Grundlagen der Theoretischen Informatik
Klausur am 18.2.06
Lösungsvorschläge
Wintersemester 2005/06

Aufgabe 1

Seien P und Q zwei Konfigurationen einer Registermaschine. Dann definieren wir:
$(P \vdash^* Q) :\Longleftrightarrow (\exists t \in \mathbb{N}.\mathrm{ES}^t(P) = Q)$ und $(P \vdash Q) :\Longleftrightarrow (\mathrm{ES}(P) = Q \vee P = Q)$.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \sum_{i=0}^{n} i$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt: $\forall x, y \in \mathbb{N}.(1, (x, y, 0, \ldots)) \vdash^* (1, (x + \sum_{i=0}^{y} i, 0, \ldots))$. Beweis mit Induktion nach y. Für $y = 0$ ist nicht zu zeigen. $y \to y + 1$. Sei $x \in \mathbb{N}$, dann gilt $(1, (x, y + 1, 0, \ldots)) \vdash (2, (x, y + 1, 0, \ldots)) \vdash (3, (x + y + 1, y + 1, 0, \ldots)) \vdash (1, (x + y + 1, y, 0, \ldots))$. Mit Induktionsvorraussetzung folgt $(1, (x + y + 1, y, 0, \ldots)) \vdash^* (1, (x + y + 1 + \sum_{i=0}^{y} i, 0, \ldots)) = (1, (x + \sum_{i=0}^{y+1} i, 0, \ldots))$.

Sei $x \in \mathbb{N}$. Es ist $f_M(x) = AC \circ f_F \circ EC(x) = AC \circ f_F(0, x, \ldots)$. Mit dem oben gezeigten folgt $(1, (0, x, \ldots)) \vdash^* (4, (\sum_{i=0}^{x} i, 0, \ldots))$ und somit $f_M(x) = AC(\sum_{i=0}^{x} i, 0, \ldots) = \sum_{i=0}^{x} i = f(x)$.

Aufgabe 2

Zu zeigen ist, dass es ein berechenbares $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\nu_{\mathbb{Q}}(g(i, j) = f(\nu_{\mathbb{Z}}(i), \nu_{\mathbb{Q}}(j)).$$

Wir setzen $i =< u, v >, j =< x, y, z >$ und rechnen:

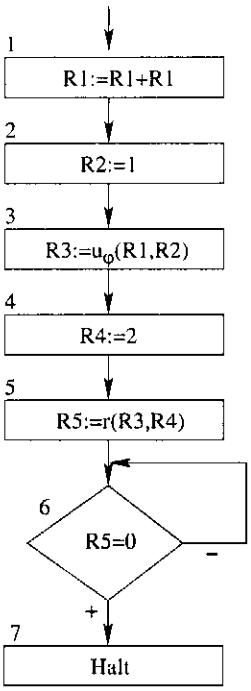
$f(\nu_{\mathbb{Z}} < u, v >, \nu_{\mathbb{Q}} < x, y, z >) = ((u - v) \cdot \frac{x-y}{z+1}) : 3$
$= \frac{(u-v)\cdot(x-y)}{3(z+1)} = \frac{(u\cdot x+v\cdot y)-(u\cdot y+v\cdot x)}{(3z+2)+1}$
$= \nu_{\mathbb{Q}}\ g(< u, v >, < x, y, z >)$, falls wir g wie folgt wählen:

$$g(< u, v >, < x, y, z >) :=< ux + vy, uy + vx, 3z + 2 > .$$

g ist berechenbar, da es durch Komposition aus berechenbaren Funktionen (Cantorsche Tupelfunktion, der Umkehrungen, + und $\cdot$) definiert wird.

Aufgabe 3

(a) Wir betrachten die folgende verallgemeinerte Registermaschine R.



Die in der Marke 5 vorkommende Funktion r ist die Restfunktion aus Satz 2.7.4.5 (siehe Anhang). In R kommen nur berechenbare Tests und Funktionen vor. Somit ist f_R nach Satz 2.7.3 berechenbar. Es gilt $\mathrm{Def}(f_R) = M$. Somit ist M nach Definition 6.2.1. rekursiv-aufzählbar.

(b) Angenommen M wäre rekursiv, dann ist die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(i) = 2$, falls $i \notin M$ und $f(i) = 1$ sonst, berechenbar ($f(i) = 2cf_M(i) + (1 \dot{-} cf_M(i))$). Somit gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_j = f$. Aus $j \in M$ folgt $1 = f(j) = \varphi_j(j)$ ist gerade. Aus $j \notin M$ folgt $2 = f(j) = \varphi_j(j)$ ist ungerade oder undefiniert. Widerspruch. M kann nicht rekursiv sein.

