

Master of Education-Arbeit

an der Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

Satz von Helly und seine Anwendungen

vorgelegt von

Edmund Steinbeck

aus Dortmund

Bochum, den 11.07.2019

Erstgutachter und Betreuer:

Prof. Dr. Alberto Abbondandolo

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Barney Bramham

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundbegriffe und Definitionen	3
1.1 Konvexe Mengen	3
1.2 Konvexe Hülle	6
1.3 Abstand und Minkowski-Summe zweier Mengen	11
1.4 Trennungs- und Stützeigenschaften einer konvexen Menge	12
2 Satz von Helly, Satz von Radon und Satz von Carathéodory	19
2.1 Der Satz von Helly	20
2.2 Der Satz von Radon	24
2.3 Voraussetzungen für den Satz von Helly	29
2.4 Der Satz von Carathéodory	32
3 Zusammenhang der Sätze	35
3.1 Äquivalenz des Satzes von Helly und Satz von Carathéodory	35
3.2 Äquivalenz des Satzes von Carathéodory und Satz von Radon	40
4 Anwendungen des Satzes von Helly	43
5 Literaturverzeichnis	62
5.1 Literatur	62
5.2 Internet	62

Einleitung

Die folgende Arbeit soll sich näher mit konvexen Mengen und insbesondere mit dem Satz von Helly beschäftigen. Eduard Helly war ein österreichischer Mathematiker welcher 1884 in Wien geboren war und 1943 in Chicago gestorben ist. Trotz einer geringen Anzahl an Veröffentlichungen sind seine Resultate umso wichtiger für viele Bereiche der Mathematik. Besonders der sogenannte Satz von Helly ist für diese Arbeit von großem Interesse. Helly schaffte es ein wichtiges Resultat bezüglich der Existenz einer Schnittmenge konvexer Mengen zu formulieren.¹ Sein Satz wird dem Bereich der Konvexgeometrie zugerechnet.

Zum ersten Mal hat er seinen Satz im Jahre 1923 im „Jahresbericht der deutschen Mathematiker“ unter dem Titel „Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten“ veröffentlicht. In diesem Aufsatz erwähnt er auch, dass er diesen Satz bereits vor dem ersten Weltkrieg in einem Vortrag verwendet hatte und diesen Beweis als Alternative zum 1921 von Johann Radon publizierten Beweis seines Satzes in „Mathematische Annalen“ mit dem Titel „Mengen konvexer Körper, die einen gemeinschaftlichen Punkt enthalten“ anbietet.² Das Ziel dieser Arbeit ist es nun einen Überblick über den Satz von Helly, seinen Beweisen und seinen Anwendungen zu geben. Zu Beginn dieser Arbeit sollen zunächst im ersten Kapitel wichtige Definitionen und elementare Eigenschaften konvexer Mengen erläutert werden, welche für das Verständnis der weiteren Kapitel vonnöten sind. Mithilfe von einigen Beispielen und Grafiken sollen diese zudem veranschaulicht werden. Das zweite Kapitel soll sich mit dem Satz von Helly, Satz von Radon und Satz von Carathéodory beschäftigen. Alle drei Sätze sollen hier formuliert und bewiesen werden. Im dritten Kapitel soll der Zusammenhang dieser drei Sätze erklärt werden. Wie bereits eingangs angedeutet, haben zumindest Helly und Radon nicht nur einen direkten historischen Zusammenhang; Radon konnte seinen Beweis eben durch die Hilfe seines eigenen Satzes vollziehen. Aber auch der Satz von Carathéodory kann zum einen dafür genutzt werden, die beiden anderen Sätze zu beweisen und zum anderen kann dieser mithilfe der beiden anderen Sätze bewiesen werden. Das Kapitel dient also dazu, einige Äquivalenzen der einzelnen Sätze genau aufzuzeigen und damit im Hinblick auf das Ziel dieser Arbeit einen weiteren alternativen Beweis zum Satz von Helly zu liefern. Abschließend soll im vierten Kapitel eine Auswahl von Anwendungen gezeigt werden, die aus dem Satz von Helly resultieren. Hier soll deutlich werden, dass mithilfe des Satz von Helly viele weitere Sätze bewiesen werden können. Darunter auch bekannte Sätze wie

¹[1], S. 101.

²[5], S. 175.

etwa der Satz von Kirchberger, dessen originaler Beweis etwa 24 Seiten umfasst, und mithilfe des Satz von Helly mit einem relativ kurzen Beweis gezeigt werden kann.³ Die Arbeit basiert insbesondere in Kapitel 2 und Kapitel 4 auf den Aufsatz „Helly’s Theorem and its relatives“ von Ludwig Danzer, Branko Grünbaum und Victor Klee.

³[1], S. 114.

1 Grundbegriffe und Definitionen

1.1 Konvexe Mengen

Um den Satz von Helly genauer untersuchen zu können, ist es zunächst einmal wichtig die Definition einer konvexen Menge und elementare Eigenschaften dieser kennenzulernen. Einfach formuliert handelt es sich bei einer konvexen Menge um eine Menge in einem n -dimensionalen Raum, welche die Eigenschaft besitzt, die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten der Menge ebenfalls komplett zu enthalten. Die genaue Definition lautet wie folgt:

Definition 1.1.1: Eine Teilmenge K des \mathbb{R}^n heißt **konvex** genau dann, wenn für alle $x, y \in K$ und für $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K,$$

wobei $\lambda x + (1 - \lambda)y$ mit $\lambda \in [0, 1]$ die Strecke zwischen x und y ist.

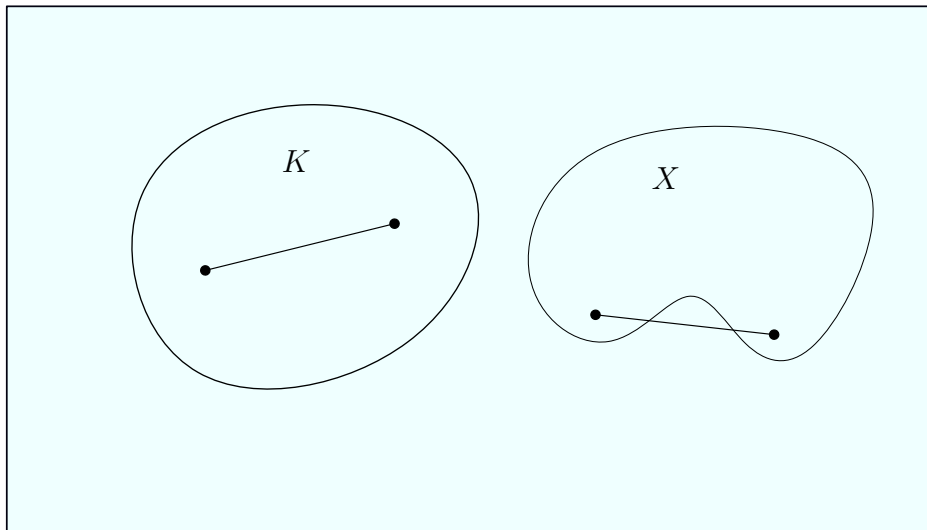


Abbildung 1: Beispiel einer konvexen Menge K und einer nicht-konvexen Menge X im \mathbb{R}^2 .

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden einige Grundbegriffe aus der Topologie genutzt, da diese in einigen Definitionen, Sätzen und Beweisen der Arbeit benötigt werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich diese Arbeit in ihrer Gesamtheit auf den metrischen Raum (\mathbb{R}^n, d) bezieht, wobei d der euklidische Abstand ist. Wann immer

also von \mathbb{R}^n die Rede ist, ist der euklidische Vektorraum mit eben jener Metrik gemeint. Die wichtigsten Begriffe aus der Topologie sind das Innere, der Abschluss und der Rand. Mithilfe dieser Begriffe lässt sich eine strengere Eigenschaft einer Menge definieren:

Definition 1.1.2: Eine Teilmenge K des \mathbb{R}^n heißt **streng konvex** genau dann, wenn für alle $x, y \in K$ und für $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \overset{\circ}{K}.$$

wobei $\lambda x + (1 - \lambda)y$ mit $\lambda \in (0, 1)$ die offene Strecke zwischen x und y und $\overset{\circ}{K}$ das Innere der Menge K ist.

Die offene Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten x und y ist also jene, welche die zwei Punkte x und y selbst nicht enthält. Liegt diese Strecke im Inneren der Menge - insbesondere also nicht auf dem Rand der Menge - so ist diese streng konvex. Es ist klar, dass jede streng konvexe Menge insbesondere auch eine konvexe Menge ist.

Ein weiterer sehr wichtiger Begriff ist die Kompaktheit einer Menge. Im folgenden soll diese definiert und einige daraus resultierende Sätze formuliert werden. Auf die Beweise der Sätze soll an dieser Stelle verzichtet werden und auf [6] S. 95 und S. 154 als auch [7] S. 94 - 96 verwiesen werden.

Definition 1.1.3: Eine Teilmenge X des \mathbb{R}^n heißt **kompakt** oder auch **folgenkompakt**, wenn aus jeder Folge $\{x_n\}$ von Punkten $x_n \in X$ eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die gegen ein Element aus X konvergiert.

Satz 1.1.4: Eine Teilmenge X des \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sich aus jeder offenen Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung von X auswählen lässt.

Satz 1.1.5: Eine Teilmenge X des \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1.1.6: Sei X eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $x \mapsto f(x)$ eine stetige Funktion. Dann ist das Bild $f(X)$ ebenfalls kompakt in \mathbb{R}^m .

Anzumerken sei hierbei noch, dass die Definition und die Sätze nur für den \mathbb{R}^n formuliert wurden. Satz 1.1.5 gilt beispielsweise nicht in beliebigen topologischen Räumen. Da für diese Arbeit allerdings wie eingangs erwähnt der \mathbb{R}^n genügt, beschränken sich auch die Sätze und Definitionen auf diesen Raum.

Definition 1.1.7: Eine Teilmenge K des \mathbb{R}^n heißt **konvexer Körper**, wenn K konvex und kompakt (also beschränkt und abgeschlossen) ist und wenn ihr Inneres $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ ist.

Für eine bessere Vorstellung folgen nun einige einfache und intuitive Beispiele:

Beispiele 1.1.8:

- 1) Im \mathbb{R} ist jedes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine konvexe Menge. Denn betrachtet man zwei beliebige Punkte eines Intervalls, so liegt die Verbindungsstrecke dieser gerade zwischen diesen beiden Punkten im Intervall. Mithilfe der Definition 1.1.2 ist erkennbar, dass jedes Intervall sogar streng konvex ist.
- 2) Im \mathbb{R}^2 sind jeder Kreis, jedes Dreieck jedes Quadrat sowie jedes Rechteck eine konvexe Menge. Denn wählt man zwei beliebige Punkte innerhalb dieser Flächen und verbindet man diese, so liegt die gesamte Strecke innerhalb dieser Fläche. Ein Kreis ist sogar eine streng konvexe Menge. Ein Quadrat allerdings nicht, da für zwei beliebige Randpunkte $x, y \in \partial K$ die (offene) Verbindungsstrecke $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ebenfalls in ∂K liegt.
- 3) Im \mathbb{R}^3 ist jede Kugel, jede Pyramide, jeder Würfel sowie jeder Quader eine konvexe Menge.
- 4) Im \mathbb{R}^n ist jede Strecke und jede Gerade eine konvexe Menge.
- 5) Im \mathbb{R}^n ist eine endliche Menge X genau dann konvex, wenn $|X| = 1$. Denn für $|X| < \infty$ und $x, y \in X$ liegen unendlich viele Elemente auf der Strecke zwischen x und y . Daher gibt es Elemente auf dieser Strecke, die nicht in X liegen.

Ein erstes sehr wichtiges Lemma soll eine elementare Eigenschaft konvexer Mengen darstellen:

Lemma 1.1.9: Sei \mathcal{K} eine Familie von konvexen Mengen. Dann ist der Schnitt aller Mengen der Familie $\bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K_i$ konvex.

Beweis: Für den Fall, dass $\bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K_i = \emptyset$ gilt, ist der Beweis klar, denn die leere Menge ist immer konvex.

Sei daher $C = \bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K_i$ nicht leer. Gilt $|\mathcal{K}| = 1$ ist die Menge ebenfalls trivialerweise konvex, daher kann angenommen werden, dass die Menge C aus mehr als einem Element besteht.

Wähle zwei beliebige Punkte $x, y \in C$. Aus $x, y \in C$ folgt, dass $x, y \in K_i$ gilt, da $C \subset K_i$ für alle $K_i \in \mathcal{K}$. Somit gilt aber auch, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K_i$ für alle $K_i \in \mathcal{K}$, da alle K_i konvex sind. Daraus folgt aber, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K_i = C$ und somit ist C konvex. □

1.2 Konvexe Hülle

Für eine weitere wichtige Definition - nämlich der konvexen Hülle einer Menge - benötigen wir zunächst die Definition einer Konvexkombination.

Definition 1.2.1: Im reellen Vektorraum \mathbb{R}^n heißt eine Linearkombination eines Elements $x \in \mathbb{R}^n$ **Konvexkombination**, wenn gilt:

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ mit } x_i \in \mathbb{R}^n \text{ und } \lambda_i \in [0, 1] \text{ wobei } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Satz 1.2.2: Für eine konvexe Teilmenge K des \mathbb{R}^n gilt, dass jede Konvexkombination aus Elementen von K wieder in K liegt.

Beweis: Der Beweis verläuft durch Induktion über m für eine Konvexkombination $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, mit $x_1, \dots, x_m \in K$.

Induktionsanfang ($m = 1$): Dieser Fall ist trivial, denn bei einer Konvexkombination eines Elements gilt notwendigerweise für den Koeffizienten λ_1 , dass dieser den Wert 1 annehmen muss. Somit ist die Konvexkombination eines Elements aus K wieder das Element selbst, welches offensichtlich auch in der Menge K liegt. Angemerkt sei an dieser Stelle, dass als Induktionsanfang auch $m = 2$ gewählt werden kann, wodurch dieser

Fall der Definition einer konvexen Menge entspricht. In diesem Fall entspräche die Konvexkombination von zwei Elementen $x, y \in K$ gerade der Menge $\lambda x + (1 - \lambda)y$. Per Definition einer konvexen Menge liegen diese aber alle auch in der konvexen Menge K .

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gilt für Konvexkombinationen bestehend aus m Elementen.

Induktionsschluss ($m \rightarrow m + 1$): Sei nun $x = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i$ eine Konvexkombination, mit $x_1, \dots, x_{m+1} \in K$. Zu zeigen ist nun, dass $x \in K$ gilt. Da es sich um eine Konvexkombination handelt, gilt zudem

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i + \lambda_{m+1}$$

wobei $\lambda_i \in [0, 1]$ für alle $i \in \{1, \dots, m + 1\}$. Sei nun

$$\lambda := \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

Daraus folgt aber sofort, dass sowohl $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ sowie $1 - \lambda = \lambda_{m+1}$ gilt. Insgesamt erhält man nun den Ausdruck

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + (1 - \lambda) x_{m+1}. \end{aligned}$$

Da $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ eine Konvexkombination von m Elementen aus K ist, liegt dieser Ausdruck ebenfalls wegen der Induktionsvoraussetzung in K . Da K konvex ist, liegt aber auch der gesamte Ausdruck wegen der Definition 1.1.1 in K . Somit ist $x \in K$, was genau zu zeigen war. □

Definition 1.2.3: Sei X eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Die **konvexe Hülle** $\text{conv}(X)$ der Menge X ist die kleinste konvexe Menge, die X enthält. Es gilt also:

$$\text{conv}(X) = \bigcap_{\substack{X \subset K \subset \mathbb{R}^n \\ K \text{ konvex}}} K.$$

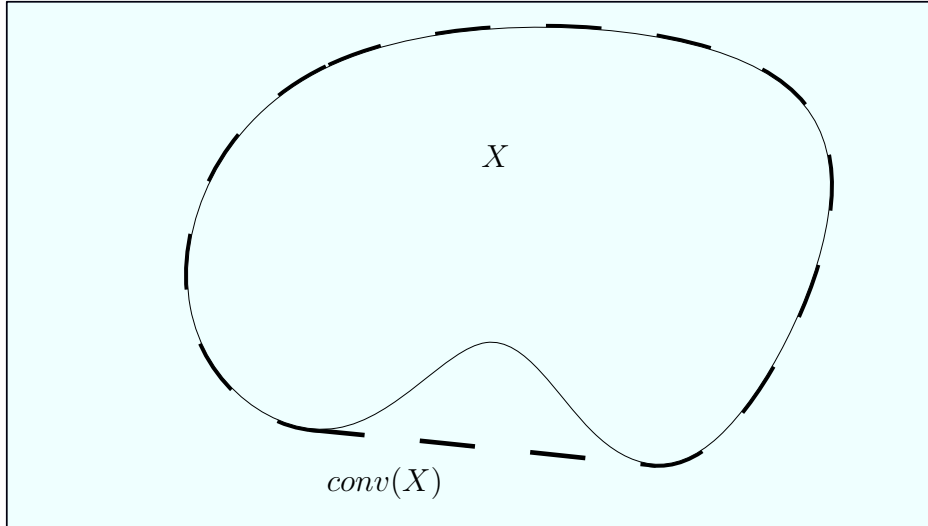


Abbildung 2: Die konvexe Hülle $\text{conv}(X)$ der nicht-konvexen Menge X aus Abbildung 1.

