Kurs 1655 – Grundlagen der Theoretischen Informatik
Lösungshinweise zur Klausur vom 19. Februar 2005

Aufgabe 1

(a) **(i)** Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach k.

Induktionsanfang $k = 0$:

Offensichtlich gilt

$$\mathrm{ES}^{3\cdot 0}(1,(0,n,0,\ldots)) = (1,(\sum_{i=n-0+1}^{n} i, n-0, 0, \ldots)),$$

denn $\sum_{i=n+1}^{n} i = 0$.

Induktionsschritt $k \to k+1$:

Sei $k+1 < n$, dann gilt insbesondere $k < n$ und wir dürfen die Induktionsannahme verwenden:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ES}^{3(k+1)}(1,(0,n,0,\ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}^{3}(1,(\sum_{i=n-k+1}^{n} i, n-k, 0, \ldots)) \qquad \text{[Ind.ann.]} \\
&\quad = \mathrm{ES}^{2}(2,((\sum_{i=n-k+1}^{n} i) + (n-k), n-k, 0, \ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}(3,(\sum_{i=n-k}^{n} i, n-k-1, 0, \ldots)) \\
&\quad = (1,(\sum_{i=n-(k+1)+1}^{n} i, n-(k+1), 0, \ldots)) \quad [\text{da } n-(k+1) \neq 0]
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ES}^{3(n-1)+3}(1,(0,n,0,0,\ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}^{3}(1,(\sum_{i=n-(n-1)+1}^{n} i, n-(n-1), 0, \ldots)) \quad [\text{nach Teil (a)}] \\
&\quad = \mathrm{ES}^{2}(2,((\sum_{i=2}^{n} i) + 1, 1, 0, \ldots)) \\
&\quad = \mathrm{ES}(3,(\sum_{i=1}^{n} i, 0, 0, \ldots)) \\
&\quad = (4,(\sum_{i=1}^{n} i, 0, 0, \ldots)).
\end{aligned}$$

Da die letztgenannte Konfiguration eine Endkonfiguration ist, ergibt sich daraus

$$\mathrm{GS}(1,(0,n,0,0,\ldots)) = (4,(\sum_{i=1}^{n} i, 0, 0, \ldots)).$$

Mit dem Flussdiagramm F aus der Aufgabenstellung erhalten wir also

$$\begin{aligned} f_M(n) &= \mathrm{AC} \circ f_F \circ \mathrm{EC}^{(1)}(n) \\ &= \mathrm{AC} \circ f_F(0, n, 0, 0, \ldots) \\ &= \mathrm{AC}(\sum_{i=1}^{n} i, 0, 0, \ldots) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i. \end{aligned}$$

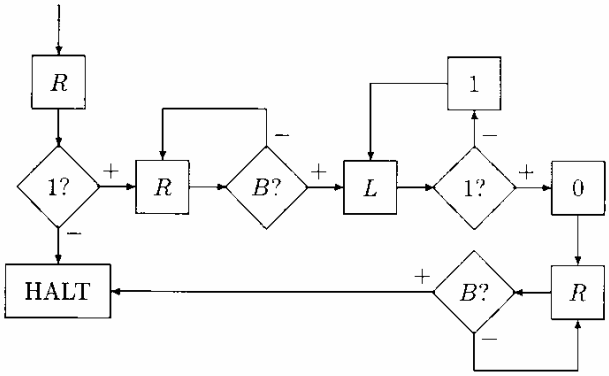
(b) Es gilt

$$f(n) = \pi\left(\pi_1^{(3)}(n) \dot{-} \pi_3^{(3)}(n), \pi_2^{(3)}(n)\right) + 5$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

(a) Die Bandmaschine mit Ein-/Ausgabealphabet $\Sigma := \{0, 1\}$ und dem folgenden Flussdiagramm



berechnet die Vorgängerfunktion auf den positiven Dualzahlen ohne führende Nullen und gibt andernfalls das leere Wort aus. (Im Ergebnis sind führende Nullen möglich.)

(b) Wir definieren $F :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} &F(\langle m, n, k\rangle, \langle m', n', k'\rangle) \\ &\qquad := \langle mk' + m + m'k + m', nk' + n + n'k + n', kk' + k + k'\rangle \end{aligned}$$

für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$.

Dann ist F berechenbar, und es gilt

$$\begin{aligned} f(\nu_{\mathbb{Q}}\langle m,n,k\rangle, \nu_{\mathbb{Q}}\langle m',n',k'\rangle) &= \tfrac{m-n}{k+1} + \tfrac{m'-n'}{k'+1} \\ &= \tfrac{(m-n)(k'+1)+(m'-n')(k+1)}{(k+1)(k'+1)} \\ &= \tfrac{(mk'+m+m'k+m')-(nk'+n+n'k+n')}{kk'+k+k'+1} \\ &= \nu_{\mathbb{Q}}(F(\langle m,n,k\rangle, \langle m',n',k'\rangle)) \,. \end{aligned}$$

Somit ist f eine $(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbare Funktion.

