FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität 58084 Hagen ---

(Name)

(Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

(Land)

FERNUNIVERSITÄT
EINGANG

INF

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs 01655 – Grundlagen der Theoretischen Informatik
Klausur am 18. Februar 2006

- ☐ Bochum
- ☐ Bonn
- ☐ Berlin
- ☐ Bregenz
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ sonstige

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
bearbeitet										
maximale Punktzahl	12	7	10	21	14	8	10	12	6	
erreichte Punktzahl										

Datum: _____ Korrektor: _____

© 2006 FernUniversität in Hagen

Vorbemerkungen zur Klausur zum Kurs 01655 „Grundlagen der Theoretischen Informatik“

Es müssen Ihnen 9 Blätter Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 9 Aufgaben,
- ein 2-seitiger Anhang.

Füllen Sie bitte vor der Bearbeitung das Deckblatt aus (Martikel-Nr., Name, Adresse) und legen Sie es mit den Ausweisen zur Kontrolle bereit.

Für die Bearbeitung haben Sie 3 Stunden Zeit. Außer Schreibzeug sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Schreiben Sie bitte leserlich und lassen Sie einen breiten Korrekturrand. Beginnen Sie möglichst für jede Aufgabe eine neue Seite.

Folgende Unterlagen sind zusammengeheftet abzugeben:

- das ausgefüllte Deckblatt (bitte bearbeitete Aufgaben ankreuzen),
- die ausgefüllte Finanzamt-Bescheinigung (sofern gewünscht),
- Ihre Lösungsblätter, möglichst in der Reihenfolge der Aufgaben. Schreiben Sie zur Sicherheit auf jedes Blatt nochmals Name und Matrikel-Nr. Vergessen Sie bitte nicht den Fragebogen aus Aufgabe 4 abzugeben.

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 40 von 100 Punkten erreichen. Wir bemühen uns, die Klausur zügig zu korrigieren und zurückzusenden. Sollten Sie nach drei Wochen noch keine Nachricht haben, können Sie Ihr Ergebnis im Lehrgebiet erfragen.

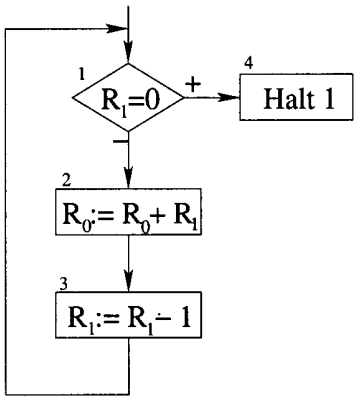
Viel Erfolg!

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(12 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch das folgende Flussdiagramm F.



a) Geben Sie an welche Funktion von M berechnet wird. *(2 Punkte)*

b) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus (a). *(10 Punkte)*

Aufgabe 2 *(7 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die durch

$$f(p, q) := \frac{p \cdot q}{3}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}$ definiert ist, eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei $M := \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_{2i}(1) \text{ ist eine gerade Zahl}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine rekursiv-aufzählbare Menge ist. *(4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass M keine rekursive Menge ist. *(4 Punkte)*

(c) Beweisen Sie, mit Hilfe von Teil (a) und (b), dass $\mathbb{N} \backslash M$ nicht rekursiv aufzählbar ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4 *(21 Punkte, je 1 pro Teilaufgabe)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

(i) Welche der folgenden Sprachen ist/sind rekursiv/rekursiv-aufzählbar aber nicht rekursiv/nicht rekursiv-aufzählbar?

rekursiv	rek. aufz. und nicht rek.	nicht rek. aufz.	
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) \in \mathbb{N} \wedge \varphi_0(i) \in \mathbb{N} \wedge 3i < 12\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) = 2\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid i \notin \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \{i\} = \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \{i\} = \mathrm{Bild}(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi_i(i) < 42 \wedge i \in \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathrm{Def}(\varphi_i)\}$

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt.