(c) Wäre $\mathbb{N} \backslash M$ rekursiv aufzählbar, dann folgt mit (a) und Satz 6.2.4, dass M rekursiv ist. Dies ist ein Widerspruch zu (b).

Aufgabe 4
(21 Punkte, je 1 pro Teilaufgabe)

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.
Um eine Frage zu beantworten kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

(i) Welche der folgenden Sprachen ist/sind rekursiv/rekursiv-aufzählbar aber nicht rekursiv/nicht rekursiv-aufzählbar?

rekursiv	rek. aufz. und nicht rek.	nicht rek. aufz.	
[X]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) \in \mathbb{N} \wedge \varphi_0(i) \in \mathbb{N} \wedge 3i < 12\}$
[ ]	[X]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) = 2\}$
[ ]	[ ]	[X]	$\{i \in \mathbb{N} \mid i \notin \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	[X]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \{i\} = \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	[X]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \{i\} = \mathrm{Bild}(\varphi_i)\}$
[X]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi_i(i) < 42 \wedge i \in \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$
[ ]	[X]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt.

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Jede reguläre Menge ist endlich.
[X]	[ ]	$\{a^2b^3c^5d^7x \mid x \in \{e,f\}^*\}$ ist regulär.
[X]	[ ]	$\{a^m b^k c^{2m} \mid m,k \in \mathbb{N}\}$ ist deterministisch kontextfrei.
[ ]	[X]	$\{u\#u \mid u \in \{a,b\}^*\}$ ist kontextfrei.
[X]	[ ]	Jede endliche Menge ist eindeutig.
[X]	[ ]	$L(G)$ für $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aSa \mid \varepsilon\}, S)$ ist regulär.
[ ]	[X]	Es existieren reguläre Ausdrücke α, so dass es keinen determinierten Kellerautomaten M mit $L(M) = L(\alpha)$ gibt.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt.

korrekt	falsch	
[X]	[ ]	Sei M eine TM über dem Ein/Ausgabealphabet Σ. Dann ist $L_M = \{x \in \Sigma^* \mid f_M(x) = \varepsilon\}$.
[ ]	[X]	Es gilt $\mathrm{FZEIT}(n) \subsetneq \mathrm{BAND}(n^2)$.
[X]	[ ]	Es gilt $\mathrm{ZEIT}(n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n \cdot \log n)$.
[X]	[ ]	Wenn 3SAT $\notin P$, dann gilt $P \subseteq NP$ und $P \neq NP$.
[X]	[ ]	Es gilt $\emptyset \in NP$.
[ ]	[X]	Für alle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \in o(n)$ gilt: f ist nicht zeitkonstruierbar.
[ ]	[X]	Für alle $A, B \subseteq \Sigma^*$ gilt: Aus $A \cap B \in P$ folgt $A \in P$ und $B \in P$.

Aufgabe 5

(i) (a) Definition 3.2.2.
(b) Definition 6.1.1.
(c) Definition 7.5.1.
(d) Definition 9.4.1.
(e) Definition 9.4.4.
(f) Definition 10.3.1.

(ii) (a) Satz 5.4.1.
(b) Satz 8.5.1.
(c) Satz 9.2.8.
(d) Satz 11.4.3.

Aufgabe 6

Wir nehmen an, L wäre kontextfrei. Sei p die Konstante aus dem Pumping-Lemma. Wir wählen $z = a^p b^p cca^p b^p a^p b^p cc \in L$. Dann muss es eine Zerlegung $z = uvwxy$ geben mit $lg(vwx) \leq p$ und $vx \neq \varepsilon$, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^i wx^i y \in L$.
Wir führen die Annahme zum Widerspruch, indem wir für jede mögliche Zerlegung $z = uvwxy$ zeigen, dass $uv^0 wx^0 y \notin L$.

<u>1. Fall</u> vx enthält mindestens ein c. Dann kommen in $uv^0 wx^0 y$ weniger als 4 Zeichen aus $\{c, d\}$ vor, also $uv^0 wx^0 y \notin L$.