Satz 1.2.4: Sei X eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann besteht die konvexe Hülle $\text{conv}(X)$ aus allen Konvexkombinationen von Elementen aus X . Es gilt also für ein $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \mid \lambda_i \in [0, 1] \text{ mit } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ und } x_i \in X \text{ mit } x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}.$$

Beweis: Sei \tilde{X} die Menge bestehend aus allen Konvexkombinationen von Elementen aus X . Da $\text{conv}(X)$ eine konvexe Menge ist und wegen Satz 1.2.2 alle Konvexkombinationen von Elementen einer konvexen Menge wieder in dieser liegen und zusätzlich gilt, dass $X \subset \text{conv}(X)$, da $\text{conv}(X)$ per Definition die kleinste konvexe Menge ist, die X enthält, liegen insbesondere die Konvexkombinationen von Elementen aus X - welche somit auch Elemente aus $\text{conv}(X)$ sind - in $\text{conv}(X)$ und es gilt:

$$\tilde{X} \subseteq \text{conv}(X). \quad (1)$$

Seien nun $x, y \in \tilde{X}$ zwei beliebige Punkte. Insbesondere sind es per Annahme Konvexkombinationen von Elementen aus X und es gilt somit:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \text{ und } y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i,$$

wobei $x_i, y_i \in X$ und $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \beta_i = 1$ mit $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt wiederum, dass es ein $\lambda \in [0, 1]$ gibt, mit

$$\lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \beta_i = 1.$$

Somit liefert aber der Ausdruck

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \beta_i y_i$$

eine Konvexkombination von Elementen aus X bestehend aus Konvexkombinationen von Elementen aus X und liegt daher wieder in \tilde{X} . Gleichzeitig bedeutet das aber, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \tilde{X}$ für beliebige $x, y \in \tilde{X}$ gilt und somit ist die Menge \tilde{X} per Definition konvex. Da $\text{conv}(X)$ per Definition die kleinste konvexe Menge ist, die X enthält und \tilde{X} ebenfalls eine konvexe Menge ist, die X enthält, gilt also

$$\text{conv}(X) \subseteq \tilde{X}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann $\text{conv}(X) = \tilde{X}$, was genau zu zeigen war. □

Der Beweis verlief wie in [9] S. 4. Die konvexe Hülle einer Menge X ist somit auf der einen Seite der Schnitt aller konvexen Mengen, welche X enthalten, und damit die kleinste konvexe Menge die X enthält. Auf der anderen Seite ist die konvexe Hülle einer Menge auch die Menge aller Punkte, die als Konvexkombination von Elementen aus X dargestellt werden können.

Definition 1.2.5: Eine endliche Menge $\{x_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ heißt **affin abhängig**, falls es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0,$$

wobei $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Andernfalls heißt diese Menge **affin unabhängig**.

Proposition 1.2.6: Eine Menge von $m > n + 1$ Punkten des \mathbb{R}^n ist affin abhängig.

Beweis: Seien $x_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$ Punkte im \mathbb{R}^n . Um zu zeigen, dass diese Punkte affin abhängig sind, muss nach Definition das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{1_1} + \dots + \lambda_m x_{m_1} &= 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \lambda_1 x_{1_n} + \dots + \lambda_m x_{m_n} &= 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

eine nicht-triviale Lösung besitzen. Dies ist aber offensichtlich der Fall, da $m > n + 1$ Unbekannte λ_i existieren mit $n + 1$ Gleichungen.

□

Definition 1.2.7: Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien x_0, \dots, x_k affin unabhängige Punkte des \mathbb{R}^n . Dann ist das von x_0, \dots, x_k gegebene **k-Simplex** Δ definiert als:

$$\Delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \text{ mit } \lambda_i \in [0, 1] \text{ und } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Die x_i werden Eckpunkte von Δ und $(\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^{k+1}$ baryzentrische Koordinaten genannt.

Das k-Simplex ist also nichts weiter als die konvexe Hülle von affin-unabhängigen Punkten.

1.3 Abstand und Minkowski-Summe zweier Mengen

Nützlich für den weiteren Verlauf der Arbeit sind die sogenannten Minkowski-Summen. Die Propositionen 1.3.4 und 1.3.5 sind aus [13] S. 22 - 23 entnommen. Satz 1.3.6 findet sich mit diesem Beweis in [15] S. 83. Zunächst sei allerdings noch der Abstand zwischen einem Punkt und einer Menge, sowie der Abstand zweier Mengen definiert.

Definition 1.3.1: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt und X eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist der Abstand zwischen dem Punkt x_0 und der Menge X definiert als:

$$d(x_0, X) = \inf\{ \|x_0 - y\| \mid y \in X \}.$$

Das bedeutet: Gilt $x_0 \in X$, so folgt daraus $d(x_0, X) = 0$. Ähnlich ist auch der Abstand zwischen zwei Mengen definiert.

Definition 1.3.2: Seien X, Y zwei Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann ist der Abstand der Mengen X und Y definiert als:

$$d(X, Y) = \inf\{ \|x - y\| \mid x \in X, y \in Y \}.$$

Auch hier gilt, für $X \cap Y \neq \emptyset$, dass $d(X, Y) = 0$ folgt.

Definition 1.3.3: Seien X und Y zwei Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann heißt die Menge:

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

Minkowski Summe der Mengen X und Y .

Proposition 1.3.4: Die Minkowski-Summe zweier konvexer Mengen ist wieder konvex.

Beweis: Seien K_1 und K_2 zwei konvexe Mengen und $K_1 + K_2$ deren Minkowski-Summe. Seien nun $x_1 + y_1$ und $x_2 + y_2$ zwei beliebige Elemente aus $K_1 + K_2$ mit $x_1, x_2 \in K_1$ und $y_1, y_2 \in K_2$. Dann gilt für ein $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) = \underbrace{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}_{\in K_1} + \underbrace{\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2}_{\in K_2} \in K_1 + K_2.$$

Somit ist die Menge $K_1 + K_2$ auch wieder konvex. □

Proposition 1.3.5: *Die Minkowski-Summe zweier kompakter Mengen ist wieder kompakt.*

Beweis: Seien X und Y zwei kompakte Mengen und $X + Y$ deren Minkowski-Summe. Betrachte nun die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $(x, y) \mapsto x + y$. Diese Abbildung ist stetig. Die Menge $X \times Y$ ist kompakt. Da nach Satz 1.1.6 das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung auch kompakt ist, folgt daraus, dass $X + Y$ kompakt ist. □

Satz 1.3.6: *Seien X, Y zwei nicht-leere Teilmengen des \mathbb{R}^n , wobei X abgeschlossen und Y kompakt ist. Dann ist die Minkowski-Summe $X + Y$ abgeschlossen.*

Beweis: Definiere die Menge Z mit $Z := X + Y$. Sei $\{z_k\}$ eine konvergente Folge in Z mit Grenzwert z . Dann existieren zwei Folgen x_k in X und y_k in Y mit $z_k = x_k + y_k$. Da nun die Folge z_k konvergiert und daher beschränkt ist und zudem Y kompakt (und demnach auch beschränkt) ist, ist auch die Folge y_k beschränkt und daher auch die Folge x_k . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Somit existieren zwei Teilfolgen von x_k und y_k mit

$$x_{k_l} \rightarrow x \text{ und } y_{k_l} \rightarrow y \text{ mit } z_{k_l} = x_{k_l} + y_{k_l} \rightarrow x + y \text{ für } l \rightarrow \infty.$$

Da X und Y abgeschlossen sind, liegt $x \in X$ und $y \in Y$ und damit auch $x + y \in X + Y = Z$. Da z_k gegen z konvergiert und jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen den selben Grenzwert konvergiert, gilt $x + y = z$ und daher auch $z \in Z$, weswegen Z abgeschlossen ist, was genau zu zeigen war. □

1.4 Trennungs- und Stützeigenschaften einer konvexen Menge

Eine weitere Eigenschaft von konvexen Mengen ist unter bestimmten Bedingungen die Möglichkeit der Trennung dieser durch eine Hyperebene. Für diesen Satz sind zunächst die Definitionen von Halbräumen und Hyperebenen erforderlich.

Definition 1.4.1: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$. Sei zudem $\beta \in \mathbb{R}$. Dann nennt man die Mengen:

- $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \beta\}$ **affine Hyperebene**,
- $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq \beta\}$ und
 $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \beta\}$ **abgeschlossener Halbraum**,
- $H'_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle > \beta\}$ und
 $H'_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \beta\}$ **offener Halbraum**,

wobei $\langle a, x \rangle$ definiert ist als das Standardskalarprodukt der Vektoren $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle a, x \rangle := a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Im \mathbb{R}^2 ist jede Gerade eine affine Hyperebene und im \mathbb{R}^3 ist jede Ebene eine Hyperebene. Ein Halbraum wird von einer Hyperebene begrenzt wobei ein abgeschlossener Halbraum die begrenzende Hyperebene beinhaltet, ein offener jedoch nicht. Insbesondere gilt für ein a und β wie in der Definition, dass $H_+ \cup H_- = \mathbb{R}^n$, da H_+ alle Punkte des \mathbb{R}^n enthält die auf der einen Seite (oder auf) der begrenzenden Hyperebene liegen und H_- all jene, die auf der anderen Seite (oder auf) der begrenzenden Hyperebene liegen. Für offene Halbräume gilt $H'_+ \cup H'_- = \mathbb{R}^n \setminus H$. Im folgenden werden die Halbräume H_+ und H_- , sowie H'_+ und H'_- als **zugehörige** Halbräume zur affinen Hyperebene H bezeichnet, falls diese das selbe $a \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in \mathbb{R}$ haben, wie die Hyperebene. Des Weiteren wird - wenn nicht vorher konkretisiert - mit H_* bzw. H'_* ein beliebiger abgeschlossener bzw. offener Halbraum bezüglich der zugehörigen Hyperebene bezeichnet.

Mithilfe von Halbräumen und Hyperebenen lassen sich interessante Aussagen über konvexe Mengen finden. Allen voran gilt zunächst folgendes intuitives Lemma:

Lemma 1.4.2: *Jeder offene und geschlossene Halbraum ist konvex.*

Beweis: Der Beweis soll für geschlossene Halbräume vollzogen werden; die anderen Beweise funktionieren analog. Sei also $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ und $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq \beta\}$ der dazugehörige Halbraum. Zu zeigen ist nun, dass für $x, y \in H_+$ der Ausdruck $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H_+$ mit $\lambda \in [0, 1]$ wahr ist. In der Tat gilt aufgrund der

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
 \langle a, \lambda x + (1 - \lambda)y \rangle &= \langle a, \lambda x \rangle + \langle a, (1 - \lambda)y \rangle \\
 &= \lambda \underbrace{\langle a, x \rangle}_{\geq \beta} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle a, y \rangle}_{\geq \beta} \\
 &\geq \lambda\beta + (1 - \lambda)\beta \\
 &= \lambda\beta + \beta - \lambda\beta \\
 &= \beta.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\langle a, \lambda x + (1 - \lambda)y \rangle \geq \beta$ und damit $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H_+$, was zu zeigen war. Für offene Halbräume kann im Beweis das „ \geq “ durch ein „ $>$ “ ersetzt werden. \square

Bemerkung 1.4.3: Auch Hyperebenen sind konvexe Mengen. Der Beweis funktioniert analog, indem das „ \geq “ durch ein „ $=$ “ ersetzt wird.

Mithilfe von Hyperebenen und Halbräumen können wichtige Stütz- und Trennungseigenschaften bezüglich konvexer Mengen formuliert werden. Diese sollen an dieser Stelle eingeführt werden, da sie im weiteren Verlauf der Arbeit in einigen Beweisen genutzt werden.

Definition 1.4.4: Seien X, Y zwei beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n . X und Y werden durch eine Hyperebene H **getrennt**, wenn für die zu H gehörigen abgeschlossenen Halbräumen H_+ und H_- gilt, dass $X \subseteq H_+$ und $Y \subseteq H_-$ (oder umgekehrt). X und Y werden **strikt getrennt**, wenn gilt, dass $X \subseteq H'_+$ und $Y \subseteq H'_-$ (oder umgekehrt).

Zwei beliebige Mengen sind also dann trennbar, wenn es möglich ist, eine Hyperebene zwischen ihnen herzuschieben. Im \mathbb{R}^2 ist dies gerade eine Gerade; im \mathbb{R}^3 eine Ebene. Wenn bei einer einfachen Trennung dieser beiden Mengen die dazugehörige affinen Hyperebene die Mengen noch berühren darf, so ist dies bei einer strikten Trennung nicht mehr erlaubt.

Tatsächlich gilt, dass zwei konvexe Mengen stets trennbar sind, wenn ihr Inneres keinen Schnitt enthält. Dieser Satz ist als Erster Trennungssatz bekannt. Bevor der Satz formuliert wird, soll zunächst eine Proposition bewiesen werden. Der Beweis ist im wesentlichen aus [12] S. 20 - 21 entnommen:

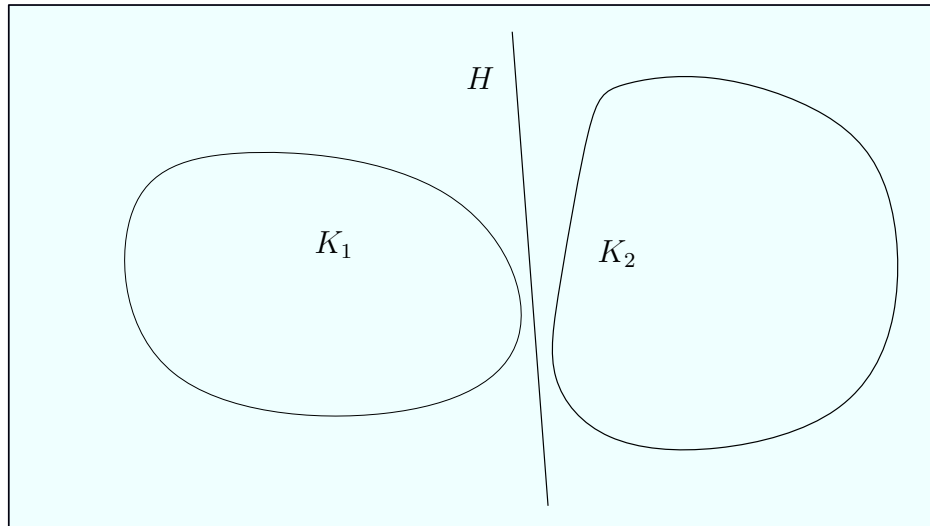


Abbildung 3: Die beiden konvexen Teilmengen K_1, K_2 des \mathbb{R}^2 werden durch die Hyperebene H strikt getrennt.

Proposition 1.4.5: *Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n , wobei $0 \notin K$ gilt. Dann existiert eine Hyperebene die 0 und die Menge K strikt trennt.*

Beweis: Betrachte die abgeschlossene Kugel

$$B_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq a\},$$

wobei a so gewählt ist, dass $B_a \cap K \neq \emptyset$ gilt. Da B_a kompakt ist, ist auch der Schnitt $B_a \cap K$ eine kompakte Menge, woraus folgt, dass die Funktion $\|x\|$ ein Minimum \tilde{x} auf $B_a \cap K$ annimmt. Dieses \tilde{x} ist demnach jenes Element aus $B_a \cap K$, welches den geringsten Abstand zu 0 aufweist. Aufgrund der Konstruktion von $B_a \cap K$ ist \tilde{x} auch das Element mit dem geringsten Abstand zu 0 aus K .

Betrachte nun einen beliebigen Punkt $x \in K$. Da K konvex ist, gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x} \in K$$

und aufgrund der Minimalität von \tilde{x} sowie der Tatsache dass $\|x\| > 0$ für alle $x \in K$, folgt

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}\|^2 \geq \|\tilde{x}\|^2.$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} & \langle (\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}), (\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}) \rangle \geq \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \\ \Leftrightarrow & \langle (\lambda(x - \tilde{x}) + \tilde{x}), (\lambda(x - \tilde{x}) + \tilde{x}) \rangle \geq \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \end{aligned}$$

und mit den Rechenregeln des Standardskalarprodukts umformen in

$$\begin{aligned} & \langle (\lambda(x - \tilde{x}) + \tilde{x}), \lambda(x - \tilde{x}) \rangle + \langle (\lambda(x - \tilde{x}) + \tilde{x}), \tilde{x} \rangle \geq \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 \langle (x - \tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle + \langle \tilde{x}, \lambda(x - \tilde{x}) \rangle + \langle \lambda(x - \tilde{x}), \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \geq \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \end{aligned}$$

und zuletzt zu

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \langle (x - \tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle + 2\lambda \langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle \geq 0. \quad (3)$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$. Nun ist zu zeigen, dass

$$\langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle \geq 0$$

gilt. Und dies ist in der Tat der Fall, denn angenommen es gelte $\langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle = -b$ mit einem beliebigen $b > 0$. Dann gäbe es in jedem Fall ein $\lambda \in (0, 1)$, für welches die Ungleichung

$$2b > \lambda \langle (x - \tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle > 0$$

erfüllt ist. Setzt man nun für b den Ausdruck $-\langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle$ ein, erhält man

$$-2\langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle > \lambda \langle (x - \tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle$$

und nach Multiplikation mit $-\lambda$ erhält man

$$\begin{aligned} & 2\lambda \langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle < -\lambda^2 \langle (x - \tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 \langle (x - \tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle + 2\lambda \langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle < 0. \end{aligned}$$

Somit wurde also ein λ gefunden für welches der Ausdruck negativ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu (3). Daher gilt für jedes $x \in K$ die Ungleichung $\langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle \geq 0$.

Das führt allerdings sofort zu

$$\langle \tilde{x}, (x - \tilde{x}) \rangle = \langle \tilde{x}, x \rangle - \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \geq 0$$

und schließlich zu

$$\langle \tilde{x}, x \rangle \geq \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle > 0,$$

für alle $x \in K$. Merke, dass natürlich auch \tilde{x} in K liegt und damit insbesondere $\tilde{x} \neq 0$ gilt.

