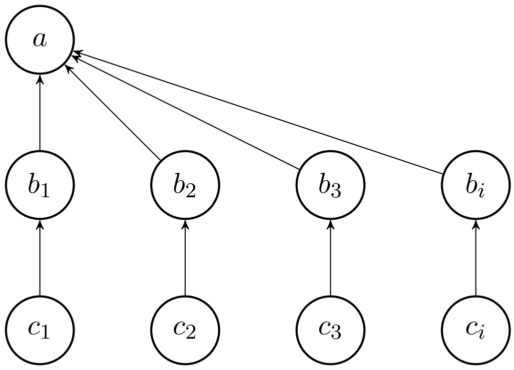

Abbildung 11: $F = \langle A, R \rangle$ mit $A = (a, b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $R = \{(b_i, a), (c_i, b_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Bei dem Argumentationsframework aus Abbildung 11 wird das Symbol ∞ sowohl für die nicht akzeptierten Knoten verwendet, als auch für den Knoten bei dem eine unendliche Anzahl an Schritten nötig ist um ein initiales Set zu erweitern, damit dieser akzeptabel ist. Womit diese Knoten das gleiche Ranking bekommen. Um dieses unerwünschte Verhalten zu verhindern, benötigen wir eine **unendliche Serialisierungssequenz**.

Definition 22. *Sei $F = \langle A, R \rangle$ ein Argumentationsframework und $IS(F)$ die Menge der initialen Sets von F. Eine unendliche Serialisierungssequenz ist definiert als eine unendliche Anzahl an Schritten, um ein Initiales Set $S \subset IS(F)$ zu erweitern, damit ein Knoten $a \in A$ akzeptiert werden kann.*

Beispiel 27. *Um in dem Argumentationsframework aus Abbildung 11 den Knoten a zu akzeptieren, können wir ein beliebiges c_i als initiales Set zu verwenden und schrittweise jedes andere $c_j \mid j \neq i$ des AF's in die Serialisierungssequenz aufzunehmen.*

Da es unendlich viele c_j in diesem Argumentationsframework gibt, wird auch eine unendliche Anzahl an Schritten benötigt und somit eine unendliche Serialisierungssequenz.

Da wir nun eine unendliche Serialisierungssequenz definiert haben, benötigen wir noch eine Unterscheidung zu Knoten die nicht akzeptabel sind. Hierzu führen wir das Symbol ∞^+ für Knoten ein, die in keine Serialisierungssequenz aufgenommen werden können.

Definition 23. *Das Symbol ∞^+ hat in der Serialisierungs basierten Semantik ein schlechteres Ranking als ∞.*

Um die Serialisierungs basierte Semantik auf Argumentationsframeworks anzuwenden benötigen wir einen angepassten Serialisierungsindex $Ser^1(a)$.

Definition 24. *Für ein Argumentationsframework $F = \langle A, R, \rangle$ mit den akzeptablen Knotenmengen M ist der angepasste Serialisierungsindex $Ser^1(a)$ definiert als*

$$Ser^1(a) = \begin{cases} a \in M & \textit{min } \{n | (S_1, \ldots S_n) \textit{ ist eine Serialisierungssequenz und } a \in S_n\} \\ \textit{sonst} & \infty^+ \end{cases}$$

Beispiel 28. *Wenden wir nun den angepassten Serialisierungsindex Ser^1 auf das Argumentationsframework aus Abbildung 11 an.*

$$Ser(a) = \infty \qquad \text{da unendliche Serialisierungssequenz}$$
$$Ser(b_n) = \infty^+ \qquad \text{da nicht akzeptiert}$$
$$Ser(c_n) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies führt zu dem Ergebnis $c_i \simeq^{Ser^1} c_j \succ^{Ser^1} a \succ^{Ser^1} b_k \simeq^{Ser^1} b_l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}$.

Dieses Ergebnis entspricht unseren Erwartungen besser als das Ranking, welches durch die Anwendung von Ser erstellt wurde. Denn auch wenn eine unendliche Anzahl von Knoten akzeptiert werden müssen um a zu akzeptieren, ist dies doch wahrscheinlicher als einen Knoten b zu akzeptieren, welcher nicht akzeptiert werden kann.