Aufgabe 3

(a) Aus $\varphi : \mathbb{N} \to P^{(1)}$ und $P^{(1)} := \{f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ berechenbar}\}$ folgt:

korrekt	falsch	
[ ]	[**X**]	$\varphi \in P^{(1)}$;
[ ]	[**X**]	für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_i \in \mathbb{N}$;
[ ]	[**X**]	für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_i(j) \in \mathbb{N}$;
[**X**]	[ ]	$\mathrm{Def}(\varphi) = \mathbb{N}$;
[ ]	[**X**]	für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{Def}(\varphi_i) = \mathbb{N}$;
[ ]	[**X**]	für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in \mathrm{Def}(\varphi_i)$.

(b) Wir definieren eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$f(\langle i,n\rangle, j) := \varphi_n\langle i,j\rangle$$

für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$. Die Funktion f wird durch Substitution aus der Funktion u_φ (berechenbar nach dem utm-Theorem) und den Cantorschen Tupel- und Umkehrfunktionen (berechenbar nach Satz 2.9.2) gewonnen:

$$f(\langle i,n\rangle, j) = u_\varphi(n, \langle i,j\rangle).$$

Somit ist f berechenbar. Nach dem smn-Theorem gibt es eine totale berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(\langle i,n\rangle, j) = \varphi_{r\langle i,n\rangle}(j)$$

für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$. Definiere $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch $s(i,n) := r\langle i,n\rangle$. Dann ist s total und berechenbar und es gilt:

$$\varphi_{s(i,n)}(j) = \varphi_n(\langle i,j\rangle)$$

Das war zu zeigen.

(c) Angenommen, f wäre berechenbar. Da φ surjektiv ist, muss es dann ein $i \in \mathbb{N}$ geben, mit $\varphi_i = f$. Für diese Zahl i gilt dann

$$\varphi_i(i) = 1 \implies 0 = f(i) = \varphi_i(i),$$

$$\varphi_i(i) \neq 1 \implies 1 = f(i) = \varphi_i(i)$$

nach Definition von f. Beide Fälle ($\varphi_i(i) = 1$ und $\varphi_i(i) \neq 1$) führen also zu einem Widerspruch. Die Annahme, dass f berechenbar ist, ist also falsch. Damit ist f nicht berechenbar.

(d) Falls A oder B leer ist, gilt $A \cdot B = \emptyset$. Also ist $A \cdot B$ rekursiv aufzählbar. Seien nun A und B nicht leer. Dann gibt es totale berechenbare Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$A = \text{Bild}(f) \quad \text{und} \quad B = \text{Bild}(g).$$

Definiere nun $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$h\langle i, j\rangle := f(i) \cdot g(j).$$

Dann ist h berechenbar und es gilt $\text{Bild}(h) = A \cdot B$. Also ist $A \cdot B$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4

Wir geben jeweils kurze Begründungen an.

(a) Falsch. Eine determinierte k-Band-Turingmaschine hat $k + 2$ Bänder.

(b) Falsch. $\text{Def}\,(t_M) \subseteq \Sigma^*$, aber $\text{Def}\,(\tilde{t}_M) \subseteq \mathbb{N}$.

(c) Richtig. Folgt aus Definition 7.4.1.

(d) Richtig. Es gilt $\log 5 = 3$.

(e) Falsch. $O\left(\log\left(n^2\right)\right) \subseteq O\left(2 \cdot \log n\right) \subseteq O\left(\log n\right)$.

(f) Falsch. $\text{ZEIT}(n)$ enthält *Sprachen*, $\text{FBAND}(n)$ dagegen *Funktionen*.

(g) Richtig. Folgt aus den Definitionen 8.4.1 und 8.1.2.

(h) Richtig. Folgt mit dem Zeithierarchiesatz.

(i) Richtig. Folgt mit dem Bandhierarchiesatz.

(j) Falsch. Jede rekursiv-aufzählbare Sprache wird erkannt.

(k) Falsch. Sei $X \in \text{ZEIT}(n)$. Es gilt $L \leq_{pol} X$ für jedes $L \in \text{ZEIT}\left(n^2\right)$. Aus der Abgeschlossenheit von $\text{ZEIT}(n)$ unter $\leq_{pol}$ würde also $\text{ZEIT}\left(n^2\right) \subseteq \text{ZEIT}(n)$ folgen; Widerspruch!

(l) Richtig. 3SAT $\in$ NP und 2D-DOMINO is NP-vollständig.