Definiert man nun $\beta := \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle$, so trennt die Hyperebene

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \tilde{x}, x \rangle = \beta\}$$

die Menge K und 0 strikt voneinander da $\langle \tilde{x}, 0 \rangle = 0 < \beta$ und für $x \in K$ die Ungleichung $\langle \tilde{x}, x \rangle \geq \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle > \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \beta$ gilt.

□

Satz 1.4.6: *Seien K_1 und K_2 zwei nichtleere konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n . Sei zudem das Innere $\overset{\circ}{K}_1$ und $\overset{\circ}{K}_2$ nicht-leer und es gelte $\overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$. Dann können die Mengen K_1 und K_2 durch eine affine Hyperebene H getrennt werden.*

Für den Verlauf dieser Arbeit ist dieser Satz nicht von sonderlicher Bedeutung. Der Beweis kann in [8] S. 28 - 29 eingesehen werden. Interessanter ist allerdings der sogenannte strikte Trennungssatz, welcher eine Aussage über die strikte Trennung zweier konvexer Mengen trifft. Insbesondere wird dieser Satz im originalen Beweis von Helly zu seinem Satz genutzt und soll daher an dieser Stelle formuliert und bewiesen werden. Auch dieser Beweis ist in dieser Form in [12] S. 21 - 22 zu finden:

Satz 1.4.7(Strikter Trennungssatz): *Seien K_1 und K_2 zwei nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n . Sei zudem K_1 beschränkt (und demnach kompakt) und es gelte $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dann gibt es eine Hyperebene H , die K_1 und K_2 strikt trennt.*

Beweis: Seien K_1 und K_2 abgeschlossen und nicht-leer. Da K_1 kompakt ist, ist die Menge $K_2 - K_1$ wegen Satz 1.3.6 abgeschlossen und aufgrund der Konvexität beider Mengen wegen Satz 1.3.4 ebenfalls konvex. Da die Mengen K_1 und K_2 keinen gemein-

samen Schnitt enthalten, gilt $0 \notin K_2 - K_1$. Daher existiert nach Proposition 1.4.5 eine Hyperebene H_k mit

$$H_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \tilde{x} \rangle = \beta\},$$

welche die Menge $K_2 - K_1$ strikt von 0 trennt, wobei $\tilde{x} \in K_2 - K_1$ das Element mit dem geringsten Abstand zu 0 ist und β wie in Proposition 1.4.5 definiert ist als $\beta := \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle$. Somit gilt für jedes $x \in K_2 - K_1$ die Ungleichung

$$\langle x, \tilde{x} \rangle > \beta > 0.$$

Nun existieren aber $\tilde{k}_1 \in K_1$ und $\tilde{k}_2 \in K_2$ mit $\tilde{x} = \tilde{k}_2 - \tilde{k}_1$. Gleichmaßen existieren für jedes $x \in K_2 - K_1$ Elemente $k_1 \in K_1$ und $k_2 \in K_2$ mit $x = k_2 - k_1$. Daher gilt also die Ungleichung

$$\langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), (k_2 - k_1) \rangle > \beta > 0,$$

welche durch die Rechenregeln für das Standardskalarprodukt umgeformt werden kann in

$$\begin{aligned} & \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_2 \rangle - \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_1 \rangle > \beta > 0 \\ \Leftrightarrow & \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_2 \rangle > \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_1 \rangle + \beta > \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_1 \rangle. \end{aligned}$$

Es folgt daher

$$\inf_{k_2 \in K_2} \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_2 \rangle \geq \sup_{k_1 \in K_1} \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_1 \rangle + \beta > \sup_{k_1 \in K_1} \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_1 \rangle$$

weswegen es eine Zahl α geben muss, für die gilt

$$\inf_{k_2 \in K_2} \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_2 \rangle > \alpha > \sup_{k_1 \in K_1} \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), k_1 \rangle.$$

Daher gilt für die Hyperebene $H_{\tilde{k}}$ mit $H_{\tilde{k}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1), x \rangle = \alpha\}$, dass sie die Mengen K_1 und K_2 strikt voneinander trennt. □

Darüber hinaus lässt sich auch eine Beziehung zwischen einer Hyperebene und einer konvexen Menge formulieren:

Definition 1.4.8: Eine affine Hyperebene H des \mathbb{R}^n heißt **Stützhyperebene** einer Teilmenge X des \mathbb{R}^n , falls $X \subset H_*$, wobei H_* ein zu H zugehöriger abgeschlossener Halbraum ist und zudem $X \cap H \neq \emptyset$ gilt. Der dazugehörige Halbraum H_* heißt **Stützhalbraum**.

Satz 1.4.9: Sei K eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann verläuft durch jeden Punkt x des Randes ∂K mindestens eine Stützhyperebene.

Satz 1.4.10: Sei X eine beliebige abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$ und einem nicht-leeren offenem Kern. Geht durch jeden Punkt x des Randes ∂X mindestens eine Stützhyperebene von X , so ist X konvex.

Auf die Beweise der Sätze wird an dieser Stelle verzichtet, da die Stützeigenschaft in dieser Arbeit keine essenzielle Rolle spielt. Mögliche Beweise können in [8] S. 29 - 30 eingesehen werden.

An dieser Stelle soll das Kapitel schließen. Von besonderer Wichtigkeit ist die Erkenntnis, dass sich zwei konvexe Körper im Falle eines nicht vorhandenen Schnitts von einer geeigneten Hyperebene strikt trennen lassen und beide in Halbräumen enthalten sind, die ebenfalls disjunkt zueinander sind. Diese Tatsache ist für die nachfolgenden Beweise sehr wichtig und wird auch im originalen Beweis von Eduard Helly zu seinem Satz genutzt.

2 Satz von Helly, Satz von Radon und Satz von Carathéodory

In diesem Kapitel soll der Satz von Helly formuliert und bewiesen werden. Wie der Name des originalen Artikels „Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten“ bereits andeutet, handelt es sich hierbei um eine Aussage bezüglich der Schnitte von konvexen Mengen. Im ersten Kapitel wurde gezeigt, dass der Schnitt - falls vorhanden - ebenfalls eine konvexe Menge ist. Der Satz von Helly trifft eine Aussage darüber, ob ein solcher Schnitt unter gewissen Bedingungen überhaupt existiert. Zu Beginn soll hier bereits eine finale Version des Satzes formuliert werden. Der Beweis dieses Satzes verläuft im Laufe dieses Kapitels. Es werden verschiedene Beweisideen vorgestellt, welche Teilweise den Satz von Helly unter schwächeren Bedingungen beweisen.

2.1 Der Satz von Helly

Satz 2.1.1 (Satz von Helly): Sei \mathcal{K} eine Familie von konvexen Mengen K_i des \mathbb{R}^n mit $i \in I$, wobei $|I| \geq n + 1$. Sei zudem I endlich oder alle $K_i \in \mathcal{K}$ abgeschlossen und mindestens ein $K_i \in \mathcal{K}$ kompakt. Falls jeweils $n + 1$ Mengen in \mathcal{K} einen gemeinsamen Punkt haben, also für jedes $J \subseteq I$ mit $|J| = n + 1$ gilt, dass $\bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset$, dann haben alle Mengen in \mathcal{K} einen gemeinsamen Punkt und es gilt $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.

Beispiele 2.1.2:

- Im \mathbb{R}^1 bedeutet es, dass eine Familie von Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, die paarweise einen gemeinsamen Schnitt - also mindestens einen Punkt - besitzen, der Schnitt aller Intervalle dieser Familie mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzt. Dies gilt, da Intervalle auf dem \mathbb{R}^1 konvexe Mengen sind.
- Im \mathbb{R}^2 liefert Abbildung 4 ein Beispiel.

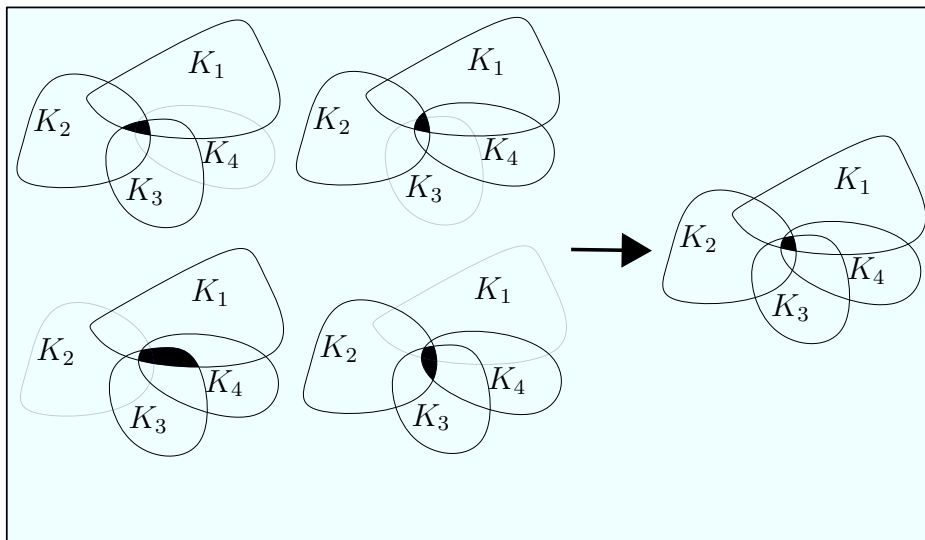


Abbildung 4: Eine Familie von vier kompakten und konvexen Mengen im \mathbb{R}^2 , von denen je drei einen gemeinsamen Schnitt aufweisen und damit die ganze Familie einen gemeinsamen Schnitt aufweist.

Der originale Beweis von Helly, welcher zu finden ist in [5] S. 175 - 176, sowie auch in [1] S. 106 - 107, verläuft durch Induktion über die Dimension und bedient sich dem strikten Trennungssatz 1.4.7. Im originalen Beweis beschränkt sich Helly zunächst allerdings auf eine endliche Familie kompakter konvexer Mengen bzw. konvexer Körper. Im Anschluss gibt er noch eine Beweisidee, wie der Beweis für eine überabzählbare Familie abläuft.

Ein Beweis für diesen Fall wird auch im weiteren Verlauf dieses Kapitels stattfinden. Dem voran soll allerdings ein Lemma folgen. Das Lemma und der Beweis finden sich in dieser Form in [8] S. 70.

Lemma 2.1.3: *Sei \mathcal{K} eine endliche Familie konvexer Mengen des \mathbb{R}^n mit $K_i \in \mathcal{K}$ und $i \in I$ mit $|I| \geq n + 1$, wobei je $n + 1$ Mengen der Familie mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Dann existiert eine Familie \mathcal{F} bestehend aus kompakten konvexen Mengen $F_i \in \mathcal{F}$ des \mathbb{R}^n mit $F_i \subseteq K_i$ für alle $i \in I$, von denen ebenfalls jeweils $n + 1$ einen gemeinsamen Schnitt haben.*

Beweis: Sei $j \in I$ ein fester Index und sei $J \subset I \setminus j$ eine Teilmenge der Indexmenge, wobei $|J| = n$ gilt. Sei nun x_j ein beliebiges Element im Schnitt

$$\bigcap_{i \in J} K_i \cap K_j.$$

Ein solches x_j existiert für jede Wahl von J , da sich nach Voraussetzung je $n + 1$ Mengen der Familie \mathcal{K} schneiden. Daher seien x_{j_1}, \dots, x_{j_m} die einzelnen so gewählten Punkte für jede beliebige Wahl von J . Insbesondere ist die Anzahl endlich, da aufgrund der Endlichkeit von I nur endliche viele Möglichkeiten für die Wahl von J existieren. Betrachte nun die Menge

$$F_j := \text{conv}(x_{j_1} \cup \dots \cup x_{j_m})$$

Dann ist die Menge F_j die konvexe Hülle von Punkten im \mathbb{R}^n und damit ein Polyeder und kompakt. Da $x_{j_1}, \dots, x_{j_m} \in K_j$ liegen und die Mengen K_i für jedes $i \in I$ konvex sind, gilt $F_j \subseteq K_j$. Denn K_j ist eine konvexe Menge die alle x_{j_1}, \dots, x_{j_m} enthält und F_j ist als konvexe Hülle der Punkte x_{j_1}, \dots, x_{j_m} per Definition die kleinste konvexe Menge welche diese Punkte enthält. Aufgrund der Konstruktion von F_j gilt aber auch, dass es mit je n weiteren Mitgliedern der Familie $(\mathcal{K} \setminus K_j)$ einen gemeinsamen Schnitt hat. Die übrigen Mengen der Familie $(\mathcal{K} \setminus K_j)$ haben nach Voraussetzung ebenfalls zu je $n + 1$ einen gemeinsamen Schnitt. Daher erfüllt die neue Familie $(\mathcal{K} \setminus K_j) \cup F_j$ ebenfalls die Bedingung, dass sich je $n + 1$ Mengen schneiden.

Wiederholt man dieses Verfahren nun für alle übrigen K_i mit $i \in I \setminus j$, wobei sich der feste Index jedes mal ändert und nie der bereits durchlaufene ist, so erhält man am

Ende eine endliche Familie \mathcal{F} kompakter konvexer Mengen $F_i \in \mathcal{F}$, von denen je $n + 1$ einen gemeinsamen Schnitt aufweisen und für welche gilt $F_i \subseteq K_i$, was genau zu zeigen war.

□

Beweis des Satzes 2.1.1 für den endlichen Fall:

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = 1$ bzw. \mathbb{R}^1 . Dies ist in der Tat trivial und intuitiv, da es sich um Strecken handelt, bei denen je zwei Strecken einen gemeinsamen Punkt haben. Es gilt also für eine Strecke bzw. Intervall $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^1$, dass das linke Ende a_i der einen Strecke nie rechts von dem rechten Ende b_i der anderen Strecke liegt. Daher gibt es mindestens einen Punkt $x \in [a_i, b_i]$, der alle a_i von den b_i trennt und somit in jedem Intervall enthalten ist.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage ist wahr für \mathbb{R}^{n-1} . Es gilt also: Für eine Familie \mathcal{K} bestehend aus mindestens n kompakten konvexen Mengen im \mathbb{R}^{n-1} , haben alle Mitglieder einen gemeinsamen Punkt, wenn je n Mitglieder einen gemeinsamen Punkt haben.

Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$): Sei \mathcal{K} also eine endliche Familie aus mindestens $n + 1$ kompakter und konvexer Mengen K_i des \mathbb{R}^n und je $n + 1$ haben mindestens einen gemeinsamen Punkt. Angenommen es gilt $\bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K_i = \emptyset$. Dann existiert eine Teilfamilie \mathcal{F} und ein Mitglied $C \in \mathcal{F}$, sodass gilt:

$$\bigcap_{K_i \in \mathcal{F}} K_i = \emptyset \text{ und } \bigcap_{K_i \in (\mathcal{K} \setminus \mathcal{F})} K_i =: M \neq \emptyset.$$

Die Menge M ist wegen Lemma 1.1.9 als Schnitt von konvexen Mengen ebenfalls konvex. Die Menge C ist auch konvex, da $C \in \mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ ist. Beide Mengen sind zudem nicht-leere und kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n sowie zueinander disjunkt.

Wegen dem strikten Trennungssatz 1.4.7 existiert deshalb eine Hyperebene H im \mathbb{R}^n , welche C und M strikt voneinander trennt. Daher liegen C und M in jeweils verschiedenen zu der Hyperebene gehörenden offenen Halbräumen.

Die Hyperebene H soll so gewählt sein, dass sie durch die Mitte der Strecke $[x, y]$ verläuft und orthogonal zu dieser liegt, wobei $x \in C$ und $y \in M$ gilt und x und y jene Elemente sind, die $d(C, M)$ nach Definition 1.3.2 des Abstands zweier Mengen erfüllen, es also gilt $d(C, M) = \|x - y\|$.

Seien nun M_1, M_2, \dots, M_k die Schnittmengen von je n Mitgliedern der Familie $(\mathcal{F} \setminus C)$. Merke, dass aufgrund der Endlichkeit von \mathcal{F} insbesondere $k < \infty$ gilt. Solche Schnittmengen existieren, da vorausgesetzt wurde, dass sich je $n + 1$ Mengen der Familie \mathcal{K} schneiden; insbesondere also auch $n + 1$ Mengen der Familie \mathcal{F} und daher auch n Mengen. Es gilt zudem, dass $M \subset M_1, M \subset M_2, \dots, M \subset M_k$, da M die Schnittmenge aller Mitglieder der Familie $(\mathcal{F} \setminus C)$ ist.

Da sich aber je $n + 1$ Mitglieder der Familie \mathcal{K} und damit auch \mathcal{F} schneiden, muss auch C und jede der Mengen M_1, M_2, \dots, M_k einen gemeinsamen Schnitt haben.

Um die Menge C zu schneiden, müssen die jeweiligen M_1, M_2, \dots, M_k die zuvor konstruierte Hyperebene H durchstoßen; die Hyperebene H hat also einen Schnitt mit jedem M_1, M_2, \dots, M_k . Da die Mengen M_1, M_2, \dots, M_k Schnittmengen aus von Mengen der Familie $(\mathcal{F} \setminus C)$ sind, bedeutet es, dass alle Mengen der Familie $(\mathcal{F} \setminus C)$ die Hyperebene H schneiden.