Da ein erwünschteres Ergebnis bei der Anwendung auf ein einzelnes Argumentationsframework nicht aussagekräftig ist, werden wir uns nun das allgemeine Verhalten auf endlichen und auf Argumentationsframeworks ansehen.

Proposition 10. *Der angepasste Serialisierungsindex Ser^1 liefert auf allen endlichen Argumentationsframeworks das gleiche Ranking wie der originale Index Ser.*

Beweis. Sei $F = \langle A, R \rangle$ ein Argumentationsframework mit einer endlichen Anzahl an Knoten. Dann ist der Serialisierungsindex $Ser(a)$ für einen beliebigen Knoten $a \in A$ endlich da maximal $|A|$ Erweiterungsschritte für ein Initiales Set möglich sind. Nun Gilt $Ser(a) = Ser^1(a)$ da beide Funktionen für einen endlichen Serialisierungsindex den gleichen Wert zurück geben.

Sei nun $b \in A$ ein Knoten welcher nicht in eine Serialisierungssequenz aufgenommen werden kann. Dann gilt $Ser(b) = \infty$ und $Ser^1(b) = \infty^+$. Da, per Definition, ∞ das niedrigste Ranking bei der Anwendung von Ser besitzt und ∞^+ das niedrigste Ranking bei der Anwendung der Funktion Ser^+ hat, hat b in beiden Fällen das schlechteste Ranking. Somit liefern Ser und Ser^1 auf endlichen AF's das gleiche Ranking. □

Proposition 11. *Der angepasste Serialisierungsindex Ser^1 liefert auf allen finitary Argumentationsframeworks das gleiche oder ein besseres Ranking.*

Beweis. Sei $F = \langle A, R \rangle$ ein Argumentationsframework mit einer unendlichen Anzahl an Knoten. Wenn kein Knoten eine unendliche Serialisierungssequenz besitzt, liefern beide Serialisierungsindex das gleiche Ranking.

Wenn es nun Knoten mit unendlichem Serialisierungsindex gibt und alle Knoten in eine Serialisierungssequenz aufgenommen werden können. Dann ist das Ranking ebenfalls identisch, da alle Knoten mit unendlichem Serialisierungsindex sowohl bei Ser (∞) als auch bei Ser^1 (∞^+) das schlechteste Ranking haben.

Gibt es nun Knoten $a \in A$ mit unendlichem Serialisierungsindex und Knoten $b \in A$, welche in keine Serialisierungssequenz aufgenommen werden können. Dann liefert Ser^1 ein besseres Ergebnis. Denn es gilt $Ser(a) = \infty \simeq^{Ser} Ser(b) = \infty$ und $Ser^1(a) = \infty \succ^{Ser^1} Ser^1(b) = \infty^+$. □

4.3 Discussion-based Semantik

Als drittes untersuchen wir die Discussion-based Semantik (2.4) indem wir sie auf einige Argumentationsframeworks anwenden.

Beispiel 29. *Die Anwendung der Discussion-based-Funktion aus Definition 16 auf das AF aus Abbildung 2 ergibt die Werte*

Schritt	a	b_1	b_2	$\cdots$
1	∞	*0*	*0*	*0*
2	0	*0*	*0*	*0*

und somit die Reihung $b_i \simeq^{Dis} b_j$ *und* $b_k \succ^{Dis} a$ *mit* $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Discussion-based Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 30. *Die Anwendung der Discussion-based-Funktion auf das AF aus Abbildung 3 ergibt die Werte* $Dis(a_i) = \langle \infty, -\infty, \infty, -\infty, \dots, \rangle$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$. *Da alle Werte abzählbar unendlich sind, und aufgrund der Konstruktion immer gleich, hat somit die Reihung* $a_i \simeq^{Dis} a_j$ *mit* $i, j \in \mathbb{N}$.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Discussion-based Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 31. *Das AF aus Abbildung 4 kommt auf folgende Werte*

Schritt	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_{i+2}
1	***0***	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*0*	***0***	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
3	*0*	*0*	***0***	*1*	*1*	*1*	*1*
4	*0*	*0*	*0*	***0***	*-1*	*-1*	*-1*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	***0***	*1*	*1*
i	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	$\pm$ *1*
$i+1$	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	***0***

für alle $i \in \mathbb{N}, i > 0$. *Womit sich die Reihung* $a_{2i} \succ^{Dis} a_{2i+n}, a_{2i+1} \prec^{Dis} a_{2i+1+n}$ *mit* $i, n \in \mathbb{N}$ *und* $n > 0$ *ergibt.*