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Jede reguläre Menge ist endlich.
[ ]	[ ]	$\{a^2b^3c^5d^7x \mid x \in \{e,f\}^*\}$ ist regulär.
[ ]	[ ]	$\{a^mb^kc^{2m} \mid m,k \in \mathbb{N}\}$ ist deterministisch kontextfrei.
[ ]	[ ]	$\{u\#u \mid u \in \{a,b\}^*\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[ ]	Jede endliche Menge ist eindeutig.
[ ]	[ ]	$L(G)$ für $G = (\{S\},\{a\},\{S \to aSa \mid \varepsilon\},S)$ ist regulär.
[ ]	[ ]	Es existieren reguläre Ausdrücke α, so dass es keinen determinierten Kellerautomaten M mit $L(M) = L(\alpha)$ gibt.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt.

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Sei M eine TM über dem Ein/Ausgabealphabet Σ. Dann ist $L_M = \{x \in \Sigma^* \mid f_M(x) = \varepsilon\}$.
[ ]	[ ]	Es gilt $\mathrm{FZEIT}(n) \subsetneq \mathrm{BAND}(n^2)$.
[ ]	[ ]	Es gilt $\mathrm{ZEIT}(n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n \cdot \log n)$.
[ ]	[ ]	Wenn $3\mathrm{SAT} \notin P$, dann gilt $P \subseteq NP$ und $P \neq NP$.
[ ]	[ ]	Es gilt $\emptyset \in NP$.
[ ]	[ ]	Für alle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \in o(n)$ gilt: f ist nicht zeitkonstruierbar.
[ ]	[ ]	Für alle $A, B \subseteq \Sigma^*$ gilt: Aus $A \cap B \in P$ folgt $A \in P$ und $B \in P$.

Aufgabe 5 *(14 Punkte)*

(i) Geben Sie Definitionen an für *(je 1 Punkt)*

(a) $f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist berechenbar

(b) $A \subseteq \mathbb{N}^k$ ist entscheidbar (rekursiv)

(c) $\mathrm{ZEIT}_\Sigma(f)$ für eine totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ein Alphabet Σ

(d) NP

(e) M ist NP-hart

(f) Die Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$ ist kontextfrei

(ii) Formulieren Sie die folgenden Sätze: *(je 2 Punkte)*

(a) das smn-Theorem

(b) den Zeithierarchiesatz

(c) den Projektionssatz (für nichtdeterministische Zeitkomplexität)

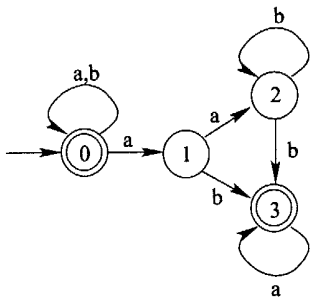
(d) das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Aufgabe 6 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache $L := \{ux^2u^2x^2 \mid x \in \{c,d\}, u \in \{a,b\}^*\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Ein endlicher Automat A über dem Alphabet $\Sigma := \{a,b\}$ sei durch den folgenden Graphen definiert:



10

a) Konstruieren Sie unter der Verwendung des im Kurs angegebenen Verfahrens den vereinfachten Potenzautomaten zu A.
Geben Sie den Potenzautomaten graphisch an und geben Sie auch den zugehörigen Anfangszustand sowie die Endzustandsmenge an. *(8 Punkte)*

b) Geben Sie einen determinierten endlichen Automaten A' mit maximal 2 Zuständen an mit $L(A') = L(A)$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 8 *(12 Punkte)*

Wir betrachten das Partitionierungsproblem

PARTITION:= $\{d(i_1)\#\ldots\#d(i_k) \mid \exists M \subseteq \{1,\ldots,k\}.\ (\sum_{j\in M} i_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} i_j)\}$

sowie das Problem

RUCKSACK:= $\{d(N)\#d(k_1)\#\ldots\#d(k_n) \mid \exists M \subseteq \{1,\ldots,n\}.\ \sum_{i\in M} k_i = N\}$

a) Geben Sie eine kommentierte Kontrollturingmaschine M an mit L_M = PARTITION und $\tilde{t}_M \in O(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