Aufgrund der Konvexität der Mengen von $(\mathcal{F} \setminus C)$ und der Hyperebene H , sind die Schnittmengen ebenfalls konvexe Mengen und zwar auf der Hyperebene H welche die Dimension $n - 1$ hat. Somit existieren auf der Hyperebene H der Dimension $n - 1$, konvexe Mengen, von denen sich jeweils n schneiden, wobei der Schnitt von je n Mengen eben der Schnitt der Hyperebene mit den entsprechenden Mengen M_1, M_2, \dots, M_k ist. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung haben diese mindestens einen gemeinsamen Punkt (welcher auf der Ebene H liegt). Dieser Punkt liegt aber somit auch in jedem Mitglied der Familie $(\mathcal{F} \setminus C)$ und damit auch in ihrem gemeinsamen Schnitt M , woraus folgt, dass gilt: $M \cap H \neq \emptyset$. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass M in einem zu H gehörenden offenem Halbraum liegt.

Da der Satz nun für eine endliche Anzahl kompakter Mengen gezeigt wurde, lässt sich der Satz mithilfe von Lemma 2.1.3 auf eine endliche Anzahl beliebiger konvexer Mengen verallgemeinern. Denn gilt die Voraussetzung, dass sich je $n + 1$ nicht notwendigerwei-

se kompakte aber konvexe Mengen schneiden, so können wie in Lemma 2.1.3 kompakte Polyeder konstruiert werden, die ebenfalls zu je $n + 1$ einen gemeinsamen Schnitt aufweisen. Diese haben dann aber wie gerade gezeigt, alle einen gemeinsamen Punkt. Da dieser gemeinsame Punkt somit in jedem Polyeder liegt, und jedes Polyeder in der jeweiligen ursprünglichen Menge enthalten ist, liegt eben auch jener Punkt in jeder ursprünglichen Menge und daher weisen alle Mengen einen gemeinsamen Punkt auf.

□

2.2 Der Satz von Radon

Bevor dieser Beweis veröffentlicht wurde, hat Johann Radon im Jahre 1913 einen Beweis des Satzes geliefert. Sein Beweis beschränkt sich ebenfalls auf eine endliche Familie konvexer Mengen, welche allerdings nicht notwendigerweise kompakt sein müssen. Im Beweis, der auch per Induktion verläuft - allerdings diesmal über die Anzahl der Mengen und nicht mehr über die Dimension - nutzte er seinen eigenen Satz. Dieser soll an dieser Stelle zunächst formuliert und bewiesen werden um anschließend mit seiner Hilfe einen weiteren Beweis für den Satz von Helly zu liefern. Der Satz von Radon mit Beweis sowie anschließendem Beweis des Satz von Helly kann unter anderem im originalen Artikel von Radon in [10] S. 113 - 115 gefunden werden. Alternativ lässt sich dieser auch in [1] S. 107 - 108 finden:

Satz 2.2.1(Satz von Radon): *Sei X eine endliche Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $|X| \geq n + 2$. Dann gilt:*

X kann derart in zwei disjunkte Teilmengen X_1 und X_2 zerlegt werden, sodass

$$\text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2) \neq \emptyset$$

gilt.

Beweis: Sei $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ eine Menge von Punkten im \mathbb{R}^n mit $m \geq n + 2$. Nun betrachte man das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0 \tag{4}$$

mit

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0. \tag{5}$$

Schreibt man dieses System aus erhält man:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_{1_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1_n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} x_{m_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m_n} \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0.$$

Es ist also deutlich zu erkennen, dass hier ein System aus $n+1$ Gleichungen und $m \geq n+2$ Unbekannten, nämlich den $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, vorliegt. Daraus folgt aber, dass es eine nicht-triviale Lösung $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ des Systems gibt.

Nach einer Umnummerierung der x_i in (4) derart, dass die positiven λ_i^* der nicht-trivialen Lösung zu Beginn des Ausdrucks stehen, erhält man den Ausdruck:

$$\lambda_1^* x_1 + \dots + \lambda_k^* x_k + \lambda_{k+1}^* x_{k+1} + \dots + \lambda_m^* x_m = 0 \tag{6}$$

wobei $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^* > 0$ und die restlichen kleiner 0 sind. Aus (6) folgt aber, dass gilt:

$$\lambda_1^* x_1 + \dots + \lambda_k^* x_k = -\lambda_{k+1}^* x_{k+1} + \dots + -\lambda_m^* x_m$$

Gleichermaßen gilt wegen (5), folgende Gleichheit:

$$\lambda_1^* + \dots + \lambda_k^* = -(\lambda_{k+1}^* + \dots + \lambda_m^*) =: a. \tag{7}$$

Teilt man nun (7) durch a , so ergibt sich der Ausdruck

$$\tilde{\lambda}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_k = -(\tilde{\lambda}_{k+1} + \dots + \tilde{\lambda}_m) = 1, \tag{8}$$

wobei $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i^*/a$ ist. Daraus folgt aber auch folgender Ausdruck:

$$\tilde{\lambda}_1 x_1 + \dots + \tilde{\lambda}_k x_k = -\tilde{\lambda}_{k+1} x_{k+1} + \dots + (-\tilde{\lambda}_m x_m).$$

Wegen (8) handelt es sich aufgrund von Definition 1.2.1 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens um eine Konvexkombination der Punkte $\{x_1, \dots, x_k\}$ auf der einen Seite und $\{x_{k+1}, \dots, x_m\}$ auf der anderen Seite, welche zudem den selben Punkt darstellen. Nach Satz 1.2.4 besteht die konvexe Hülle einer Menge aus all ihren Konvexkombinationen. Es ergeben sich also die zwei disjunkten Teilmengen $X_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$ und $X_2 = \{x_{k+1}, \dots, x_m\}$ der Menge X , deren konvexe Hülle mindestens einen gemeinsamen Punkt enthält; dies war genau zu zeigen. □

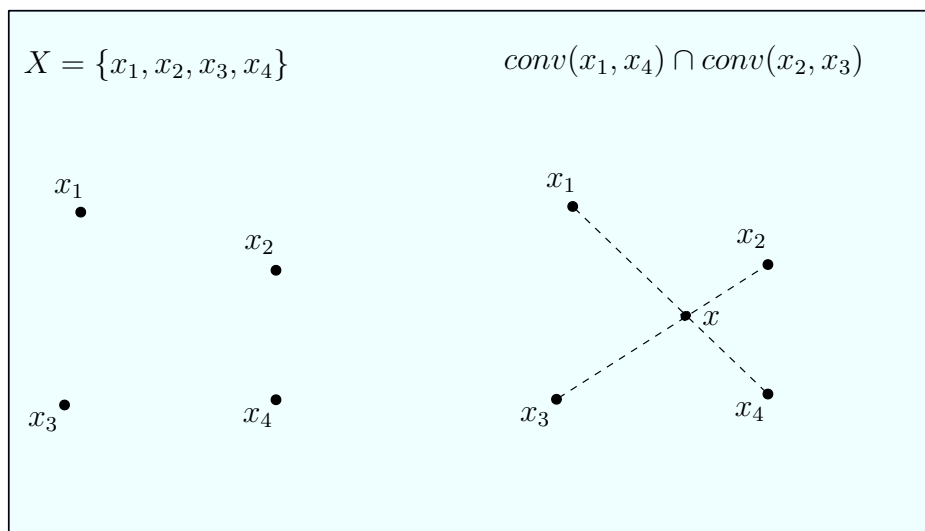


Abbildung 5: Eine Teilmenge X des \mathbb{R}^2 bestehend aus vier Elementen wird in zwei disjunkte Teilmengen aufgeteilt, deren konvexe Hüllen sich schneiden.

Der Satz von Helly (Satz 2.1.1) kann nun mit Hilfe dieses Satzes per Induktion über die Anzahl m der konvexen Mengen bewiesen werden.

Beweis zu Satz 2.1.1 für den endlichen Fall: Induktionsanfang ($m = n + 1$):
 In diesem Fall ist die Aussage trivial. Denn besteht die Familie aus $n + 1$ Mengen, von denen per Voraussetzung je $n + 1$ Mitglieder einen gemeinsamen Schnitt haben, so ist dieser Schnitt eben jener, der $n + 1$ Mitglieder.

Induktionsvoraussetzung ($m \geq n + 1$): Angenommen der Satz gilt für eine belie-

bigen endlichen Familie von konvexen Mengen mit mehr als $n + 1$ Mitgliedern.

Induktionsschritt ($m \rightarrow m + 1$): Seien K_1, \dots, K_{m+1} konvexe Mengen. Setze

$$A_i = K_1 \cap \dots \cap \widehat{K_i} \cap \dots \cap K_{m+1},$$

wobei A_i der Schnitt aller Mengen der Familie ist, bis auf die i -te Menge, mit $i \in \{1, \dots, m + 1\}$. Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt nun, dass $A_i \neq \emptyset$ ist, und zwar für alle $i \in \{1, \dots, m + 1\}$, denn A_i ist definiert als der Schnitt von m Mengen, welche zu je $n + 1$ einen gemeinsamen Schnitt aufweisen.

Sei nun $x_i \in A_i$. Nach dem Satz von Radon 2.2.1 gilt wegen $m + 1 \geq n + 1 + 1 = n + 2 > n + 1$ und somit $m + 1 \geq n + 2$, für die Menge $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$, dass ein $x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \cap \text{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_{m+1}\}$ für ein bestimmtes k existiert.

Nun gilt es nur noch zu zeigen, dass dieses $x \in K_i$ ist und zwar für jedes $i \in \{1, \dots, m + 1\}$.

Dies ist in der Tat der Fall. Denn für $i \in \{1, \dots, k\}$ folgt, dass

$$A_j = K_1 \cap \dots \cap K_k \cap \dots \cap \widehat{K_j} \cap \dots \cap K_{m+1} \subset K_i \text{ für alle } j > k,$$

gilt, denn per Definition ist A_j der Schnitt aller Mengen der Familie außer K_j und somit muss A_j wegen der Annahme $i < j$ in jedem dieser K_i enthalten sein. Damit ist aber auch jedes $x_j \in A_j$ enthalten in den K_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$. Da dies für jedes A_j gilt und somit auch für jedes $x_j \in A_j$ mit $j \in \{k + 1, \dots, m + 1\}$ und da die K_i konvex sind, gilt:

$$\text{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_{m+1}\} \subset K_i \text{ für jedes } i \in \{1, \dots, k\}, \tag{9}$$

da die konvexe Hülle einer Menge als die kleinste konvexe Menge definiert ist, welche die gegebene Menge enthält.

Andersrum gilt für $i \in \{k + 1, \dots, m + 1\}$ mit der selben Argumentation, dass $A_j \subset K_i$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$. Denn auch hier gilt analog, dass die A_j als Schnitt aller Mengen der Familie, bis auf die k -te Menge, in jedem K_i enthalten sein müssen für alle $i \in \{k + 1, \dots, m + 1\}$ und somit auch jedes $x_j \in A_j$ für $j \in \{1, \dots, k\}$. Abermals gilt aufgrund der Konvexität der K_i und der Definition der konvexen Hülle einer Menge der

folgende Ausdruck:

$$\text{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \subset K_i \text{ für jedes } i \in \{k+1, \dots, m+1\}. \quad (10)$$

Da bereits gezeigt wurde, dass ein

$$x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \cap \text{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_{m+1}\}$$

existiert, gilt wegen (9) und (10), dass $x \in K_i$ liegt, für alle $i \in \{1, \dots, m+1\}$, was genau zu zeigen war. □

Wie man sieht, wird in diesem Beweis an keiner Stelle die Kompaktheit der konvexen Mengen der Familie gefordert. Allerdings wird genutzt, dass es sich um eine endliche Anzahl von Mengen handelt. Als alternative Forderung zur endlichen Anzahl der konvexen Mengen in der Familie wird in Satz 2.1.1 im unendlichen Fall die Abgeschlossenheit gefordert, wobei mindestens ein Mitglied der Familie kompakt sein soll. Dieser Fall soll in der folgenden Verallgemeinerung des Satzes von Helly bewiesen werden. Der Beweis verläuft nach [9] S. 204 - 205:

Korollar 2.2.2: *Sei \mathcal{K} eine Familie von abgeschlossenen konvexen Mengen K_i des \mathbb{R}^n mit $i \in I$ wobei $|I| \geq n+1$ gilt. Sei zudem mindestens ein Mitglied der Familie \mathcal{K} kompakt. Falls jeweils $n+1$ Mitglieder von \mathcal{K} einen gemeinsamen Punkt haben, dann haben alle Mitglieder von \mathcal{K} einen gemeinsamen Punkt und es gilt:*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

Beweis: Sei die Menge $K_j \in \mathcal{K}$ kompakt und sei die Anzahl der Mitglieder in \mathcal{K} nicht endlich (da es sonst der Fall des bereits bewiesenen Satz von Helly wäre). Angenommen es gilt:

$$\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset. \quad (11)$$

Dann folgt daraus, dass $(\mathcal{K} \setminus K_j)$ eine Familie ist, deren Mitglieder abgeschlossene Mengen sind und deren Durchschnitt $\bigcap_{i \in (I \setminus \{j\})} K_i$ zu K_j disjunkt ist. Denn falls der Durchschnitt

existiert mit $K := \bigcap_{i \in (I \setminus \{j\})} K_i \neq \emptyset$, so muss wegen (11) gelten, dass $K \cap K_j = \emptyset$. Im anderen Fall ist der Durchschnitt $\bigcap_{i \in (I \setminus \{j\})} K_i$ die leere Menge, welche aber zu jeder anderen Menge disjunkt ist.

Da der Schnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist, folgt daraus, dass die Familie $(\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K} \setminus K_j))$ eine offene Überdeckung von K_j ist. Da K_j kompakt ist, existiert nach Satz 1.1.4 eine offene Teilüberdeckung von K_j . Es existiert also eine endliche Teilfamilie $\tilde{\mathcal{K}}$ von \mathcal{K} , bzw. ein endliches $J \subset I$, sodass gilt:

$$\left(\bigcap_{i \in J} K_i \right) \cap K_j = \emptyset. \quad (12)$$

Da aber $\tilde{\mathcal{K}}$ endlich ist und aus konvexen sowie beschränkten Mengen besteht, deren Mitglieder per Annahme zu je $n + 1$ einen gemeinsamen Punkt haben und diese Eigenschaften zusätzlich auch für die endliche Familie $\tilde{\mathcal{K}} \cup K_j$ gelten muss, gilt nach dem Satz von Helly für den endlichen Fall, dass

$$\left(\bigcap_{i \in J} K_i \right) \cap K_j \neq \emptyset.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (12).

□

Damit ist der Satz 2.1.1 nun vollständig bewiesen.

2.3 Voraussetzungen für den Satz von Helly

Ergänzend sollen an dieser Stelle noch einige Beispiele folgen, die darlegen, warum die Forderungen nach der Konvexität, der Kompaktheit und der Anzahl sich schneidender Mengen in der Voraussetzung in der Form notwendig sind. Die Beispiele sind im wesentlichen aus [8] S. 73.

Beispiel 2.3.1: Die Anzahl $n + 1$ der sich in der Voraussetzung schneidenden Mengen kann nicht reduziert werden. Ein einfaches Gegenbeispiel lässt sich im \mathbb{R}^2 finden. Betrachtet man nämlich drei konvexe Körper wie etwa Rechtecke (siehe Abbildung 6, Familie a), so können diese derart angelegt werden, dass sich je zwei von ihnen schneiden; ein gemeinsamer Schnitt aller drei ist jedoch nicht vorhanden. Ebenfalls ist dies auch für eine Familie bestehend aus vier Rechtecken der Fall (Abbildung 6, Familie b).

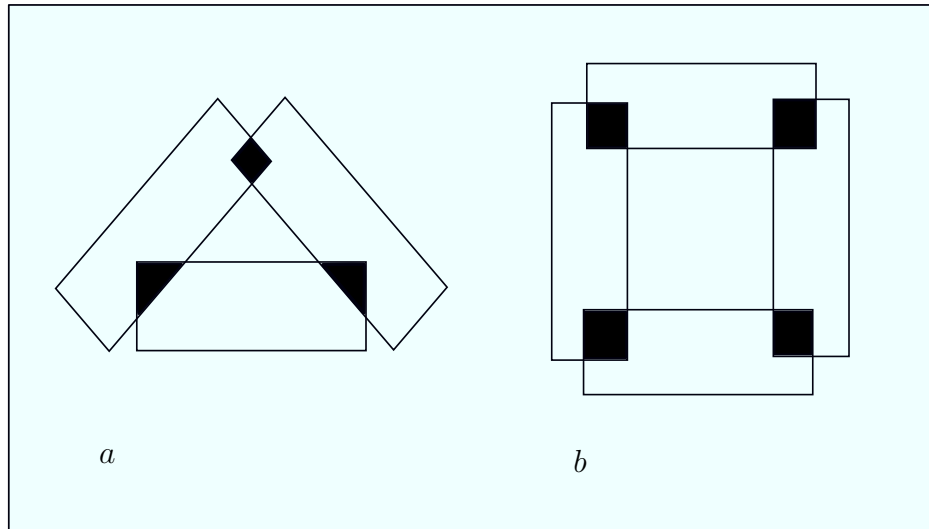


Abbildung 6: Zwei Familien a und b von kompakten und konvexen Mengen im \mathbb{R}^2 , von denen je zwei einen gemeinsamen Schnitt aufweisen, aber kein gemeinsamer Schnitt der Familie existiert.

Ein weiteres Gegenbeispiel im \mathbb{R}^n ist das n -Simplex Δ aus der Definition 1.2.7. Betrachtet man die Seitenflächen von diesem, so handelt es sich bei ihnen um konvexe Körper des \mathbb{R}^{n-1} . Je n von diesen Seitenflächen schneiden sich in den jeweiligen Eckpunkten des Simplex. Jedoch hat die Familie aller Seitenflächen des Simplex keinen gemeinsamen Schnitt.