Beweis. Da alle Knoten mit geradem Index ein höheres Ranking als alle Knoten mit höherem Index haben. Und alle Knoten mit ungeradem Index ein niedrigeres Ranking als die Knoten mit höherem Index haben, ist die Discussion-based Semantik auf diesem Argumentationsframework wohldefiniert. □

Beispiel 32. *Für das Argumentationsframework aus Abbildung 5 ergibt die Discussion-based Funktion folgende Werte*

Schritt	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_i	a_{i+1}	b_j
1	***1***	2	2	2	2	2	2	2	*0*
2	*0*	***-1***	-2	-2	-2	-2	-2	-2	*0*
3	*0*	*0*	***1***	2	2	2	2	2	*0*
4	*0*	*0*	*0*	***-1***	-2	-2	-2	-2	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	***1***	2	2	2	*0*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	***-1***	-2	-2	*0*
i	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	$\pm$ ***1***	*0*
$i+1$	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

für alle $i, j \in \mathbb{N}, i > 0$. *Somit hat dieses AF die Reihung* $b_0 \simeq^{Dis} b_i \succ^{dis} a_j$ *und* $a_{2k} \succ^{Dis} a_{2k+n}, a_{2k+1} \prec^{Dis} a_{2k+1+n}$ *mit* $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Discussion-based Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Proposition 12. *Unendliche Vektoren sind lexikographisch vergleichbar.*

Beweis. Ein Vektor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i) \mid a_1, a_2, \ldots, a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ ist lexikographisch kleiner als ein Vektor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_j) \mid b_1, b_2, \ldots, b_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$, wenn beide Vektoren vor einem Index $k \in \mathbb{N}$ gleich sind, aber $a_k < b_k$ ist. □

Proposition 13. *Die Discussion-based Semantik ist auf allen Argumentationsframework wohldefiniert.*

Beweis. Da der Vektor der Funktion Dis ist auf allen Argumentationsframeworks wohldefiniert ist und auch unendliche Vektoren lexikographisch vergleichbar sind, ist diese Semantik auf alle Argumentationsframeworks anwendbar. □

4.4 Burden-based Semantik

Als letztes untersuchen wir die Burden-based Semantik (2.5) indem wir sie auf einige Argumentationsframeworks anwenden.

Beispiel 33. *Die Anwendung von* Bur *auf das AF aus Abbildung 4 kommt auf folgende Werte*

Schritt	a_0	a_1	a_2	a_3	a_i
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*1*	2	2	2	2
3	*1*	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	*1*	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
5	*1*	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

Da der Wert für jeden beliebigen Knoten $a_i \mid i \in \mathbb{N}$ nach $i + 2$ Schritten ermittelt ist, lässt sich jeder Knoten mit jedem vergleichen und die Semantik ist auf diesem Argumentationsframework wohldefiniert.

Beispiel 34. *Durch die Anwendung der Funktion Bur auf das Argumentationsframework aus 5 bekommen wir eine Tabelle mit folgenden Werten*

Schritt	a_0	a_1	a_2	a_3	a_i	b_i
1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	3	3	1
3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	1
4	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	1
5	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{29}{12}$	1

für alle $i \in \mathbb{N}$.

Da der Wert für jeden beliebigen Knoten $a_i \mid i \in \mathbb{N}$ nach $i + 2$ Schritten ermittelt ist, lässt sich jeder Knoten mit jedem vergleichen und die Semantik ist auf diesem Argumentationsframework wohldefiniert.

Proposition 14. *Die Burden-based Semantik ist auf allen finitary AF's wohldefiniert.*

Beweis. Sei $F = \langle A, R \rangle$ ein finitary Argumentationsframework. Um zwei Knoten $a, b \in A$ zu vergleichen, werden die Burden Nummern solange Schrittweise ermittelt bis sie unterschiedlich sind.

Sei $a_i = Bur_i(a) \mid a \in A, i \in \mathbb{N}$ das Ergebnis des Schrittes i zur Ermittlung der Burden Nummer. Dann gilt $1 \leq a_i < \infty$, da jeder Knoten in F nur eine endliche Anzahl an Angreifern hat. Das Gleiche gilt für alle $b_i = Bur_i(b)$. Somit können wir die einzelnen Komponenten der Burden Nummern der beiden Knoten vergleichen.

