Aufgabe 1: Boolesche Algebra

1.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= A\overline{B} \vee \overline{A}B \\ &= \overline{B}A \vee B\overline{A} \\ &= B\overline{A} \vee \overline{B}A \\ &= B \oplus A \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= A \oplus (B\overline{C} \vee \overline{B}C) \\ &= A\overline{(B\overline{C} \vee \overline{B}C)} \vee \overline{A}(B\overline{C} \vee \overline{B}C) \\ &= A((\overline{B} \vee C)(B \vee \overline{C})) \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B}C \\ &= C(AB \vee \overline{A}\overline{B}) \vee \overline{C}(A\overline{B} \vee \overline{A}B) \\ &= C\overline{(A \oplus B)} \vee \overline{C}(A \oplus B) \\ &= (A \oplus B) \oplus C \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \oplus (A \wedge C) &= AB\overline{(A \vee C)} \vee \overline{(A \vee B)}AC \\ &= AB(\overline{A} \vee \overline{C}) \vee (\overline{A} \vee \overline{B})AC \\ &= AB\overline{C} \vee A\overline{B}C \\ &= A \vee (B\overline{C} \vee \overline{B}C) \\ &= A \vee (B \oplus C) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} A \oplus (B \wedge C) = 1 &\Leftrightarrow A \neq BC \\ (A \oplus B) \wedge (A \oplus C) = 1 &\Leftrightarrow A \neq B \wedge A \neq C \\ &\Leftrightarrow A \neq BC \wedge B = C \\ &\Rightarrow A \oplus (B \wedge C) \neq (A \oplus B) \wedge (A \oplus C) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus AB &= (A\overline{B} \vee \overline{A}B) \oplus AB \\
&= (A\overline{B} \vee \overline{A}B)\overline{AB} \vee \overline{(A\overline{B} \vee \overline{A}B)}AB \\
&= (A\overline{B} \vee \overline{A}B)(\overline{A} \vee \overline{B}) \vee (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B})AB \\
&= A\overline{B} \vee \overline{A}B \vee AB \\
&= A(\overline{B} \vee B) \vee \overline{A}B \\
&= A \vee \overline{A}B \\
&= A \vee B
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Normalformen

1.

$$\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_2x_1\overline{x_0} \vee x_2x_1x_0$$

2.

$$(x_2 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_0})(\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0})(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_0})$$

3.

$$\begin{aligned}
(x_0x_1 \oplus x_0x_2) \oplus x_1x_2 &= x_0\left[(1x_1 \oplus 1x_2) \oplus x_1x_2\right] \vee \overline{x_0}\left[(0x_1 \oplus 0x_2) \oplus x_1x_2\right] \\
&= x_0\left[(x_1 \oplus x_2) \oplus x_1x_2\right] \vee \overline{x_0}x_1x_2 \\
&= x_0\left[x_1((1 \oplus x_2) \oplus 1x_2) \vee \overline{x_1}((0 \oplus x_2) \oplus 0x_2)\right] \vee \overline{x_0}x_1x_2 \\
&= x_0\left[x_1 1 \vee \overline{x_1}x_2\right] \vee \overline{x_0}x_1x_2 \\
&= x_0x_1 \vee x_0\overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_0}x_1x_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Optimierung

1. Die Funktion f besitzt die folgenden Minterme:

$$\begin{aligned} M_1 &= \overline{x_3 x_2} x_1 \overline{x_0} \\ M_2 &= \overline{x_3 x_2} x_1 x_0 \\ M_3 &= \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} x_0 \\ M_4 &= \overline{x_3} x_2 x_1 x_0 \\ M_5 &= x_3 \overline{x_2} x_1 x_0 \\ M_6 &= x_3 x_2 \overline{x_1} x_0 \end{aligned}$$

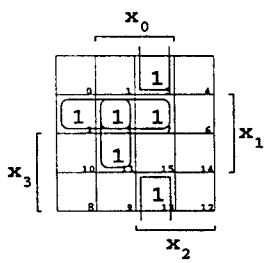
2. Die Funktion f besitzt die folgenden Primterme:

$$\begin{aligned} P_1 &= \overline{x_3 x_2} x_1 \\ P_2 &= \overline{x_3} x_1 x_0 \\ P_3 &= \overline{x_2} x_1 x_0 \\ P_4 &= \overline{x_3} x_2 x_0 \\ P_5 &= x_2 \overline{x_1} x_0 \end{aligned}$$

3. Die Bestimmung der Primimplikanten erfolgt Mit Hilfe folgender Tabelle:

	$\overline{x_3 x_2} x_1 \overline{x_0}$	$\overline{x_3 x_2} x_1 x_0$	$\overline{x_3} x_2 \overline{x_1} x_0$	$\overline{x_3} x_2 x_1 x_0$	$x_3 \overline{x_2} x_1 x_0$	$x_3 x_2 \overline{x_1} x_0$	
$\overline{x_3 x_2} x_1$	×	×					√
$\overline{x_3} x_1 x_0$		×		×			
$\overline{x_2} x_1 x_0$		×			×		√
$\overline{x_3} x_2 x_0$			×	×			
$x_2 \overline{x_1} x_0$			×			×	√