Beispiel 2.3.2: Für die Voraussetzung der Konvexität soll in Abbildung 7 hier ein visuelles Beispiel im \mathbb{R}^2 dienen.

So ist offensichtlich in Familie a und b der Abbildung 7 eine Menge nicht konvex. Die Mengen aus Familie a wurden in Familie b derart verschoben, dass sie allen anderen Bedingungen vom Satz von Helly genügen, also insbesondere je $n + 1$ Mitglieder einen gemeinsamen Schnitt aufweisen. Dennoch ist kein gemeinsamer Schnitt aller Mitglieder vorhanden.

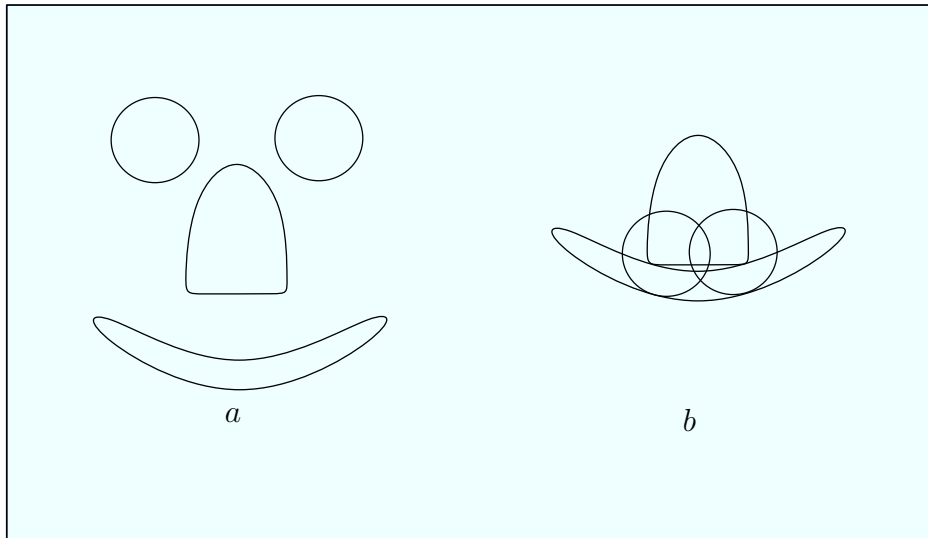


Abbildung 7: Zwei Familien von kompakten Mengen von denen je eine nicht konvex ist. Familie b erfüllt die Voraussetzung von je drei sich schneidenden Mengen im \mathbb{R}^2 , jedoch ist kein gemeinsamer Schnitt aller Mengen vorhanden.

Beispiel 2.3.3: Die Bedingung der Kompaktheit mindestens einer Menge im unendlichen Fall, kann schnell anhand des folgenden Beispiels nachvollzogen werden.

Sei nämlich \mathcal{H} eine Familie von Mengen H_i mit $H_i \in \mathcal{H}$, wobei

$$H_i := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq -i\},$$

mit $i \in \mathbb{N}$. Offensichtlich handelt es sich bei diesen Mengen um Halbräume, welche abgeschlossen und - wie in Lemma 1.4.2 gezeigt wurde - konvex sind; allerdings nicht beschränkt und somit nicht kompakt. In der Tat haben je endlich viele dieser Halbräume - also insbesondere je $n + 1$ - einen gemeinsamen Schnitt. Jedoch gilt offensichtlich

$$\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i \right) = \emptyset$$

weswegen kein gemeinsamer Schnitt existiert.

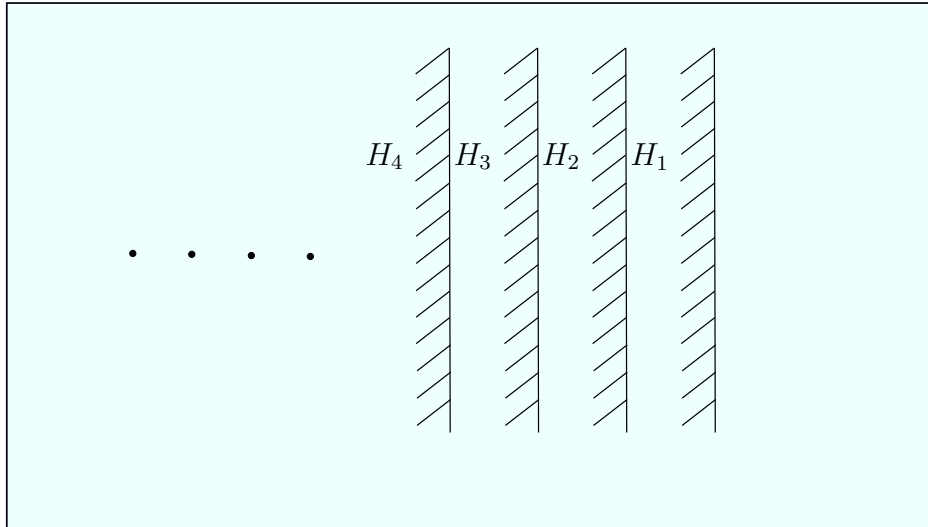


Abbildung 8: Eine unendliche Familie abgeschlossener Halbräume im \mathbb{R}^2 von denen je drei einen gemeinsamen Schnitt aufweisen, aber ein gemeinsamer Schnitt aller Mitglieder nicht existiert.

2.4 Der Satz von Carathéodory

Abschließen soll das Kapitel mit einem dritten Satz der eng mit dem Satz von Helly verbunden ist. Der Satz von Carathéodory liefert eine Aussage bezüglich der konvexen Hülle einer beliebigen Menge. Der Beweis ist in ähnlicher Form in [8] S. 23 - 24 zu finden. Alternativ liefert [9] S. 200 - 201 einen Beweis. Die konkrete Formulierung lautet wie folgt:

Satz 2.4.1 (Satz von Carathéodory): Sei X eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist jeder Punkt x der konvexen Hülle $\text{conv}(X)$ eine Konvexkombination von höchstens $n + 1$ Elementen aus der Menge X . Es gilt also:

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \mid \lambda_i \in [0, 1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \text{ und } x_i \in X \text{ mit } x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \right\}.$$

Alternativ lässt sich der Satz auch formulieren als:

Sei X eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist die konvexe Hülle von X die Vereinigung aller k -Simplizes Δ des \mathbb{R}^n , wobei $k \leq n$, mit in X gelegenen Eckpunkten.

Beweis: Aufgrund von Satz 1.2.4 ist bekannt, dass sich jedes Element $x \in \text{conv}(X)$ als Konvexkombination von endlich vielen Elementen aus $X \subset \mathbb{R}^n$ darstellen lässt. Sei nun $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ mit $k \geq n + 2$. Wegen Proposition 1.2.6 gilt, dass die Elemente einer Teilmenge \tilde{X} von X mit $|\tilde{X}| \geq n + 2$ affin abhängig sind. Es gibt daher Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ mit

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0,$$

wobei o.B.d.A. $\alpha_k > 0$.

Nun ist durch mögliche Umnummerierung die folgende Ungleichung möglich:

$$\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \tag{13}$$

für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$ mit $\alpha_i > 0$, wobei $\frac{\lambda_k}{\alpha_k}$ ein fester Wert ist.

Sei nun $\beta_i := \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i$. Dann gilt wegen $\beta_k = \lambda_k - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_k = \lambda_k - \lambda_k = 0$, dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i &= \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i + 0 = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i + \beta_k = \sum_{i=1}^k \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i}_{=1} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i}_{=0} = 1 \end{aligned}$$

Zudem ist $\beta_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, denn es gilt für $\alpha_i \leq 0$:

$$\beta_i = \lambda_i - \underbrace{\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i}_{<0} \geq 0$$

und für $\alpha_i > 0$ gilt

$$\beta_i = \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i = \alpha_i \underbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \right)}_{\geq 0 \text{ wegen (13)}} \geq 0.$$

Somit erfüllen die β_i mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ alle Bedingungen für Koeffizienten einer Konvexkombination. Insgesamt gilt nun:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i &= \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i + 0 = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i + \beta_k x_k \\ &= \sum_{i=1}^k \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i}_{=x} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i}_{=0} = x. \end{aligned}$$

Somit lässt sich $x \in \text{conv}(X)$ darstellen als Konvexkombination von $(k-1)$ Elementen aus \tilde{X} . Dieser Prozess lässt sich so oft durchführen, bis eine Konvexkombination aus $n+1$ Elementen aus $\tilde{X} \subset X$ gefunden wird. Weiter allerdings nicht, da dann keine affine Abhängigkeit der Elemente herrscht. □

Ein wichtiger Satz bezüglich der konvexen Hülle soll an dieser Stelle noch formuliert und bewiesen werden. Der Beweis verläuft wie in [1] S. 115:

Satz 2.4.2: *Sei X eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist die konvexe Hülle $\text{conv}(X)$ ebenfalls kompakt.*

Beweis: Sei also X eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Sei A die Menge

$$A := \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mid \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \in [0, 1] \right\}.$$

Sei zudem

$$(\alpha, x) := ((\alpha_0, \dots, \alpha_n), (x_0, \dots, x_n)) \in A \times X^{n+1}$$

und f eine Funktion mit $f : A \times X^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f(\alpha, x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$. Es gilt, dass die Menge A kompakt ist, da sie offensichtlich beschränkt und abgeschlossen ist. Und somit ist auch $A \times X^{n+1}$ als kartesisches Produkt kompakter Mengen kompakt. Des Weiteren ist die Funktion f offensichtlich stetig. Daher ist das Bild $f(A \times X^{n+1})$

nach Satz 1.1.6 ebenfalls kompakt. Nun gilt nach dem Satz von Carathéodory aber $f(A \times X^{n+1}) = \text{conv}(X)$ und damit ist $\text{conv}(X)$ kompakt, was genau zu zeigen war. \square

Zusammenfassend ist also zu erkennen, dass jedes Element der konvexen Hülle einer Teilmenge des \mathbb{R}^n mit höchstens $n + 1$ Elementen dieser Menge dargestellt werden kann und die konvexe Hülle einer kompakten Menge ebenfalls kompakt ist. Im folgenden Kapitel wird der konkrete Zusammenhang zwischen dem Satz von Carathéodory und dem Satz von Helly näher betrachtet.

3 Zusammenhang der Sätze

In diesem Kapitel sollen die im Kapitel 2 vorgestellten Sätze noch einmal genauer betrachtet werden. Wie bereits gezeigt, lässt sich der Satz von Helly aus dem Satz von Radon folgern. Tatsächlich ist ein solcher Beweis auch mit dem Satz von Carathéodory möglich; es lässt sich sogar eine Äquivalenz zeigen. Der Satz von Helly wird zunächst für den endlichen Fall mit kompakten konvexen Mengen betrachtet. Der Beweis ist in ähnlicher Form in [14] S. 17 - 22 zu finden, sowie in [2] S. 39 - 42.

3.1 Äquivalenz des Satzes von Helly und Satz von Carathéodory

Satz 3.1.1: *Falls gilt:*

- (1) *Für eine beliebige Teilmenge X des \mathbb{R}^n ist jeder Punkt x der konvexen Hülle $\text{conv}(X)$ eine Konvexkombination von höchstens $n + 1$ Elementen aus der Menge X und es gilt:*

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \mid \lambda_i \in [0, 1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \text{ und } x_i \in X \text{ mit } x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \right\}.$$

- (2) *Sei \mathcal{K} eine Familie von konvexen Mengen K_i des \mathbb{R}^n mit $i \in I$, wobei $|I| \geq n + 1$. Sei zudem I endlich oder alle $K_i \in \mathcal{K}$ abgeschlossen und mindestens ein $K_i \in \mathcal{K}$ kompakt. Falls jeweils $n + 1$ Mengen in \mathcal{K} einen gemeinsamen Punkt haben, also für jedes $J \subseteq I$ mit $|J| = n + 1$ gilt, dass $\bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset$, dann haben alle Mengen in \mathcal{K} einen gemeinsamen Punkt und es gilt $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.*

Dann sind die Aussagen (1) und (2) äquivalent zueinander.

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, dass (2) aus (1) folgt:

Seien zunächst $K_i \in \mathcal{K}$ nicht-leere und kompakte konvexe Mengen. Wegen der Annahme in (2) gilt, dass je $n + 1$ Elemente aus \mathcal{K} einen gemeinsamen Schnitt haben. Angenommen, es gelte $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$.

Definiere nun die Funktion

$$f(x) := \max\{d(x, K_i) \mid i \in I, x \in \mathbb{R}^n\},$$

welche den größten Abstand eines beliebigen Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu den Mengen aus der Familie \mathcal{K} angibt.

Sei nun x_0 jenes Element auf dem die Funktion f minimal ist. Offensichtlich gilt $f(x_0) > 0$, da angenommen wurde, dass kein gemeinsamer Schnitt aller Mengen K_i existiert. $f(x_0) = 0$ würde dann gelten, wenn $d(x_0, K_i) = 0$ für alle $i \in I$ gelten würde, was aber impliziert, dass x_0 in jedem K_i liegt und deswegen ein gemeinsamer Schnitt existieren müsste.

Nun gibt es eine Teilmenge $J \subset I$ für die gilt

$$f(x_0) = d(x_0, K_j) \text{ für alle } j \in J.$$

Das bedeutet aber aufgrund der Definition des Abstands eines Punktes und einer Menge sowie der Annahme der Kompaktheit der Mengen aus der Familie \mathcal{K} , dass es $\omega_j \in J$ gibt, mit

$$\|x_0 - \omega_j\| = f(x_0) = d(x_0, K_j).$$

Diese ω_j sind eindeutig. Wäre dies nicht so, gäbe es ω_a und ω_b mit $\omega_a \neq \omega_b$, welche beide in einer Menge $K_{j'}$ liegen würden, für die gilt

$$\|x_0 - \omega_a\| = \|x_0 - \omega_b\| = f(x_0) = d(x_0, K_{j'}).$$

Dann gäbe es aber ein ω_c in der Mitte der Verbindungsstrecke der Punkte ω_a und ω_b . Dieses ω_c liegt aufgrund der Konvexität von $K_{j'}$ ebenfalls in $K_{j'}$ und offensichtlich gilt aber $d(x_0, \omega_c) \leq d(x_0, \omega_a) = d(x_0, \omega_b)$, was ein Widerspruch zu Annahme ist, dass ω_a

und ω_b die Elemente aus $K_{i'}$ sind, mit dem minimalsten Abstand zu x_0 .

Insgesamt bedeutet es aber, dass $x_0 \in \text{conv}(\{\omega_i \mid i \in J\})$ liegt. Nach dem Satz von Carathéodory 2.4.1 gilt nun, dass es eine Teilmenge $\tilde{J} \subset J$ gibt, mit $|\tilde{J}| \leq n + 1$, sodass gilt:

$$x_0 \in \text{conv}(\{\omega_i \mid i \in \tilde{J}\}).$$

Sei nun

$$g(x) := \max\{d(x, K_i) \mid i \in \tilde{J}, x \in \mathbb{R}^n\}$$

ebenfalls eine Maximalfunktion. Offensichtlich muss gelten, dass $g(x_0) = f(x_0) > 0$ und x_0 auch das Minimum der Funktion g ist. Nun gilt aber, da $|\tilde{J}| \leq n + 1$, dass ein gemeinsamer Schnitt der Mengen K_i mit $i \in \tilde{J}$ existiert. Es gibt also ein $y \in \bigcap_{i \in \tilde{J}} K_i$ für welches insbesondere gilt: $g(y) = 0$. Insgesamt folgt daher - aufgrund der Minimalität von x_0 - die Ungleichung

$$0 < g(x_0) \leq g(y) = 0,$$

was ein Widerspruch ist und damit diese Richtung für eine endliche Familie kompakter Mengen bewiesen wurde. Aufgrund von Lemma 2.1.3 und Korollar 2.2.2 kann hieraus der allgemeine Fall für eine endliche Familie nicht notwendigerweise kompakter aber konvexer Mengen, sowie eine unendliche Familie abgeschlossener konvexer Mengen von denen mindestens eine kompakt ist, abgeleitet werden.

Nun soll gezeigt werden, dass (1) aus (2) folgt.

Sei $y \in \text{conv}(X)$, wobei $y \notin X$ gilt, da ansonsten y als Konvexkombination von sich selber dargestellt werden könnte und nichts zu beweisen wäre. Seien nun für jedes $x \in X$ die beiden geschlossenen Halbräume

$$H_1(x) := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - y, a - x \rangle \geq 0\} \text{ und}$$

$$H_2(x) := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - y, a - x \rangle \leq 0\}$$

gegeben, zugehörend zur Hyperebene $H(x)$ welche durch den Punkt x verläuft und orthogonal zur Strecke $[x, y]$ liegt. Zudem gilt $y \in H_2(x)$.

Zeige nun, dass gilt

$$\bigcap_{x \in X} H_1(x) = \emptyset.$$

Angenommen der Schnitt ist nicht-leer. Dann lässt sich ein $z \in \bigcap_{x \in X} H_1(x)$ finden, für welches aufgrund der Definition von $H_1(x)$ gilt:

$$\langle x - y, z - x \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in X.$$

Daraus folgt mithilfe der Rechenregeln für das Standardskalarprodukt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \langle z - y, y - x \rangle &= \langle z + 0 - y, y - x \rangle \\ &= \langle z + -x + x - y, y - x \rangle \\ &= \langle z - x, y - x \rangle + \langle x - y, y - x \rangle \\ &= -1 \underbrace{\langle x - y, z - x \rangle}_{\geq 0} - \underbrace{\|x - y\|^2}_{>0, \text{ da } y \notin X} < 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Da $y \in \text{conv}(X)$ liegt, gibt es $x_i \in X$ und $\lambda_i \in [0, 1]$, sodass für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

Tatsächlich gilt aber, abermals aufgrund der Rechenregeln des Standardskalarprodukts

$$\begin{aligned} 0 &= \langle z - y, 0 \rangle = \langle z - y, y - y \rangle \\ &= \langle z - y, y - \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\langle z - y, y - x_i \rangle}_{<0} < 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Daher folgt die Behauptung $\bigcap_{x \in X} H_1(x) = \emptyset$.