Wir beginnen mit $Bur_0(a) = Bur_0(b) = 1$ und führen diesen Schritt so lange aus, bis wir zu einem Unterschied kommen. Somit können wir zwei beliebige Knoten in einem finitary Argumentationsframework vergleichen und die Burden-based Semantik ist auf finitary AF's wohldefiniert. □

Beispiel 35. *Die Anwendung der Burden-based Semantik auf den AF aus Abbildung 2 ergibt die Werte*

Schritt	a	b_i
1	1	1
2	∞	0

für alle $i \in \mathbb{N}$. Und hat somit die Reihung $b_i \simeq^{Bur} b_j$ und $b_k \succ^{Bur} a$ mit $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Da alle Knoten zueinander vergleichbar sind, kann die Burden-based Semantik auf dieses Argumentationsframework angewandt werden.

Beispiel 36. *Die Anwendung der Burden-based Semantik auf das Argumentationsframework aus Abbildung 3 führt für jeden Knoten zu dem Vektor $a_i = \langle 1, \infty, 1 + \infty * \frac{1}{\infty}, \ldots \rangle$.*

Proposition 15. *Die Burden-based Semantik ist auf dem Argumentationsframework aus Abbildung 3 nicht wohldefiniert, da $\infty * \frac{1}{\infty}$ nicht definiert ist.*

Um Knoten mit unendlich vielen Angreifern abzubilden führen wir mit ∞^+ als neues Symbol ein.

Definition 25. *Sei i eine beliebige rationale Zahl, dann gilt $\infty^+ > i$ und $\frac{i}{\infty^+} = 0$.*

Um die Burden-based Semantik auf das Argumentationsframework aus Abbildung 3 anwenden zu können, müssen wir Fälle mit unendlich vielen Angreifern durch eine eigene Fallunterscheidung abfangen.

Definition 26. *Die **angepasste Funktion für die Burden-based Semantik** Bur^1 weißt jedem Argument einen Wert zu.*

$$Bur_i^1(a) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } i = 0 \\ \infty^+ & \textit{wenn } i \neq 0 \textit{ und } |R_1^-(a)| = \infty \\ 1 + \sum_{b \in R_1^-(a)} \frac{1}{Bur_{i-1}^1(b)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Proposition 16. *Die Burden-based Semantik mit der angepassten Funktion Bur^1 ist auf dem Argumentationsframework aus Abbildung 3 wohldefiniert.*

Beweis. Der Vektor für alle a_i mit $i \in \mathbb{N}$ lautet $\langle 1, \infty^+, \infty^+, \dots \rangle$. Dadurch sind alle Knoten mit einander vergleichbar und die Burden-based Semantik ist auf dem Argumentationsframework wohldefiniert. □

Da eine Anpassung der Semantik für ein einzelnes Argumentationsframework nicht reicht, müssen wir noch prüfen ob Bur^1 überall dort wohldefiniert ist, wo es auch Bur ist.

Proposition 17. *Die angepasste Funktion Bur^1 liefert auf allen Argumentationsframeworks auf denen die originale Funktion Bur wohldefiniert ist die gleichen Ergebnisse.*

Beweis. Beim ersten Schritt ($i = 0$) liefern beide Semantiken für jeden Knoten den Wert 1, sind also gleichwertig. Für alle weiteren Schritte liefern ebenfalls beide Semantiken für jeden Knoten mit einer endlichen Anzahl an Angreifern den gleichen Wert. Hier sind sie also ebenfalls gleichwertig.

Wenn nun ein beliebiger Knoten eine unendliche Anzahl an Angreifern hat, ist die Semantik Bur nicht mehr wohldefiniert, da im zweiten Schritt $1 + \infty * \frac{1}{\infty}$ berechnet werden müsste, und dies ist nicht definiert. Die erweiterte Semantik Bur^1 weißt im zweiten, und allen weiteren, Schritten schon den Wert ∞ zu, und ist somit wohldefiniert. □

Als nächstes untersuchen wir, ob die Burden-based Semantik mit der angepassten Funktion Bur^1 auf allen Argumentationsframeworks wohldefiniert ist.

