Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Geben Sie graphisch ein Flussdiagramm einer 1-stelligen Registermaschine M an. die den Rest modulo 2 berechnet, also

$$f_M(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn x gerade} \\ 1. & \text{wenn x ungerade} \end{cases}$$

(5 Punkte)

Im Hinblick auf b) sollte M möglichst einfach gehalten werden.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit, Ihrer Maschine. Stellen Sic dazu eine geeignete Induktionsbehauptung auf, beweisen Sie diese. und folgern Sie daraus die Korrektheit.

(10 Punkte)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

a) Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ eine Numerierung von $\mathbb{N}^2$ mit folgenden Eigenschaften: τ ist bijektiv, und τ^{-1},τ_1, τ_2 sind berechenbar. Dabei bezeichnen $\tau_1(n)$, $\tau_2(n)$ die erste und zweite Komponente des Paares mit der τ-Nummer n, also $\tau(n) = (\tau_1(n), \tau_2(n))$. Wie üblich, bezeichnet π die Cantorsche Paarungsfunktion.

Zeigen Sie: $\tau \equiv \pi^{-1}$.

(10 Punkte)

b) Die Vertauschung $V : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ mit $V(x, y) = (y, x)$ ist sicher im anschaulichen Sinne berechenbar.

Ist V auch (π^{-1}, π^{-1})-berechenbar?

(5 Punkte)

Aufgabe 3: (10 Punkte)

a) Beweisen Sie:

Es existiert eine Maschine, die bei Eingabe eines beliebigen Programms einer 1-stelligen Registermaschine M ein Programm einer 1-stelligen Registermaschine M' produziert,, die ihrerseits bei Eingabe x die Anzahl der Schritte zählt, die M zur Berechnung von $f_M(x)$ brauchen wiirde (bzw. nicht hält, falls M nicht hält,).

Geben Sie explizit an, auf welche bekannten Sätze Sie sich stützen.

(5 Punkte)

b) Ist die folgende Funktion f berechenbar? (Begründung)

f(i) := das kleinste k mit $\varphi_k = \varphi_i$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: (15 Punkte)

Kann man aus dem Zeithierarchiesatz folgern, dass

a) $ZEIT(n) \subsetneq ZEIT(n \log n)$ gilt'!

(3 Punkte)

b) $ZEIT(n \log n) \subsetneq ZEIT(n(\log n)^2)$ gilt'!

(3 Punkte)

c) mindestens eine dieser beiden Inklusionen echt ist?

(9 Punkte)

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Gegeben sei eine rechteckige Grundfläche und eine Menge von Mosaiksteinen, die einfarbig sind, aber beliebige Formen haben dürfen.

Gefragt ist nach einer exakten Ausfüllung des Rechtecks mit einer Teilmenge der gegebenen Mosaiksteine.

Liefern Sie informell eine Idee zum Beweis der folgenden Aussage:

Wenn dieses hlosaikproblem in polynomialer Zeit lösbar ist (gemessen in der Anzahl der Steine), so gilt P = ***NP.***

Eine saubere Formalisierung des Problems und detaillierte Ausführung des Beweises wird nicht verlangt.

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Eine Sprache R heißt abgeschlossen unter Konkatenation, wenn für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt: $u, v \in \boldsymbol{R} \Rightarrow uv \in \boldsymbol{R}$.

a) Sei α ein regulärer Ausdruck und $R = L(\alpha^*)$. Ist R stets abgeschlossen unter Konkatenation'?

(5 Punkte)

b) Sei $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \boldsymbol{6})$ ein endlicher Automat mit $F = \{q_0\}$. und $R = \boldsymbol{L(A)}$

Ist R stets abgeschlossen unter Konkatenation?

(5 Punkte)

c) Ist jede reguläre Sprache abgeschlossen unter Konkatenat ion'!

(5 Punkte)

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Existiert eine unendliche kontextfreie Sprache $\boldsymbol{L}$. in der die Längen sämt licher Worte Quadratzahlen sind'?

$$(\forall w \in L. \quad \exists n \in \mathbb{N}. \quad lg(w) = n^2.)$$

Geben Sie ein Beispiel einer solchen Sprache an, oder führen Sie einen Unmöglichkeitsbeweis.