Da es sich bei den Mengen $H_1(a)$ um nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Mengen handelt, deren gemeinsamer Schnitt leer ist, gilt nach der Kontraposition vom Satz von Helly 2.1.1, dass es $n + 1$ Punkte $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ gibt, für welche gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} H_1(x_i) = \emptyset.$$

Daraus folgt aber wiederum, dass $y \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ liegt. Denn angenommen es stimmt nicht. Dann gäbe es eine Hyperebene, welche den Punkt y von dem konvexen Körper $\text{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ strikt trennt. Es gibt also ein $\alpha \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in \mathbb{R}$, sodass für alle $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ gilt

$$\langle \alpha, y \rangle > \beta \text{ und } \langle \alpha, x_i \rangle < \beta.$$

Nun findet sich aber ein Strahl l , welcher beim Punkt y startet und orthogonal zu der Hyperebene verläuft. Dieser Strahl liegt bis auf ein endliches Stück in jedem Halbraum $H_1(x_i)$, da die x_i insbesondere Elemente in X sind und $y \in H_2(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Das bedeutet aber, dass die Halbräume einen gemeinsamen Schnitt haben (und zwar der, in dem der Strahl liegt), also $\bigcap_{i=1}^{n+1} H_1(x_i) \neq \emptyset$ gilt, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass die $n + 1$ Halbräume $H_1(x_i)$ keinen gemeinsamen Schnitt haben. Somit gilt $y \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Damit ist $y \in \text{conv}(X)$ darstellbar als Konvexkombination von $n + 1$ Elementen aus X , was dem Satz von Carathéodory entspricht und genau zu zeigen war. □

3.2 Äquivalenz des Satzes von Carathéodory und Satz von Radon

Abschließend sei noch die Äquivalenz der Sätze von Radon und Carathéodory gezeigt. Der Beweis findet sich in dieser Form in [14] S. 22 - 24. Konkret wird also folgendes gezeigt:

Satz 3.2.1: *Falls gilt:*

- (1) *Für eine beliebige Teilmenge X des \mathbb{R}^n ist jeder Punkt x der konvexen Hülle $\text{conv}(X)$ eine Konvexkombination von höchstens $n + 1$ Elementen aus der Menge X und es gilt:*

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \mid \lambda_i \in [0, 1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \text{ und } x_i \in X \text{ mit } x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \right\}.$$

- (2) *Sei X eine endliche Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $|X| \geq n + 2$. Dann gilt:
 X kann derart in zwei disjunkte Teilmengen X_1 und X_2 zerlegt werden, sodass*

$$\text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2) \neq \emptyset$$

gilt.

Dann sind (1) und (2) äquivalent zueinander.

Beweis: Zeige zunächst, dass (2) aus (1) folgt.

Sei dazu X eine Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, wobei $m \geq n + 2$ gilt. Insbesondere gilt aber, dass $y = \frac{1}{m}x_1 + \dots + \frac{1}{m}x_m$ in $\text{conv}(X)$ liegt, da die Koeffizienten $\frac{1}{m}$ alle Kriterien erfüllen um die Koeffizienten einer Konvexkombination zu sein.

Nach dem Satz von Carathéodory 2.4.1 lässt sich y aus $n+1$ Elementen von X darstellen; es gilt daher:

$$\frac{1}{m}x_1 + \dots + \frac{1}{m}x_m = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,$$

mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ und damit

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i,$$

mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, wobei $\lambda_i = 0$ für $m - (n + 1)$ Indizes $i \in \{1, \dots, m\}$. Somit folgt aber auch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{m} - \lambda_i\right) x_i = 0 \text{ bzw. } \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0,$$

mit $\alpha_i := \frac{1}{m} - \lambda_i$. Insbesondere gilt $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$, sowie $\alpha_i \neq 0$ für einige $i \in \{1, \dots, m\}$. (Merke, dass dies insbesondere für die $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_i = 0$ gilt. Zudem gilt wegen $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{m} = \frac{n+1}{m} < 1$, dass $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i < 0$ ist, und somit nicht alle $\alpha_i \geq 0$ sind.)

Nach einer möglichen Sortierung ergibt sich der Ausdruck

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i + \sum_{j \in J} \alpha_j x_j = 0, \quad (14)$$

wobei $I := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \alpha_i > 0\}$ und $J := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \alpha_i \leq 0\}$. Definiere nun

$$a := \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Insbesondere ist a als Summe positiver Zahlen ebenfalls positiv. Da $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ ist, gilt

$$0 = a + \sum_{j \in J} \alpha_j \Leftrightarrow a = - \sum_{j \in J} \alpha_j.$$

Geteilt durch a ergibt sich sowohl

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{a} = 1 \text{ als auch } \sum_{j \in J} \frac{-\alpha_j}{a} = 1,$$

wobei $\frac{\alpha_i}{a}$ und $\frac{-\alpha_j}{a}$ aufgrund der Konstruktion positiv für alle $i \in I$ und $j \in J$ sind. Die $\frac{\alpha_i}{a}$ bzw. $\frac{-\alpha_j}{a}$ erfüllen also die Kriterien von Koeffizienten einer Konvexkombination.

Definiere nun die Mengen $X_1 := \{x_i \mid i \in I\}$ und $X_2 := \{x_j \mid j \in J\}$. Insbesondere

gilt $X_1, X_2 \subset X$. Dann gilt wegen (14) auch

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \alpha_i x_i &= - \sum_{j \in J} \alpha_j x_j \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} \sum_{i \in I} \alpha_i x_i &= - \frac{1}{a} \sum_{j \in J} \alpha_j x_j \\ \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{a} x_i}_{\in \text{conv}(X_1)} &= \underbrace{\sum_{j \in J} \frac{-\alpha_j}{a} x_j}_{\in \text{conv}(X_2)} = x. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also auf beiden Seiten eine Konvexkombination, bestehend aus Elementen zweier disjunkter Teilmengen der Menge X , welche das selbe Element x darstellen. Es gilt also $x \in \text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2)$, weswegen der Schnitt der konvexen Hüllen zweier disjunkter Teilmengen von X insbesondere nicht-leer ist. Dies war genau zu zeigen.

Nun soll die Richtung von (2) nach (1) gezeigt werden.

Sei dafür $x \in \text{conv}(X)$ ein beliebiger Punkt der konvexen Menge. Wegen Satz 1.2.4 gibt es also eine endliche Anzahl m an Punkten $x_1, \dots, x_m \in X$ mit

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \quad (15)$$

wobei $\lambda_i \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Sei m minimal gewählt. Es gilt nun zu zeigen, dass $m \leq n + 1$.

Angenommen es gilt $m > n + 1$. Dann kann die Menge $\tilde{X} := \{x_1, \dots, x_m\}$ wegen dem Satz von Radon in zwei disjunkte Teilmengen X_1 und X_2 aufgeteilt werden, deren konvexe Hüllen $\text{conv}(X_1)$ und $\text{conv}(X_2)$ einen gemeinsamen Schnitt enthalten. Es gibt also nichtleere Teilmengen $I, J \subset \{1, \dots, m\}$ mit:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = \sum_{i \in J} \alpha_i x_i, \quad (16)$$

wobei $\alpha_i \in [0, 1]$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{i \in J} \alpha_i = 1$. Sei nun $\beta_i := \alpha_i$ für alle $i \in I$ und $\beta_i := -\alpha_i$ für alle $i \in J$. Wegen (16) gilt insbesondere $\sum_{i=1}^m \beta_i x_i = 0$.

Wähle nun ein $i_0 \in I$ für welches gilt:

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}} = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\beta_i} \mid i \in I, \beta_i > 0 \right\}. \quad (17)$$

Definiert man nun $\tilde{\lambda}_i := \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}\beta_i$, so gilt wegen (15) und (17), dass $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Denn für positive β_i gilt $\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}\beta_i = \beta_i(\frac{\lambda_i}{\beta_i} - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}) \geq 0$ und damit auch $\tilde{\lambda}_i \geq 0$. Für $\beta_i \leq 0$ gilt $-\frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}\beta_i \geq 0$, also insbesondere auch $\tilde{\lambda}_i \geq 0$.

Zudem gilt $\tilde{\lambda}_{i_0} = \lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}\beta_{i_0} = 0$ und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i &= \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}\beta_i \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i}_{=1} - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}} \underbrace{\sum_{i=1}^m \beta_i}_{=0} = 1. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i x_i &= \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}}\beta_i \right) x_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i}_{=x} - \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}} \underbrace{\sum_{i=1}^m \beta_i x_i}_{=0} = x, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\lambda}_{i_0} = 0$ ist, und somit x als Konvexkombination von $m - 1$ Elementen dargestellt werden kann. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass m minimal ist. Somit ist auch diese Richtung bewiesen. □

4 Anwendungen des Satzes von Helly

Im letzten Kapitel sollen einige Anwendungen des Satzes von Helly vorgestellt werden. Im wesentlichen handelt es sich um Sätze für deren Beweis der Satz von Helly genutzt wurde. Die Sätze und deren Beweise sind in ihren Grundzügen aus [1] S. 110 - 115 entnommen und die Beweise präzisiert worden. Alternativ kann ein Beweis von Satz 4.4 in

[9] S. 205 - 206 eingesehen werden. Für den Satz 4.5 findet man einen ähnlichen Beweis in [8] S. 76 - 78. Nun soll es mit dem ersten Satz beginnen:

Satz 4.1: *Sei \mathcal{K} eine Familie von mindestens $n + 1$ konvexen Mengen im \mathbb{R}^n , wobei \mathcal{K} endlich ist, oder die Mengen $K_i \in \mathcal{K}$ kompakt sind. Sei C irgendeine weitere konvexe Menge im \mathbb{R}^n . Dann existiert eine Parallelverschiebung von C , welche entweder 1. in allen Mitgliedern von \mathcal{K} enthalten ist, 2. sie schneidet oder 3. sie enthält, falls eine solche Parallelverschiebung von C für je $n + 1$ Mitglieder von \mathcal{K} existiert.*

Beweis: Seien $K_i \in \mathcal{K}$ die konvexen Mengen der Menge \mathcal{K} . Definiere nun die Menge

$$K'_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x + C) \text{ schneidet, enthält oder ist enthalten in } K_i\}.$$

Zunächst soll gezeigt werden, dass die Mengen K'_i auch konvex sind, also für zwei beliebige Elemente $x, y \in K'_i$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K'_i.$$

Dies ist in der Tat der Fall.

1. Fall: Sei es zunächst für den Fall gezeigt, dass $(x + C)$ die Menge K_i schneidet, es also gilt:

$$(x + C) \cap K_i \neq \emptyset.$$

Seien dafür $x, y \in K'_i$ zwei beliebige Elemente. Dann gilt sowohl $(x + C) \cap K_i \neq \emptyset$ als auch $(y + C) \cap K_i \neq \emptyset$. Daher gibt es Elemente $\tilde{x} \in (x + C) \cap K_i$ und $\tilde{y} \in (y + C) \cap K_i$. Insbesondere sind \tilde{x} und \tilde{y} auch Elemente in K_i .

Nun existieren $c_1, c_2 \in C$, sodass \tilde{x} und \tilde{y} dargestellt werden können als:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + c_1 \\ \tilde{y} &= y + c_2\end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned}x &= \tilde{x} - c_1 \\y &= \tilde{y} - c_2.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man nun

$$\begin{aligned}\lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda(\tilde{x} - c_1) + (1 - \lambda)(\tilde{y} - c_2) \\&= \lambda\tilde{x} - \lambda c_1 + (1 - \lambda)\tilde{y} - (1 - \lambda)c_2 \\&= \underbrace{(\lambda\tilde{x} + (1 - \lambda)\tilde{y})}_{:=k \in K_i, \text{ da } K_i \text{ konvex}} - \underbrace{(\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2)}_{:=c \in C, \text{ da } C \text{ konvex}}.\end{aligned}$$

Formt man diese Gleichung nun um, so erhält man

$$\lambda x + (1 - \lambda)y + c = k,$$

was bedeutet, dass für jedes Element der Form $\lambda x + (1 - \lambda)y$ sich stets ein Element $c \in C$ finden lässt um miteinander addiert ein Element $k \in K_i$ darzustellen. Es gilt also $((\lambda x + (1 - \lambda)y) + c) \cap K_i \neq \emptyset$ und da c in C liegt, insbesondere auch

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y) + C \cap K_i \neq \emptyset.$$

Daher gilt $(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in K'_i$.

2. Fall: Analog zeigt sich der Fall, falls $K_i \subset (x + C)$. Seien also $x, y \in K'_i$ zwei beliebige Elemente, welche die Forderung erfüllen. Dann gilt, dass für alle $k \in K_i$ es $c_1, c_2 \in C$ gibt, sodass

$$\begin{aligned}k &= x + c_1 \\k &= y + c_2.\end{aligned}$$

Analog zum ersten Fall erreicht man für $x, y \in K'_i$ den Ausdruck:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = k - \underbrace{(\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2)}_{:=c \in C, \text{ da } C \text{ konvex}} \Leftrightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y + c = k.$$

Für jedes Element $\lambda x + (1 - \lambda)y$ lässt sich also stets ein Element $c \in C$ finden, mit dem jedes $k \in K_i$ dargestellt werden kann. Daher folgt

$$K_i \subset ((\lambda x + (1 - \lambda)y) + C)$$

und insbesondere $(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in K'_i$.

3. Fall: Auch der dritte Fall $(x + C) \subset K_i$ verläuft analog. Seien $x, y \in K'_i$ zwei beliebige Elemente, welche die Forderung erfüllen. Dann gibt es für alle $c \in C$ Elemente $\tilde{x}, \tilde{y} \in K_i$ mit

$$\tilde{x} = x + c$$

$$\tilde{y} = y + c.$$

Abermals durch analoges Umformen wie in Fall 1, erhält man:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \underbrace{\lambda(\tilde{x} + (1 - \lambda)\tilde{y})}_{:=k \in K_i, \text{ da } K_i \text{ konvex}} - c \Leftrightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y + c = k.$$

Somit stellt jedes Element $\lambda x + (1 - \lambda)y$ mit jedem $c \in C$ ein Element $k \in K_i$ dar. Daher gilt

$$((\lambda x + (1 - \lambda)y) + C) \subset K_i$$

und insbesondere $(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in K'_i$.

Somit ist gezeigt, dass es sich bei allen drei Fällen um konvexe Mengen handelt. Da nun nach Voraussetzung für je $n + 1$ der K_i eine solche Parallelverschiebung von C existiert, also ein x_i für welches $x_i + C$ die jeweilige Eigenschaft erfüllt, liegt dieses x_i in allen $n + 1$ der jeweiligen bezüglich der K_i definierten Mengen K'_i .

Das bedeutet aber, da es sich bei den K'_i um konvexe Mengen handelt, die zu je $n + 1$ einen gemeinsamen Punkt haben, dass nach dem Satz von Helly 2.1.1 die Menge

$$\bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K'_i \neq \emptyset$$

und daher ein $\tilde{x} \in \bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K'_i$ existiert mit: $\tilde{x} + C$ schneidet, enthält oder ist enthalten in allen $K_i \in \mathcal{K}$.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass der Satz von Helly sowohl im endlichen als auch im unendlichen Fall angewandt werden kann. Im endlichen Fall existieren trivialerweise auch nur endlich viele K'_i und somit kann der Satz von Helly angewandt werden. Im unendlichen Fall sind die Mengen K_i und C kompakt. Mithilfe der Minkowski-Summe lassen sich die Mengen K'_i definieren als:

$$K'_i = K_i - C = K_i + (-1)C = \{x \mid x = k - c, k \in K_i, c \in C\}.$$

Nach Proposition 1.3.5 ist allerdings bekannt, dass die Minkowski-Summe zweier kompakter Mengen wieder kompakt ist. Somit handelt es sich bei den K'_i um eine unendliche Anzahl kompakter und konvexer Mengen. Nach dem Satz von Helly 2.1.1 genügt bereits eine kompakte Menge in einer unendlichen Familie konvexer Mengen, um diesen anzuwenden zu können.

□

Satz 4.2: *Sei \mathcal{L} eine endliche Familie von parallelen Strecken im \mathbb{R}^2 . Zusätzlich sollen je drei von diesen Strecken von einer Geraden geschnitten werden. Dann existiert eine Gerade, die alle Strecken aus \mathcal{L} schneidet.*

Beweis: Für $|\mathcal{L}| = 3$ ist der Satz klar. Sei daher $|\mathcal{L}| \geq 3$ und seien o.B.d.A. alle Strecken parallel zur y -Achse. Für jede Strecke $L_i \in \mathcal{L}$ sei die Menge K_i die Menge aller $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ für welche gilt, dass die Gerade $y = \alpha x + \beta$ die Strecke L_i schneidet. Sei \mathcal{K} die Familie aller K_i . Insbesondere gilt $|\mathcal{L}| = |\mathcal{K}|$.