Proposition 18. *Die Burden-based Semantik mit der Funktion Bur^1 ist auf allen Argumentationsframeworks wohldefiniert.*

Beweis. Da die Funktion Bur^1 auf allen endlichen und finitary Argumentationsframeworks das gleiche Ergebnis liefert wie die original Funktion, ist sie auf diesen AF's wohldefiniert.

Bleiben noch die unendlichen Argumentationsframeworks. Wenn nun ein Knoten eine unendliche Anzahl an Angreifern hat, bekommen alle Elemente seiner Burden Nummer, ab dem zweiten, den Wert ∞^+ zugewiesen. Somit ist jeder Knoten mit einem beliebigen anderen Knoten vergleichbar und die Burden-based Semantik ist auf allen unendlichen Argumentationsframeworks wohldefiniert. □

5 Zusammenfassung

Die Untersuchung hat ergeben, dass nur drei der vier Ranking Semantiken ohne weiteres auf finitary Argumentationsframeworks anwendbar sind. Wobei die Serialisierungs basierte Semantik noch eine kleine Anpassung benötigte um unerwünschte Ergebnisse zu vermeiden.

Der **Categorizer** ist nur auf den endlichen Argumentationsframeworks wohldefiniert. Auf den finitary Argumentationsframeworks lies sich ein konkretes Beispiel finden, auf dem der Categorizer nicht wohldefiniert ist. Trotz aller Bemühungen gelang es nicht eine Anpassung zu finden, die nachweislich auf allen finitary AF's wohldefiniert ist.

Die **Serialisierungs basierte Semantik** ist auf allen Argumentationsframeworks wohl definiert. Sie hat jedoch den Nachteil, dass sie unendliche Serialisierungssequenzen mit nicht akzeptablen Knoten gleich setzt und dadurch ein unerwünschtes Verhalten zeigt. Um dies zu umgehen haben wir ein neues Symbol für nicht akzeptable Knoten eingeführt und den Serialisierungsindex angepasst damit nicht akzeptablen Knoten ein schlechteres Ranking als eine unendliche Serialisierungssequenz haben. Durch diese Anpassung liefert die Serialisierungs basierte Semantik auf finitary und unendlichen Argumentationsframeworks das Gleiche oder ein besseres Ranking.

Die **Discussion-based Semantik** ist ohne eine Anpassung von uns auf alle Argumentationsframeworks anwendbar.

Die **Burden-based** Semantik ist auf allen endlichen und finitary Argumentationsframeworks wohldefiniert.

Bei unendlichen Argumentationsframeworks ist eine Anpassung notwendig, da die originale Funktion dieser Semantik nicht mit einer unendlichen Anzahl an Angreifern umgehen kann. Dies konnten wir lösen, indem wir ein neues Symbol eingeführt haben, welches in diesem Fall verwendet wird.

Literatur

[BBU20] Ringo Baumann, Gerhard Brewka, and Markus Ulbricht. Comparing Weak Admissibility Semantics to their Dung-style Counterparts - Reduct, Modularization, and Strong Equivalence in Abstract Argumentation. 06 2020.

[BH21] P. Besnard and A. Hunter. A logic-based theory of deductive arguments. *Artificial Intelligence 128(1-2)*, pages 203–235, 2021.

[BS15] Ringo Baumann and Christof Spanring. *Infinite Argumentation Frameworks*, volume 9060, pages 281–295. 01 2015.

[BT22] Lydia Blümel and Matthias Thimm. A ranking semantics for abstract argumentation based on serialisability. In *Proceedings of the 9th International Conference on Computational Models of Argument (COMMA'22)*, September 2022.

[CLS05] Claudette Cayrol and Marie-Christine Lagasquie-Schiex. On the acceptability of arguments in bipolar argumentation frameworks. pages 378–389, 01 2005.

[Dun95] Phan Minh Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial intelligence*, 77(2):321–357, 1995.

[LSW13] Weiru Liu, V. Subrahmanian, and Jef Wijsen. *Scalable Uncertainty Management: 7th International Conference, SUM 2013, Washington, DC, USA, September 16-18, 2013. Proceedings*, volume 8078. 01 2013.

[XC16] Yuming Xu and Claudette Cayrol. Initial sets in abstract argumentation frameworks. *1st Chinese Conference on Logic and Argumentation (CLAR 2016)*, April 2016.

[Zor35] Max A. Zorn. A remark on method in transfinite algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 41:667–670, 1935.