<u>2. Fall</u> vx enthält k $a's$ und l $b's, k + l > 0$. Da $\lg(vwx) \leq p$ kommen nur die folgenden Fälle in Betracht:

a) $u \in \{a\}^*$. Da $\lg(vwx) \leq p$ folgt
$uv^0 wx^0 y = a^{p-k} b^{p-l} cca^p b^p a^p b^p cc \notin L$.

b) $u \in \{a^p\}\{b\}^*$. Dann ist
$uv^0 wx^0 y = a^p b^{p-l} cca^{p-k} b^p a^p b^p cc \notin L$

c) $u \in \{a^p b^p cc\}\{a\}^*$ $(wie\ a))$

d) $u \in \{a^p b^p cca^p\}\{b\}^*$ $(wie\ b))$

e) $u \in \{a^p b^p cca^p b^p\}\{a\}^*$ $(wie\ a))$

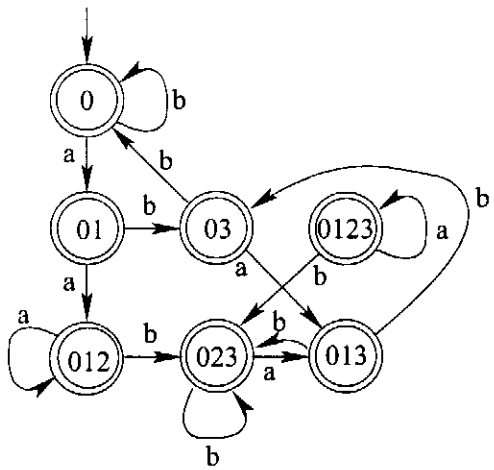
f) $u \in \{a^p b^p cca^p b^p a^p\}\{b\}^*$ $(wie\ b))$.

Aufgabe 7

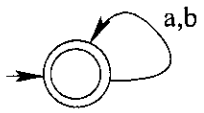
(a)

	a	b
$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,3\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$
$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0\}$
$\{0,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,3\}$
$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$

Startzustand: $\{0\}$
Endzustandsmenge: $\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,3\},\{0,2,3\},\{0,1,3\},\{0,1,2,3\}\}$