Zeige also zunächst, dass die Mengen K_i konvex sind. Sei dafür $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ das untere Ende der Strecke L_i . Dann gilt:

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta \Leftrightarrow y_1 - \alpha x_1 = \beta.$$

Es können also für alle Geraden, welche den Punkt (x_1, y_1) schneiden, die β in Abhängigkeit von α ausgedrückt werden. Analog gilt dies auch für den obersten Punkt

$(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ der Strecke L_i mit

$$y_2 - \alpha x_2 = \beta.$$

Insgesamt kann nun die Menge K_i ausgedrückt werden als:

$$K_i = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 - \alpha x_2 \leq \beta, y_1 - \alpha x_1 \geq \beta\},$$

wobei (x_1, y_1) der unterste Punkt der Strecke ist und (x_2, y_2) der oberste Punkt der Strecke ist. Insbesondere sind die K_i konvex, denn es gilt für zwei beliebige Elemente $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in K_i$ und $\lambda \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha_1, \beta_1) + (1 - \lambda)(\alpha_2, \beta_2) &= (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) + ((1 - \lambda)\alpha_2, (1 - \lambda)\beta_2) \\ &= (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2). \end{aligned}$$

Daher ist zu zeigen, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$\text{I. } y_2 - (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)x_2 \leq \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2$$

$$\text{II. } y_1 - (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)x_1 \geq \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2.$$

Dies ist tatsächlich der Fall, denn für I. gilt:

$$\begin{aligned} y_2 - (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)x_2 &\leq \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2 \\ \Leftrightarrow y_2 - \lambda\alpha_1 x_2 - (1 - \lambda)\alpha_2 x_2 &\leq \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2 \\ \Leftrightarrow y_2 - \lambda\alpha_1 x_2 - (1 - \lambda)\alpha_2 x_2 - \lambda\beta_1 - (1 - \lambda)\beta_2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow y_2 - \lambda \underbrace{(\alpha_1 x_2 + \beta_1)}_{\geq y_2} - (1 - \lambda) \underbrace{(\alpha_2 x_2 + \beta_2)}_{\geq y_2} &\leq 0 \end{aligned}$$

da sowohl (α_1, β_1) als auch (α_2, β_2) Elemente aus K_i sind. Daher folgt für $\alpha_1 x_2 + \beta_1 := y_2 + \epsilon$ und $\alpha_2 x_2 + \beta_2 := y_2 + \delta$ mit $\epsilon, \delta \geq 0$:

$$\begin{aligned} y_2 - \lambda(y_2 + \epsilon) - (1 - \lambda)(y_2 + \delta) &= y_2 - \lambda y_2 - \lambda\epsilon - (1 - \lambda)y_2 - (1 - \lambda)\delta \\ &= (-1) \left(\underbrace{\lambda\epsilon}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \lambda)\delta}_{\geq 0} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass I. wahr ist. Analog lässt sich zeigen, dass II. wahr ist.

Mit selbigen Schritten und der Tatsache, dass $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in K_i$ erhält man

$$\begin{aligned} y_1 - (\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2)x_1 &\geq \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2 \\ \Leftrightarrow y_1 - \lambda \underbrace{(\alpha_1x_1 + \beta_1)}_{\leq y_1} - (1-\lambda) \underbrace{(\alpha_2x_1 + \beta_2)}_{\leq y_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

und schließlich wird auch mit $\alpha_1x_1 + \beta_1 := y_1 - \epsilon$ und $\alpha_2x_1 + \beta_2 := y_1 - \delta$ wobei $\epsilon, \delta \geq 0$ die Ungleichung

$$y_1 - \lambda(y_1 - \epsilon) - (1-\lambda)(y_1 - \delta) = \underbrace{\lambda\epsilon}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)\delta}_{\geq 0} \geq 0$$

erfüllt und somit ist die Aussage II. wahr.

Insgesamt bedeutet das also, dass die Mengen K_i konvex sind. Wenn nun also für jede Strecke L_i eine solche konvexe Menge K_i existiert und zudem jeweils drei Strecken eine gemeinsame Gerade haben, die alle drei Strecken schneidet, bedeutet es, dass die jeweiligen Mengen K_i der Strecken mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Wir haben also eine endliche Familie \mathcal{K} , bestehend aus konvexen Mengen $K_i \subset \mathbb{R}^2$, von denen jeweils drei einen gemeinsamen Punkt haben. Damit sind aber alle Bedingungen für den Satz von Helly 2.1.1 im zweidimensionalen Fall erfüllt und somit gilt, dass ein Punkt $(\alpha_0, \beta_0) \in \bigcap_{K_i \in \mathcal{K}} K_i$ existiert. Das heißt aber wiederum, dass die Gerade mit $y = \alpha_0x + \beta_0$ alle Strecken aus \mathcal{L} schneidet, was genau zu zeigen war. □

Satz 4.3: *Sei K eine konvexe Menge im \mathbb{R}^n und \mathcal{H} eine endliche Familie von offenen oder geschlossenen Halbräumen H_i mit $i \in I$, wobei $|I| < \infty$. Wird die Menge K von den Halbräumen H_i der Familie \mathcal{H} überdeckt, so wird K von bestimmten $n+1$ Halbräumen H_i der Familie \mathcal{H} überdeckt.*

Beweis: Sei also \mathcal{H} die Familie der Halbräume, welche K überdecken. Sei für jedes $H_i \in \mathcal{H}$ die Menge K'_i definiert als $K'_i := (K \setminus H_i)$, mit $i \in I$. Die Mengen K'_i sind offensichtlich konvex. Sei nämlich $H_i^* := (\mathbb{R}^n \setminus H_i)$ der Halbraum, der K'_i enthält. Dann besitzt jeder Punkt $x \in (\partial K'_i) \setminus \tilde{H}$ die selben Stützhyperenebenen wie jedes $x \in (\partial K) \cap H_i^*$, wobei \tilde{H} die zugehörige Hyperenebene zu H_i und H_i^* ist. Die übrigen $x \in \partial K'_i$ besitzen alle \tilde{H} als Stützhyperenebene. Daher ist nach Satz 1.4.10 die Menge K'_i konvex.

Die dadurch resultierende Familie $\mathcal{H}' = \{K'_i \mid H_i \in \mathcal{H}\}$ ist insbesondere endlich und besteht aus konvexen Mengen. Zudem gilt $\bigcap_{K'_i \in \mathcal{H}'} K'_i = \emptyset$. Wäre dies nicht der Fall, es also ein $x_0 \in \bigcap_{K'_i \in \mathcal{H}'} K'_i$ gäbe, würde es bedeuten, dass x_0 Element von jedem K'_i ist. Insbesondere gilt zudem $x_0 \in K$. Daraus folgt aber, dass $x_0 \notin H_i$ für alle $H_i \in \mathcal{H}$ gilt, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass die Familie \mathcal{H} die Menge K überdeckt.

Da die Familie \mathcal{H}' keinen gemeinsamen Schnitt hat, gilt aufgrund der Kontraposition des Satzes von Helly 2.1.1, dass es $n + 1$ oder weniger Mitglieder der Familie \mathcal{H}' gibt, welche keinen gemeinsamen Schnitt haben. Es gibt also ein $J \subseteq I$ mit $|J| \leq n + 1$ für das gilt:

$$\bigcap_{i \in J} K'_i = \emptyset.$$

Daraus folgt aber schließlich, dass die zugehörigen H_i mit $i \in J$ die Menge K überdecken, was genau zu zeigen war. □

Anmerkung 4.3.1: Der Satz lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass statt einer Familie von Halbräumen eine Familie \mathcal{K} von konvexen Mengen K_i gefordert werden kann. Allerdings müssen diese die Bedingung erfüllen, dass $(K \setminus K_i)$ konvex ist, was in der Regel für beliebige konvexe Mengen K_i nicht erfüllt ist, wohl aber - wie gezeigt - für Halbräume H_i .

Satz 4.4 (Satz von Kirchberger): *Zwei endliche Teilmengen X und Y des \mathbb{R}^n sind genau dann strikt trennbar, wenn für jede Menge S mit $|S| \geq n + 2$ und $S \subset (X \cup Y)$ die Mengen $S \cap X$ und $S \cap Y$ strikt trennbar sind.*

Beweis:

\Rightarrow : Die Hinrichtung ist trivial. Denn für ein $S \subset (X \cup Y)$ gilt insbesondere $(S \cap X) \subseteq X$ und $(S \cap Y) \subseteq Y$. Da X und Y strikt trennbar sind, sind auch alle Teilmengen von X und alle Teilmengen von Y strikt voneinander trennbar und somit auch $S \cap X$ und $S \cap Y$.

\Leftarrow : Sei $|X \cup Y| \geq n + 2$. Seien zudem $x := (x_1, \dots, x_n) \in X$ und $y := (y_1, \dots, y_n) \in Y$.

Zunächst kann festgestellt werden, dass aufgrund der Voraussetzung für jede Wahl von S eine Hyperebene existiert, die $(S \cap X)$ und $(S \cap Y)$ strikt voneinander trennt und somit o.B.d.A. für alle $x \in (S \cap X)$ gilt:

$$x \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha', z \rangle > \beta\}$$

und analog für alle $y \in (S \cap Y)$

$$y \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha', z \rangle < \beta\}$$

für eine bestimmte aber nicht unbedingt eindeutige Wahl von $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Dies lässt sich auch schreiben als

$$x \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n > 0\}$$

und

$$y \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n < 0\}$$

mit $-\beta := \alpha_0$.

Definiere nun für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die offenen Halbräume

$$H_x := \left\{ \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i > 0 \right\}$$

$$H_y := \left\{ \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i < 0 \right\},$$

wobei $H_x, H_y \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Da die Halbräume H_x und H_y abhängig von den jeweiligen x und y sind und da die Mengen X und Y endlich sind - und somit auch S endlich ist - bilden alle H_x und H_y eine endliche Familie \mathcal{H} von Halbräumen. Wie bereits gezeigt gibt es nach Voraussetzung für jede Wahl von S , also einer beliebige Auswahl an mindestens $n + 2$ Punkten von $X \cup Y$, mindestens eine Wahl von α , welche die strikte Trennung von $S \cap X$ und $S \cap Y$ erfüllt. Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass es ein Punkt $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, welcher in jedem Halbraum bezüglich der Elemente aus dem gewählten S enthalten ist und somit ein gemeinsamer Punkt dieser Halbräume ist.

Somit ergeben sich aber für jede Wahl von S mindestens $n+2$ Halbräume (da $|S| \geq n+2$), die ein gemeinsames α und damit einen gemeinsamen Schnitt aufweisen. Da Halbräume nach Lemma 1.4.2 konvex sind, die Familie \mathcal{H} der Halbräume endlich ist und für alle $H_x, H_y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt, folgt nach dem Satz von Helly 2.1.1, dass alle Halbräume in \mathcal{H} einen gemeinsamen Punkt $\tilde{\alpha} := (\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ besitzen, für den gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i x_i &> 0 \text{ für alle } x \in X \text{ und} \\ \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i y_i &< 0 \text{ für alle } y \in Y \end{aligned}$$

und damit für $\tilde{\alpha}' := (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ und alle $x \in X$ sowie $y \in Y$ folgt

$$\begin{aligned} x &\in \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \tilde{\alpha}', z \rangle > -\tilde{\alpha}_0\} \\ y &\in \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \tilde{\alpha}', z \rangle < -\tilde{\alpha}_0\}. \end{aligned}$$

Somit lassen sich die Mengen X und Y strikt trennen, was genau zu zeigen war. □

Satz 4.5: *Sei X eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wenn für je $n+1$ Punkte von X ein Punkt $y \in X$ existiert von dem aus alle $n+1$ Punkte sichtbar sind, das heißt die Strecke zwischen y und dem jeweiligen Punkt komplett in X liegt, dann ist die Menge X sternförmig, das heißt es gibt einen Punkt $z \in X$, von dem aus alle Punkte in X sichtbar sind.*

Beweis: Definiere zunächst für jedes $x \in X$ die Menge

$$V_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid [x, y] \subset X\},$$

also die Menge aller y die von x aus sichtbar sind. Die Eigenschaft der Sichtbarkeit beruht auf Gegenseitigkeit, das heißt: ist y von x aus sichtbar, so auch x von y aus. Dadurch gilt nach Voraussetzung für je $n+1$ der Mengen V_x , dass sie mindestens einen gemeinsamen Punkt haben, denn es gibt für je $n+1$ Elemente $x \in X$ ein solches y von dem aus alle sichtbar sind.

Es gilt nun zu zeigen, dass $\bigcap_{x \in X} V_x \neq \emptyset$. Aufgrund des Satzes von Helly 2.1.1 ist

bekannt, dass ein y_0 existiert, mit

$$y_0 \in \bigcap_{x \in X} \text{conv}(V_x). \quad (18)$$

Der Grund ist, dass die Mengen V_x im allgemeinen nicht konvex sind, jedoch die konvexe Hülle $\text{conv}(V_x)$ und aufgrund der Definition der konvexen Hülle gilt:

$$V_x \subseteq \text{conv}(V_x).$$

Da je $n+1$ der V_x einen gemeinsamen Schnitt haben, haben diesen gemeinsamen Schnitt auch insbesondere die $n+1$ dazugehörigen konvexen Hüllen $\text{conv}(V_x)$. Zuletzt sei noch zu erwähnen, dass es unendlich viele $\text{conv}(V_x)$ gibt, da X unendlich ist. Da die V_x aus Elementen bestehen die eine abgeschlossene Strecke garantieren, sind diese offensichtlich auch abgeschlossen. Für die abgeschlossenen Mengen V_x gilt zudem $V_x \subseteq X$. Da X kompakt ist, sind auch die Teilmengen V_x als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt. Nach Satz 2.4.2 ist die konvexe Hülle einer kompakten Menge auch kompakt. Somit kann der Satz von Helly 2.1.1 für den unendlichen Fall angewandt werden.

Nun gilt es zu zeigen, dass jenes y_0 im Schnitt $\bigcap_{x \in X} V_x$ liegt.

Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $u \in [y_0, x) \setminus X$, also ein Element u auf der Strecke, welches somit außerhalb der Menge X liegt und existieren muss, da y_0 von x aus nicht sichtbar ist.

Des Weiteren existiert ein $x' \in X \cap [u, x]$ mit $[u, x') \cap X = \emptyset$. Merke, dass $x' \in X$ liegt, aber die halboffene Strecke zwischen u und x' keinen Schnitt mit X hat. Demnach liegt x' auf dem Rand von X , der aufgrund der Abgeschlossenheit von X existiert.

Wähle nun ein $w \in (u, x')$, sodass

$$\|w - x'\| = \frac{1}{2}d(u, X)$$

gilt, wobei $d(u, X)$ der Abstand zwischen einem Punkt und einer Menge ist.

Wähle zusätzlich $v \in [u, w]$ und ein $x_0 \in X$, sodass gilt

$$\|x_0 - v\| = d([u, w], X),$$

wobei $d([u, v], X)$ der Abstand zwischen zwei Mengen ist. Da x_0 der nächstgelegene Punkt aus der Menge X zu v ist und demnach auf dem Rand von X liegt, gilt für die Menge V_{x_0} , dass sie in einem geschlossenen Halbraum H_* liegt, welcher begrenzt wird von einer durch x_0 laufenden Tangentialhyperebene H . Diese verläuft zudem senkrecht zu der Strecke $[v, x_0]$. Denn wäre dies nicht der Fall so würde ein offener Ball B_v mit Mittelpunkt v und Radius $r = d(v, x_0)$ einen Schnitt zur Hyperebene H aufweisen. Die Elemente im Schnitt $H \cap X$ sind alle von x_0 aus sichtbar und liegen insbesondere in X . Schneidet aber nun H den Ball B_v so gibt es damit Elemente in X welcher näher an v liegen als x_0 was ein Widerspruch zur Minimalität von v ist, woraus die Behauptung folgt.

Zudem ist $v \notin H_*$. Wegen $V_{x_0} \subset H_*$ gilt auch insbesondere $\text{conv}(V_{x_0}) \subset H_*$ sowie wegen (18) auch $y_0 \in \text{conv}(V_{x_0})$, da $x_0 \in X$. Daraus folgt aber insbesondere, dass der Winkel $\angle y_0 v x_0 < \frac{\pi}{2}$ ist, denn wäre er $\frac{\pi}{2}$ so verlief die Tangentialhyperebene durch x_0 parallel zur Strecke $[y_0, x]$ und y_0 wäre nicht in H_* enthalten. Ebenso wäre y_0 im Falle von $\angle y_0 v x_0 > \frac{\pi}{2}$ nicht in H_* enthalten. Des Weiteren gilt für den Winkel $\angle y_0 x_0 v \geq \frac{\pi}{2}$, was ebenfalls daraus folgt, dass y_0 in H_* enthalten ist, wobei hier die Gleichheit bedeuten würde, dass y_0 auf H liegt. Aufgrund der Wahl von v gilt allerdings

$$d(v, X) \leq d(\omega, X) = \frac{1}{2}d(u, X) < d(u, X),$$

woraus unmittelbar $v \neq u$ folgt. Wegen der resultierenden Winkel kann aber ein Dreieck mit den Eckpunkten y_0, v und x_0 konstruiert werden, wobei in jedem Fall ein Element auf der Strecke $[y_0, v]$ gefunden werden kann, dessen Abstand zu x_0 kleiner als der Abstand $d(v, x_0)$ ist. Ein solcher Punkt lässt sich insbesondere in der offenen Strecke $[u, v) \subset [u, w]$ finden. Sei nämlich v_0 der Punkt welcher auf der Strecke $[y_0, v]$ liegt und für den gilt, dass die Strecke $[v_0, x_0]$ orthogonal zu $[y, v]$ liegt. Befindet sich nun u auf der Strecke $[y_0, v_0]$ so liegt $v_0 \in [u, v)$ und es gilt $d(v_0, x_0) < d(v, x_0)$. Liegt u auf der Strecke (v_0, v) , so erfüllt aufgrund der Konstruktion jedes Element $v' \in [u, v)$ die Eigenschaft $d(v', x_0) < d(v, x_0)$. Somit würden aber sowohl v_0 als auch die v' in $[u, w]$ liegen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität des Abstandes von $v \in [u, w]$ zur Menge X .