   (Bem: Ein Korrektheitsbeweis bzw. eine Abschätzung der Laufzeit ist nicht nötig.) *(4 Punkte)*

b) Zeigen Sie

   RUCKSACK $\leq_{pol}$ PARTITION

   (Hinweis: $d(N)\#d(k_1)\#\ldots\#d(k_n) \mapsto d(k_1)\#\ldots\#d(k_n)\#d(M-N)\#d(N+1)$ mit M geeignet) *(6 Punkte)*

c) Beweisen Sie mit (a) und (b):

   Ist RUCKSACK NP-vollständig, dann ist auch PARTITION NP-vollständig. *(2 Punkte)*

Aufgabe 9 *(6 Punkte)*

Seien $X, Y \subseteq \Sigma^*$. Es gilt $X \leq_{LIN} Y$ genau dann, wenn es eine Funktion $f \in$ FZEIT(n), $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass

$$\forall x \in \Sigma^*.\ x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Es gibt keine Sprache $L \subseteq \Sigma^* \cap$ ZEIT(n^2) mit der Eigenschaft

$$\forall L' \in P.\ L' \leq_{LIN} L.$$

Anhang

Satz 2.5.5 *Die wie folgt definierten Funktionen sind berechenbar.*

a) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N},\ \tilde{0}(\,) := 0$ *(nullstellige Nullfunktion).*

b) $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ Z(n) := 0$ *(einstellige Nullfunktion).*

c) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ S(n) := n + 1$ *(Nachfolgerfunktion).*

d) $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N},\ \mathrm{pr}_i^{(k)}(n_1, ..., n_k) := n_i$ *für* $1 \leq i \leq k$ *(Projektion).*

Satz 2.7.4 *Die folgenden Funktionen sind berechenbar.*

(1) $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N},\ f(n_1, ..., n_k) := n$ *mit* $n \in \mathbb{N}$, *(konstante Funktion),*

(2) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(n, k) := n + k$ *(Summe),*

(3) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(n, k) := n \dot{-} k$ *(arithmetische Differenz),*

(4) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(n, k) := n \cdot k$ *(Produkt),*

(5) $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *(Quotient und Rest),*
wobei q, r *eindeutig definiert sind durch*
$$\begin{cases} n = q(n,k) \cdot k + r(n,k) \text{ und } r(n,k) < k & \text{für } k \neq 0 \\ q(n,k) = r(n,k) = \mathrm{div} & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

(6) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(n, k) := n^k$ *mit* $0^0 := 1$ *(Exponentiation),*

(7) $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) := \begin{cases} \sqrt{n}\ , & \text{falls } n \text{ Quadratzahl} \\ \mathrm{div}\ , & \text{sonst} \end{cases}$,

(8) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(n, k) := \max(n, k)$ *(Maximum),*

(9) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(n, k) := \min(n, k)$ *(Minimum),*

(10) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) :=$ *die* $(n + 1)$*-te Primzahl (Primzahlfolge), also* $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, *usw.,*

(11) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *(Test), definiert durch*
$$f(n,k) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n < k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
und entsprechend auch für $\leq, >, \geq, =, \neq$ *anstelle von* $<$.

Definition 4.2.2

(1) $\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *sei definiert durch* $\nu_{\mathbb{Z}}\langle n, k\rangle := n - k$

(2) $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *sei definiert durch* $\nu_{\mathbb{Q}}\langle n, k, l\rangle := \frac{n-k}{l+1}$

Satz 12.4.3 *Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen*

Sei L kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass gilt:

$$z = uvwxy,$$
$$vx \neq \varepsilon, \qquad lg(vwx) \leq p,$$
$$\forall i \geq 0. uv^iwx^iy \in L.$$

Ist $L = L(G)$ mit einer Chomsky-Normalform-Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$, so gilt die Aussage für jedes $p \geq 2^{\#\Pi}$.