Aufgabe 5

(a) Wir setzen voraus, dass $O(f) = O(g)$ gilt. Sei nun $L \in \mathrm{ZEIT}(f)$. Nach Definition 7.5.1 gibt es ein Alphabet Σ und eine Turingmaschine M über Σ, so dass

$$L = L_M \quad \text{und} \quad \tilde{t}_M \in O(f).$$

Aus der Voraussetzung folgt $\tilde{t}_M \in O(g)$. Damit ist $L \in \mathrm{ZEIT}(g)$.

Wir haben auf diese Weise $\mathrm{ZEIT}(f) \subseteq \mathrm{ZEIT}(g)$ gezeigt. Analog ergibt sich $\mathrm{ZEIT}(g) \subseteq \mathrm{ZEIT}(f)$. Damit ist $\mathrm{ZEIT}(f) = \mathrm{ZEIT}(g)$.

(b) Es gelte zunächst P = NP. Da SAT $\in$ NP ist, folgt SAT $\in$ P.

Nun gelte SAT $\in$ P. Da SAT NP-hart ist, ist jedes $L \in$ NP auf SAT polynomiell reduzierbar. Da P abgeschlossen ist unter $\leq_{pol}$, folgt $L \in$ P für alle $L \in$ NP, d. h., NP $\subseteq$ P. Die umgekehrte Inklusion ist klar, da jede Turingmaschine auch eine nichtdeterminierte Turingmaschine ist. Insgesamt ergibt sich also P = NP.

Aufgabe 6

(a) Die Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ mit $\Pi = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}\}$ als Nichtterminalalphabet, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ als Terminalalphabet und der wie folgt bestimmten Regelmenge R

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \to & \mathtt{abT} \\ \mathtt{T} & \to & \mathtt{aT} \mid \mathtt{bT} \mid \varepsilon \end{array}$$

erfüllt die gewünschte Gleichung

$$L(G) = L((\mathtt{ab})(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*).$$

(b) Wir verwenden das im Kurs (nach dem Beweis von Lemma 11.3.8) angegebene Verfahren und notieren dessen Ablauf wie in Beispiel 11.3.9 mit einer Tabelle. Wir gehen dabei von den beiden Teilmengen $V_0 = \emptyset$ und $W_0 = \{\{q_0\}\}$ der Menge 2^Q aller Zustandsmengen aus, ergänzen V in jedem Schritt um eine Zustandsmenge $P \in W \setminus V$ (notiert in der ersten Spalte) und ergänzen W in jedem Schritt um alle Mengen von Zuständen, die in einem Schritt von einem Zustand aus P erreichbar sind, also um alle Zustandsmengen der Form

$$\gamma(P, a) := \{q \in Q \mid \exists p \in P.\, (p, a, q) \in \delta\}$$

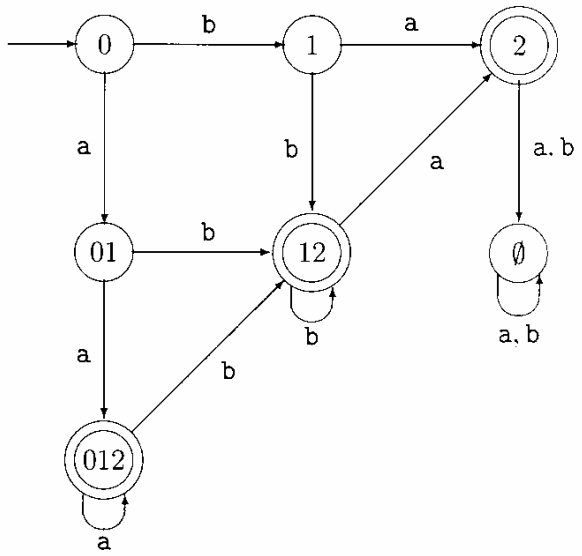
mit $a \in \Sigma$ (notiert in den nächsten beiden Spalten). So erhalten wir die folgende Tabelle.

P	a	b	$W \setminus V$
$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$, $\{1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{0,1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$, $\{0,1,2\}$, $\{2\}$
$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2\}$, $\{2\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Die erste Spalte dieser Tabelle liefert die Zustandsmenge V des vereinfachten Potenzautomaten $\tilde{A}$.

Der Anfangszustand von $\tilde{A}$ ist die Menge $\{q_0\}$, die nur aus dem Anfangszustand von A besteht, und die Menge der Endzustände von $\tilde{A}$ besteht aus allen Mengen in V, in denen ein Endzustand von A vorkommt. In unserem Fall ist also $\{0\}$ der Anfangszustand von $\tilde{A}$ und die Menge der Endzustände von $\tilde{A}$ ist $\{\{2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

Der Übergangsgraph des vereinfachten Potenzautomaten $\tilde{A}$ kann wie folgt dargestellt werden. (Auf Mengenklammern und Kommata wird hier bei nicht-leeren Zustandsmengen verzichtet.)