□

Satz 4.6: Sei X eine Menge des \mathbb{R}^n mit dem Durchmesser $\text{diam}(X) \leq 2$, wobei $\text{diam}(X) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$. Dann liegt X in einer geschlossenen Kugel mit dem Radius $\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. Falls X nicht in einer kleineren Kugel liegt, enthält der Abschluss \overline{X} die Eckpunkte eines n -Simplex der Kantenlänge 2.

Beweis: Zeige den Beweis zunächst für eine Menge X mit $|X| \leq n + 1$, da der Beweis für eine beliebige Menge hieraus folgt.

Sei also X eine Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $|X| \leq n + 1$. Sei y das Zentrum der kleinsten geschlossenen Kugel B , welche X enthält und sei r der Radius dieser. Sei zudem

$$\{x_0, \dots, x_m\} := \{x \in X \mid \|y - x\| = r\}$$

die Menge aller $x \in X$ welche den Radius von B als Abstand zum Mittelpunkt y haben, wobei $m \leq n$ gilt, da diese Eigenschaft höchstens alle $x \in X$ erfüllen können oder auch weniger. Offensichtlich gilt $y \in \text{conv}(\{x_0, \dots, x_m\})$.

Es gelte o.B.d.A $y = 0$. Daraus folgt allerdings, dass es $\lambda_i \in [0, 1]$ gibt, mit

$$0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i, \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1. \quad (19)$$

Da nach Voraussetzung $\text{diam}(X) \leq 2$ folgt für jedes $j, i \in \{0, \dots, m\}$, dass gilt:

$$d_{ij} := \|x_i - x_j\| \leq 2 \quad (20)$$

und daher auch

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 = \|x_i - x_j\|^2 &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{i_k} - x_{j_k})^2} \right)^2 = \sum_{k=1}^n (x_{i_k}^2 - 2x_{i_k}x_{j_k} + x_{j_k}^2) \\ &= \langle x_i, x_i \rangle - 2\langle x_i, x_j \rangle + \langle x_j, x_j \rangle \\ &= \underbrace{\|x_i\|^2}_{=r^2} - 2\langle x_i, x_j \rangle + \underbrace{\|x_j\|^2}_{=r^2} \\ &= 2r^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle. \end{aligned}$$

Für jedes j gilt nun aber wegen $d_{ij} \leq 2$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und somit $d_{ij}^2 \leq 4$, sowie für $d_{jj} = 0$ die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i d_{ij}^2}{4} = \frac{\lambda_0 d_{0j}}{4} + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_j d_{jj}}{4}}_{=0} + \dots + \frac{\lambda_m d_{mj}}{4} \leq \sum_{i \neq j} \lambda_i$$

und daher

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_j &= \sum_{i \neq j} \lambda_i \geq \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i d_{ij}^2}{4} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i (2r^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle)}{4} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i 2r^2}{4} - \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i 2\langle x_i, x_j \rangle}{4} \\ &= \frac{r^2}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^m \lambda_i}_{=1} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^m \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle}_{=0} \\ &= \frac{r^2}{2}, \end{aligned}$$

da aufgrund der Rechenregeln für das Standardskalarprodukt

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \underbrace{\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i}_{=0 \text{ wegen (19)}}, x_j \right\rangle = 0$$

gilt.

Summiert man nun $1 - \lambda_j \geq \frac{r^2}{2}$ über j , so erhält man daher

$$\sum_{j=0}^m (1 - \lambda_j) = m + 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^m \lambda_j}_{=1} = m \geq (m + 1) \frac{r^2}{2} = \sum_{j=0}^m \frac{r^2}{2}$$

und insgesamt also

$$m \geq (m + 1) \frac{r^2}{2} \Leftrightarrow \frac{2m}{m + 1} \geq r^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2m}{m + 1}} \geq r.$$

Da $m \leq n$ ist, folgt wegen $r^2 \leq \frac{2m}{m+1} \leq \frac{2n}{n+1}$ daher auch unmittelbar:

$$r \leq \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Der Fall $r = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ impliziert, dass kein Element in (20) gefunden werden kann, sodass $d_{ij} \leq 2$ gilt. Daher muss $m = n$ gelten und eben auch $d_{ij} = 2$ für alle $i, j \in 0, \dots, m = n$. Dann haben aber alle $x \in X$ den selben Abstand zum Mittelpunkt y des Balls B und liegen daher alle auf dem Rand der Menge \overline{X} . Zudem ist ihr Abstand jeweils 2 und somit bilden Sie ein n -Simplex mit Eckpunkten in \overline{X} und Seitenlänge 2.

Letztlich folgt hieraus auch der Fall für eine Menge X mit $|X| \geq n + 1$. Betrachte man nämlich eine Teilmenge $\tilde{X} \subset X$ mit $|\tilde{X}| = n + 1$. Insbesondere gilt auch $\text{diam}(\tilde{X}) \leq 2$. Daher liegen alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ in einer Kugel \tilde{B} vom Radius $r = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. Betrachte nun die abgeschlossenen Kugeln $B_{\tilde{x}}$ definiert durch

$$B_{\tilde{x}} := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - \tilde{x}\| \leq \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \right\},$$

also jene Kugeln um die jeweiligen $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit dem Radius r . Dann gilt, dass sich je $n + 1$ der abgeschlossenen Kugeln $B_{\tilde{x}}$ schneiden, da der maximale Abstand zwischen zwei Elementen in \tilde{B} maximal $2r$ ist. Insbesondere ist eine Kugel eine konvexe Menge. Da dies für jede $n + 1$ -elementige Teilmenge $\tilde{X} \subset X$ gilt, weisen somit je $n + 1$ solcher Bälle $B_{\tilde{x}}$ einen gemeinsamen Schnitt auf. Daher gilt nach dem Satz von Helly 2.1.1, dass es ein $\tilde{y} \in \bigcap_{x \in X} B_{\tilde{x}}$ gibt, dessen Abstand zu jedem $x \in X$ genau r beträgt und somit die abgeschlossene Kugel $B_{\tilde{y}}$ alle $x \in X$ enthält.

Da die $B_{\tilde{x}}$ abgeschlossen sind und eine Kugel per Definition auch beschränkt, sind diese auch kompakt, wodurch der Satz von Helly auch angewandt werden kann, wenn die Menge X unendlich groß ist. □

Satz 4.7: Sei K ein konvexer Körper im \mathbb{R}^n . Dann existiert ein Punkt $y \in K$, sodass für jede Strecke $[u, v] \subset K$ mit $u, v \in \partial K$ die durch y verläuft, gilt:

$$\frac{\|y - u\|}{\|v - u\|} \leq \frac{n}{n+1}.$$

Beweis: Definiere zunächst für jeden Punkt $x \in K$ die Menge

$$K_x := x + \frac{n}{n+1}(K - x).$$

Es ist zu zeigen, dass $\bigcap_{x \in X} K_x \neq \emptyset$ gilt. Nach dem Satz von Helly 2.1.1 genügt es zu zeigen, dass der Schnitt von $n+1$ Elementen $x_0, \dots, x_n \in K$ das Element $y := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i$ beinhaltet.

Dies ist in der Tat der Fall, denn für jedes j gilt:

$$\begin{aligned} x_j + \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} x_i - x_j \right) &= x_j + \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} x_i - \frac{n}{n+1} x_j \\ &= \frac{1}{n+1} x_j + \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} x_i \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i = y \end{aligned}$$

und daher auch

$$y = x_j + \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} x_i - x_j \right) \in x_j + \frac{n}{n+1}(K - x_j),$$

da $\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} x_i$ eine Konvexkombination von Elementen aus K ist und K konvex ist. Somit ist y in jeder der $n+1$ Mengen K_{x_j} mit $j \in \{0, \dots, n\}$ vorhanden.

Des Weiteren ist K_x konvex, denn es gilt für zwei beliebige Elemente $y'_1, y'_2 \in K_x$, dass sie dargestellt werden können als:

$$y'_1 = x + \frac{n}{n+1}(y_1 - x) \text{ und } y'_2 = x + \frac{n}{n+1}(y_2 - x)$$

für bestimmte $y_1, y_2 \in K$. Daraus folgt aber für ein $\lambda \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} &\lambda \left(x + \frac{n}{n+1}(y_1 - x) \right) + (1 - \lambda) \left(x + \frac{n}{n+1}(y_2 - x) \right) \\ &= \lambda x + \frac{n}{n+1}(\lambda y_1 - \lambda x) + (1 - \lambda)x + \frac{n}{n+1}((1 - \lambda)y_2 - (1 - \lambda)x) \\ &= x + \frac{n}{n+1} \underbrace{(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 - x)}_{\in K, \text{ da } K \text{ konvex.}} \end{aligned}$$

Da also je $n + 1$ konvexe und kompakte Mengen K_x einen gemeinsamen Schnitt besitzen existiert nach dem Satz von Helly 2.1.1 ein gemeinsames y_0 in allen K_x .

Sei nun $[u, v]$ eine beliebige Strecke die durch y_0 verläuft mit $u, v \in \partial K$. Insbesondere liegt dann y_0 auch in der Menge K_u und daher auch auf der Strecke $y_0 \in u + \frac{n}{n+1}([u, v] - u)$. Das heißt also es gibt ein $\lambda \in [0, 1]$ mit

$$y_0 = u + \frac{n}{n+1}(\lambda v + (1 - \lambda)u - u) = u + \frac{n}{n+1}(\lambda v - \lambda u) = u + \frac{n}{n+1}\lambda(v - u).$$

Daraus folgt durch elementare Umformung allerdings

$$\begin{aligned} y_0 = u + \frac{n}{n+1}\lambda(v - u) &\Leftrightarrow y_0 - u = \frac{n}{n+1}\lambda(v - u) \\ &\Rightarrow \frac{\|y_0 - u\|}{\|v - u\|} = \lambda \frac{n}{n+1} \leq \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

was genau zu zeigen war. □

Satz 4.8: Sei \mathcal{X} eine additive Familie von Mengen, welche alle Halbräume des \mathbb{R}^n beinhaltet. Sei zudem f eine Funktion mit $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- I. Für $X, Y \in \mathcal{X}$ gilt $f(X \cup Y) \leq f(X) + f(Y)$.
- II. Für $X, Y \in \mathcal{X}$ mit $X \subset Y$ gilt $f(X) \leq f(Y)$.
- III. Es gibt eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, sodass $(\mathbb{R}^n \setminus B) \in \mathcal{X}$ und $f((\mathbb{R}^n \setminus B)) < \frac{1}{n+1}f(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Dann existiert ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, sodass für jeden offenen Halbraum H welcher \tilde{x} enthält, gilt: $f(H) \geq \frac{1}{n+1}f(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: o.B.d.A. soll gelten $f(\mathbb{R}^n) = 1$. Sei \mathcal{H} die Familie aller offenen Halbräume in \mathbb{R}^n und für jedes $H \in \mathcal{H}$ sei H' der abgeschlossene Halbraum $(\mathbb{R}^n \setminus H)$. Sei zudem \mathcal{G} eine Teilfamilie von \mathcal{H} welche alle offenen Halbräume $G \in \mathcal{H}$ mit $f(G) < \frac{1}{n+1}$ enthält und seien analog G' die dazugehörigen geschlossenen Halbräume. Dann wird für je $n + 1$

Mitglieder G_0, \dots, G_n der Familie \mathcal{G} wegen der Voraussetzung (I.) die Ungleichung

$$f\left(\bigcup_{i=0}^n G_i\right) \leq \sum_{i=0}^n f(G_i) < 1,$$

erfüllt, woraus wiederum

$$\bigcup_{i=0}^n G_i \neq \mathbb{R}^n$$

folgt, da $f(\mathbb{R}^n) = 1$ gilt. Daraus folgt sofort

$$\bigcap_{i=0}^n G'_i \neq \emptyset,$$

da es mindestens ein Element in \mathbb{R}^n geben muss, was in keinem der $n + 1$ Mengen G_i enthalten ist und somit in jedem der zugehörigen G'_i . Nun gilt nach dem Satz von Helly 2.1.1, dass jede endliche Teilfamilie $\{G' \mid G \in \mathcal{G}\}$ einen gemeinsamen Schnitt hat, da sie aus Halbräumen und somit konvexen Mengen besteht und je $n + 1$ Elemente einen gemeinsamen Schnitt aufweisen.

Betrachtet man nun eine beschränkte Menge B , welche die Eigenschaften III. erfüllt, so ist es möglich eine weitere Teilfamilie \mathcal{F} von \mathcal{H} zu finden, deren Schnitt $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F'$ beschränkt ist und die Menge B beinhaltet, wobei wieder analog $F' := (\mathbb{R}^n \setminus F)$ gilt. Somit folgt für jedes $F \in \mathcal{F}$ dann

$$F \subset \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F' \right) \subset (\mathbb{R}^n \setminus B),$$

da aus $B \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F'$ eben $\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F' \right) \subset (\mathbb{R}^n \setminus B)$ folgt.

Wegen II. und III. folgt aber für jedes F sofort

$$f(F) \leq f(\mathbb{R}^n \setminus B) < \frac{1}{n+1}$$

und folglich ist aufgrund der Konstruktion der Familie \mathcal{G} jedes F in \mathcal{G} enthalten. Somit sind auch die F' in der überabzählbaren Familie \mathcal{G}' enthalten.

Da für jede endliche Teilfamilie $\{G' \mid G' \in \mathcal{G}'\}$ ein gemeinsamer Schnitt existiert, existiert ein gemeinsamer Schnitt insbesondere auch für jede endliche Teilfamilie welche jedes F' enthält. Dies bedeutet aber, dass alle $G' \in \mathcal{G}'$ die Menge $\bigcap_{F' \in \mathcal{F}'} F'$ schneiden. Die G' sind per Definition abgeschlossen. Die Menge $\bigcap_{F' \in \mathcal{F}'} F'$ ist als Schnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen und aufgrund der Konstruktion ebenfalls beschränkt und daher wegen Satz 1.1.5 kompakt. Somit kann der unendliche Fall vom Satz von Helly 2.1.1 angewandt werden und daher gibt es ein x^* für das gilt:

$$x^* \in \bigcap_{G' \in \mathcal{G}'} G'.$$

Das bedeutet also, dass $x^* \in G'$ für alle offenen Halbräume $G' \in \mathcal{G}'$, also jene Halbräume G' die $f(G') < \frac{1}{n+1}$ erfüllen. Sei nun abschließend J ein offener Halbraum, welcher x^* enthält. Dann gilt $f(J) \geq \frac{1}{n+1}$. Denn wäre dies nicht der Fall - also $f(J) < \frac{1}{n+1}$ gelte - würde daraus folgen, dass x^* in J' enthalten ist, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass $x^* \in J$ gilt.

□

5 Literaturverzeichnis

5.1 Literatur

- [1] Danzer, Ludwig; Grünbaum, Branko; Klee, Victor: Helly's Theorem and its relatives, in: Proceedings of symposia in pure mathematics 7, Convexity, American Mathematical Society, 1963.

- [2] Eggleston, Harold Gordon: Convexity, Cambridge University Press 1958.

- [3] Gruber, Peter: Convex and Discrete Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

- [4] Grünbaum, Branko: Convex Polytopes, Springer-Verlag New York 2003.

- [5] Helly, Eduard: Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 32, S. 175 - 176.

- [6] Hildebrandt, Stefan: Analysis I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002.

- [7] Hildebrandt, Stefan: Analysis II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

- [8] Leichtweiß, Kurt: Konvexe Mengen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1980.

- [9] Marti, Jürg: Konvexe Analysis, Birkhäuser Verlag Basel 1977.

- [10] Radon, Johann: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, in: Mathematische Annalen 83, S. 113 - 115.

5.2 Internet

- [11] Brokate, Martin: Konvexe Analysis, Skript, TU München, SoSe 2009.

URL: http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/con_ss09.pdf, zuletzt aufgerufen am: 08.07.2019, 14.40 Uhr.

- [12] Dür, Mirjam; Martin, Alexander: Optimierung I. Einführung in die Optimierung, Skript, TU Darmstadt, WiSe 05/06.

URL: http://www.opt.tu-darmstadt.de/lehrver/WS_2005_2006/EinfOpt/S/einfopt.pdf, zuletzt aufgerufen am: 08.07.2019, 14.41 Uhr.

- [13] Izmistiev, Ivan: Einführung in die Konvexgeometrie, Skript, FU Berlin, WiSe 03/04.

URL: <https://homeweb.unifr.ch/Izmestie/pub/Teaching/ConvGeom.pdf>, zuletzt aufgerufen am: 08.07.2019, 14.41 Uhr.

- [14] Robinson, Adam: Helly's Theorem and its Equivalences via Convex Analysis, University Honor Theses, Portland State University, 2014.

URL: <https://pdxscholar.library.pdx.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1062&context=honorstheses>, zuletzt aufgerufen am: 08.07.2019, 14.42 Uhr.

- [15] § 12. Trennungssätze für konvexe Mengen

URL: https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/part_dgl/teaching/WS2014_Grundlagen_der_Optimierung/Skript_Vorlesung_18_20141216.pdf, zuletzt aufgerufen am: 08.07.2019, 14.43 Uhr.