4. Eine kürzeste DNF ist dem folgendem Karnaugh-Diagramm zu entnehmen:



Aufgabe 4: Schaltkreise

1. Der Schaltplan des 8-Bit Addierers mit 'erschöpfender' Addition ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

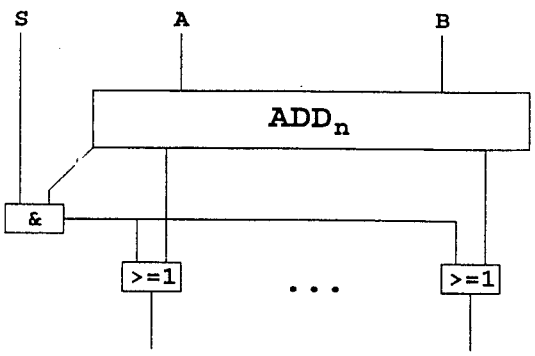


Abbildung 1: Aufgabe 4A

2. Der Schaltplan des modifizierten 32-Bit Addierers mit Serienübertrag ist in der folgenden Abbildung dargestellt, wobei sich der Übertrag des gesamten Addierers nach

$$c = c_3\overline{s_1}\overline{s_0} \vee c_1\overline{s_1}s_0 \vee c_0 s_1 s_0 \vee c_1 s_1 s_0$$

berechnet.

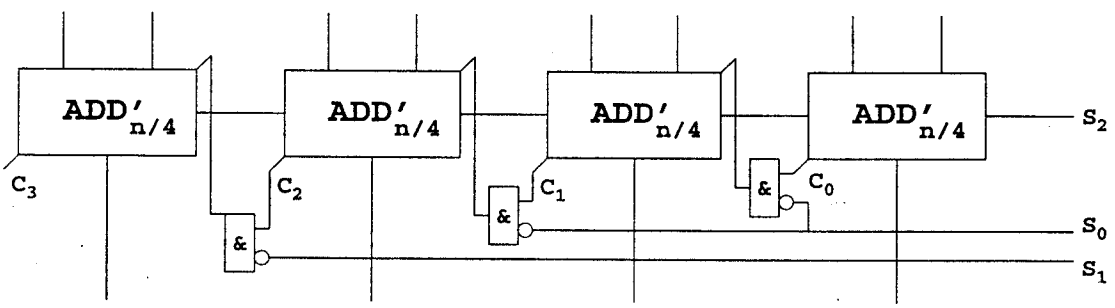


Abbildung 2: Aufgabe 4B

Aufgabe 5: Schaltwerke

1. Es werden $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ Bits benötigt. Ein n-Bit langes Bitmuster kann zwischen 0 und n führende Nullen enthalten, daher müssen insgesamt n+1 Zahlen kodiert werden.

2. Der Schaltplan des Schaltwerks ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

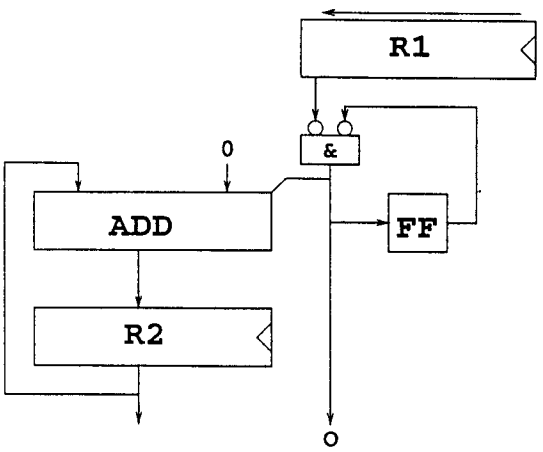


Abbildung 3: Aufgabe 5B

3. Ein Vorteil dieser Lösung ist die schnelle Berechnung, dem gegenüber steht allerdings dioe aufwendige Implementierung, vor allem bei grossen Wortlängen Die Wertetabelle sieht wie folgt aus:

$x_3x_2x_1x_0$	ldc(x)		$x_3x_2x_1x_0$	ldc(x)	
0000	4	100	1000	0	000
0001	3	011	1001	0	000
0010	2	010	1010	0	000
0011	2	010	1011	0	000
0100	1	001	1100	0	000
0101	1	001	1101	0	000
0110	1	001	1110	0	000
0111	1	001	1111	0	000

Aufgabe 6: Zustandsautomaten

1. Die Wertetabelle für die Steuersignale der FlipFlops sieht wie folgt aus:

z	$z_2z_1z_0$	x	$z_2'z_1'z_0'$	y	j_2	k_2	j_1	k_1	j_0	k_0
0	000	0	011	1	0	d	1	d	1	d
0	000	1	001	0	0	d	0	d	0	d
1	001	0	011	1	0	d	1	d	0	0
1	001	1	001	0	0	d	0	d	0	0
2	010	0	000	1	0	d	d	1	0	d
2	010	1	011	1	0	d	d	0	0	d
3	011	0	110	1	1	d	d	0	0	1
3	011	1	010	0	0	d	d	0	0	1
4	100	0	ddd	d	d	d	d	d	d	d
4	100	1	ddd	d	d	d	d	d	d	d
5	101	0	ddd	d	d	d	d	d	d	d
5	101	1	ddd	d	d	d	d	d	d	d
6	110	0	111	1	d	0	d	0	1	d
6	110	1	111	1	d	0	d	0	1	d
7	111	0	011	0	d	1	d	0	d	0
7	111	1	000	0	d	1	d	1	d	1

2. Ausgehend von obiger Tabelle erhält man die kürzesten DNFs der einzelnen Steuersignale wie folgt:

$$
\begin{aligned}
y &= \overline{z_2}\overline{x} \vee z_1\overline{z_0} \\
j_2 &= z_1 z_o \overline{x} \\
k_2 &= z_0 \\
j_1 &= \overline{x} \\
k_1 &= \overline{z_2 z_0 x} \vee z_2 z_0 x \\
j_0 &= x \vee z_2 \vee \overline{z_1} \\
k_0 &= \overline{z_2} z_1 \vee x z_1
\end{aligned}
$$