Aufgabe 7

(a) Die Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ mit $\Pi = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}\}$ als Nichtterminalalphabet, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ als Terminalalphabet und der wie folgt bestimmten Regelmenge R

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \rightarrow & \mathtt{TU} \\ \mathtt{T} & \rightarrow & \mathtt{aTb} \mid \mathtt{ab} \\ \mathtt{U} & \rightarrow & \mathtt{aUb} \mid \varepsilon \end{array}$$

erfüllt die gewünschte Gleichung

$$L(G) = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid m \geqq 1, n \geqq 0\}.$$

(b) Die kontextfreie Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch das Nichtterminalalphabet $\Pi = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}\}$, das Terminalalphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und die wie folgt bestimmte Regelmenge R

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \rightarrow & \mathtt{T} \mid \mathtt{TT} \\ \mathtt{T} & \rightarrow & \mathtt{aTb} \mid \mathtt{ab}\,. \end{array}$$

Weil die durch diese Grammatik erzeugte Sprache nicht das leere Wort enthält (jedes abgeleitete Wort enthält mindestens ein a und ein b), kann das Verfahren aus Satz 12.3.4 unmittelbar auf die Grammatik G angewandt werden.

(1) Ersetzen von Terminalen:

Zunächst ist jedes nicht allein stehende Teminalsymbol durch ein entsprechend neu einzuführendes Nichtterminalsymbol zu ersetzen (Relation $\underset{ET}{\longrightarrow}$).

Zuerst ersetzen wir dabei a durch A in G und erhalten so die neue Grammatik $G_1 = (\Pi_1, \Sigma, R_1, \mathtt{S})$ mit der neuen Nichtterminalmenge $\Pi_1 = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}\} \cup \{\mathtt{A}\}$, unveränderter Terminalmenge Σ, und folgender Regelmenge R_1.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \rightarrow & \mathtt{T} \mid \mathtt{TT} \\ \mathtt{T} & \rightarrow & \mathtt{ATb} \mid \mathtt{Ab} \\ \mathtt{A} & \rightarrow & \mathtt{a} \end{array}$$

Nach Ersetzen von b durch B in G_1 gelangen wir dann zu der Grammatik $G_2 = (\Pi_2, \Sigma, R_2, \mathtt{S})$ mit $\Pi_2 = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{A}\} \cup \{\mathtt{B}\}$ als Nichtterminalmenge und folgender Regelmenge R_2.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \rightarrow & \mathtt{T} \mid \mathtt{TT} \\ \mathtt{T} & \rightarrow & \mathtt{ATB} \mid \mathtt{AB} \\ \mathtt{A} & \rightarrow & \mathtt{a} \\ \mathtt{B} & \rightarrow & \mathtt{b} \end{array}$$

(2) Verkürzung der Regeln:

Hier ersetzen wir $\mathtt{T} \to \mathtt{ATB}$, die einzige Regel, die auf der rechten Seite mehr als zwei Nichtterminalsymbolen enthält (Relation $\underset{VR}{\longrightarrow}$).

Die neue Grammatik ist dann $G_3 = (\Pi_3, \Sigma, R_3, \mathtt{S})$ mit Nichtterminalmenge $\Pi_3 = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\} \cup \{\mathtt{U}\}$ und folgender Regelmenge R_3.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \to & \mathtt{T} \mid \mathtt{TT} \\ \mathtt{T} & \to & \mathtt{AU} \mid \mathtt{AB} \\ \mathtt{U} & \to & \mathtt{TB} \\ \mathtt{A} & \to & \mathtt{a} \\ \mathtt{B} & \to & \mathtt{b} \end{array}$$

(3) Eliminieren längentreuer Regeln:

Schließlich überbrücken wir noch alle auf einer rechten Seite einzeln auftretenden Nichtterminalsymbole (Relation $\underset{LT}{\longrightarrow}$).

In G_3 überbrücken wir $\mathtt{T}$, das einzige auf der rechten Seite einzeln vorkommende Nichtterminalsymbol, und gelangen so zu der Grammatik $G_4 = (\Pi_4, \Sigma, R_4, \mathtt{S})$ mit $\Pi_8 = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}$ als Nichtterminalmenge und folgender Regelmenge R_5.

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{S} & \to & \mathtt{AU} \mid \mathtt{AB} \mid \mathtt{TT} \\ \mathtt{T} & \to & \mathtt{AU} \mid \mathtt{AB} \\ \mathtt{U} & \to & \mathtt{TB} \\ \mathtt{A} & \to & \mathtt{a} \\ \mathtt{B} & \to & \mathtt{b} \end{array}$$

Die kontextfreie Grammatik $G' = G_4$ ist in Chomsky-Normalform und hat die gewünschte Eigenschaft $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G)$.