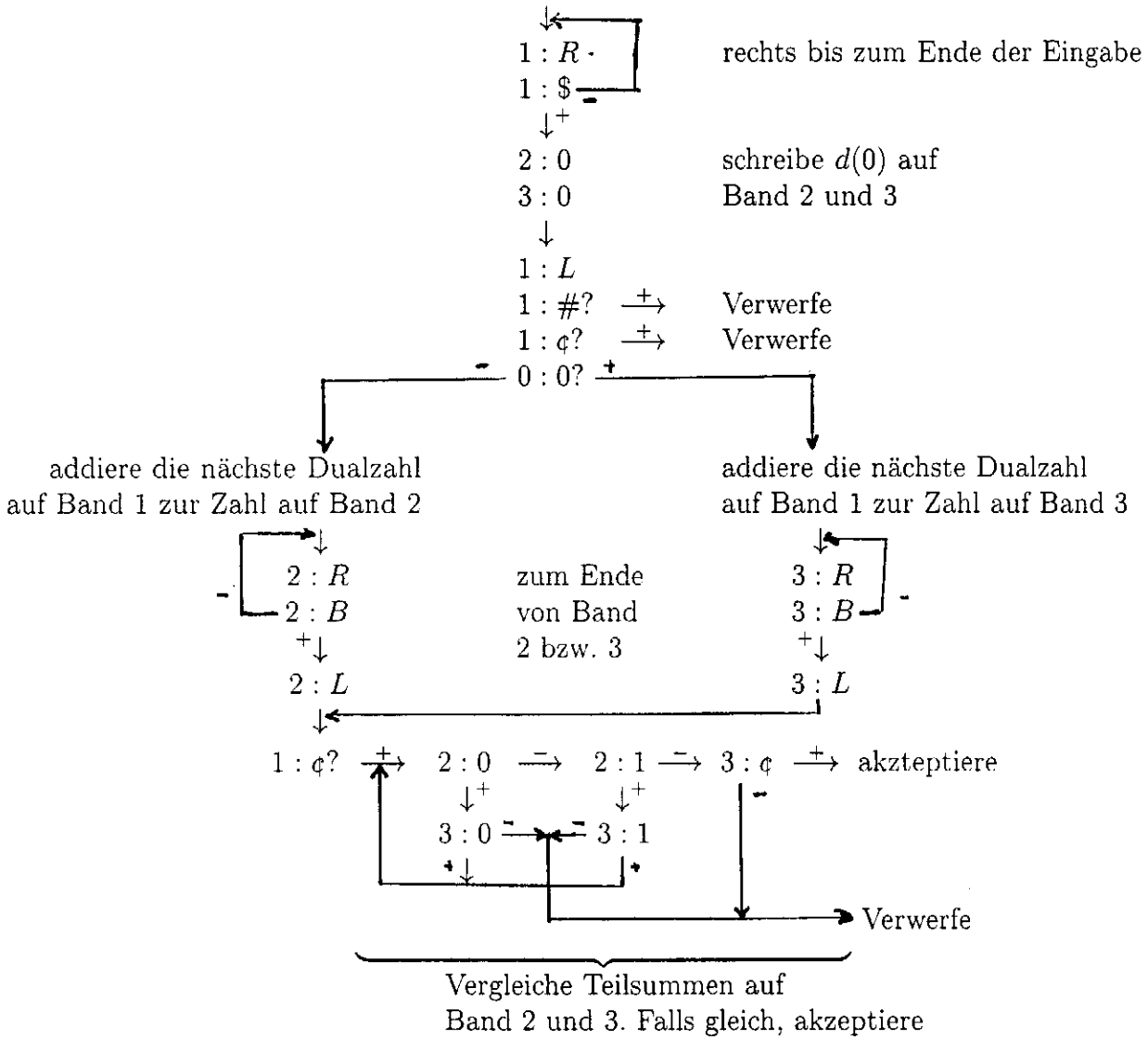


(b) Es ist $L(A) = \{a,b\}^*$. Somit reicht ein Automat mit einem Zustand aus.



Aufgabe 8

a)



b) Sei $f(x) = \begin{cases} d(k_1)\#\ldots\#d(k_n)\#d(\sum_{i=1}^{n} k_j - N + 1)\#d(N+1) \\ \quad \text{falls } x = d(N)\#d(k_1)\#\ldots\#d(k_n) \\ \varepsilon \text{ falls } x \text{ nicht diese Form hat} \end{cases}$

$f \in$ FP ist leicht zu sehen.

Wir müssen zeigen:
$\forall x \in \{0,1,\#\}^*.\ x \in$ RUCKSACK $\Leftrightarrow f(x) \in$ PARTITION

„ $\Rightarrow$ “ Sei $x = d(N)\#d(k_1)\#\ldots\#d(k_n) \in$ RUCKSACK. Dann gibt es $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$, so dass $N = \sum_{i\in A} k_i$. Mit $M := 1 + \sum_{i=1}^{n} k_i$ ist $f(x) = d(k_1)\#\ldots\#d(k_n)\#d(M-N)\#d(N+1)$ und $\sum_{i\in A} k_i + M - N = \sum_{i\notin A} k_i + N + 1$, also $f(x) \in$ PARTITION.

„ $\Leftarrow$ “ Sei $f(x) \in$ PARTITION, $f(x) = d(k_1)\#\ldots\#d(k_n)\#d(\sum_{i=1}^{n} k_i + 1 - N)\#d(N+1)$ mit $x = d(N)\#d(k_1)\#\ldots\#d(k_n)$.

Da die Summe der beiden letzten Dualzahlen größer ist als die Summe der übrigen ($\sum_{i=1}^{n} k_i + 1 - N + N + 1 > \sum_{i=1}^{n} k_i$) müssen diese in verschiedenen Teilsummen liegen.
Also gibt es ein $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} k_i + 1 - N + \sum_{i \in A} k_i = N + 1 + (\sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i \in A} k_i)$
also $\sum_{i \in A} k_i - N = N - \sum_{i \in A} k_i$
woraus $N = \sum_{i \in A} k_i$ folgt.
Damit ist $x \in$ RUCKSACK.

c) Wir müssen zeigen

(1) PARTITION $\in$ NP

(2) $\forall M \in$ NP. $M \leq_{pol}$ PARTITION

(1) wurde in a) gezeigt.

(2) Sei $M \in NP$. Da RUCKSACK NP-vollständig, gilt $M \leq_{pol}$ RUCKSACK
Mit b) gilt also $M \leq_{pol}$ RUCKSACK $\leq_{pol}$ PARTITION.
Aus der Transitivität von $\leq_{pol}$ folgt damit $M \leq_{pol}$ PARTITION.

Aufgabe 9

Angenommen es existiert ein L mit der Eigenschaft, dann folgt daraus, dass P $\subsetneq$ ZEIT(n^2). Aus dem Zeithierachiesatz folgt ZEIT(n^2) $\subsetneq$ ZEIT(n^3). Da ZEIT(n^3) $\subseteq$ P gilt, folgt P $\subsetneq$ P. Widerspruch.