Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich!

Postanschrift: FernUniversität in Hagen, 58084 Hagen

Name, Vorname

Straße, Hausnummer

Postleitzahl, Wohnort

Klausur ohne Hilfsmittel!

FernUniversität in Hagen
Theoretische Informatik 1
Informatikzentrum
58084 Hagen

Fachbereich Informatik

Kurs 1655 – Grundlagen der Theoretischen Informatik

Klausur vom 19. Februar 2005

- ☐ Berlin
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Köln
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ Anderer Ort: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
bearbeitet								
Punktzahl								

Datum: _____ Korrektur: _____

© 2005 FernUniversität in Hagen

Falls Sie eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt benötigen, füllen Sie bitte diese Seite aus. Sie erhalten sie zusammen mit der korrigierten Klausur zurück.

FernUniversität in Hagen
Fachbereich Informatik

58084 Hagen, im Februar 2005

Bescheinigung für das Finanzamt

....., geb. am .....

hat am 19. Februar 2005 in der Zeit von 10.00 bis 13.00 Uhr an der Abschluß–Klausur zum Kurs 1655 "Grundlagen der Theoretischen Informatik"

in ..... teilgenommen.

.....

(Feld für Stempel des Lehrgebiets)

1655 Grundlagen der Theoretischen Informatik
Klausur vom 19. Februar 2005

Es müssen Ihnen 8 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 7 Aufgaben,
- 1 Seite Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie *3 Stunden* Zeit. Einen *Leistungsnachweis* zum Kurs 1655 erhalten Sie, wenn Sie in dieser Klausur mindestens 32 der möglichen 80 Punkte erreichen und zusätzlich mindestens 30% der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben.

Die Benutzung von Hilfsmitteln (wie z. B. des Kurstextes) ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert zusammen, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt. **Bitte geben Sie auch die Aufgabenblätter mit ab.**

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.
Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich – etwa in drei Wochen – zurück.

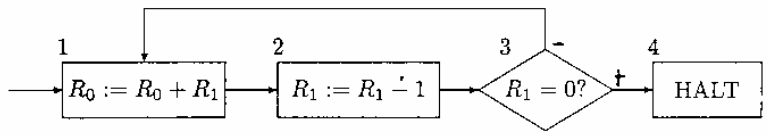
Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(12 Punkte)*

(a) *(10 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch das folgende Flussdiagramm:



(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $k < n$ gilt:

$$\mathrm{ES}^{3k}\big(1,(0,n,0,0,\ldots)\big) = \left(1, \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} i, n-k, 0, 0, \ldots\right)\right).$$

(Hinweis: $\sum\limits_{i=a}^{b} = 0$, falls $a > b$.)

(ii) Zeigen Sie mit (i), daß $f_M(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) *(2 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f\langle x,y,z\rangle := \langle x \dot{-} z, y\rangle + 5$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{N}$. Stellen Sie f ohne die eckigen Klammern $\langle , \rangle$ mit Hilfe der Cantorschen Tupelfunktionen $\pi^{(i)}$ und der Umkehrfunktionen $\pi_k^{(i)}$ in der Form $f(n) = \ldots$ dar.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*

Geben Sie eine 1-stellige Bandmaschine an, die bei Eingabe w einer positiven Dualzahl ohne führende Nullen (also $w \in \{1\}\{0,1\}^*$) dual minus Eins rechnet und andernfalls das leere Wort ausgibt. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht nötig.

(b) *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, dass $f :\subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$(x,y) \mapsto x + y$$

$(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbar ist.

Aufgabe 3 *(16 Punkte)*

(a) *(3 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen zur Standardnummerierung der berechenbaren Zahlenfunktionen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$\varphi \in P^{(1)}$;
[ ]	[ ]	für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_i \in \mathbb{N}$;
[ ]	[ ]	für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_i(j) \in \mathbb{N}$;
[ ]	[ ]	$\mathrm{Def}(\varphi) = \mathbb{N}$;
[ ]	[ ]	für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{Def}(\varphi_i) = \mathbb{N}$;
[ ]	[ ]	für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in \mathrm{Def}(\varphi_i)$.

(Hinweis: Es wird jede richtig beantwortete Frage mit $\frac{1}{2}$ Punkt, jede falsch beantwortete Frage mit $-\frac{1}{2}$ Punkt und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann aber keine negative Punktzahl erzielt werden. Um eine Frage zu beantworten kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile. Denken Sie bitte daran, den Aufgabenzettel mit abzugeben!)

(b) *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, dass es eine totale berechenbare Funktion $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_{s(i,n)}(j) = \varphi_n\langle i, j\rangle.$$

(c) *(4 Punkte)*

Die Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$f(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_i(i) \neq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit der Diagonalisierungsmethode, dass f nicht berechenbar ist.

(d) *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgende Aussage:

Wenn A und B rekursiv-aufzählbar sind, dann ist auch

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

rekursiv-aufzählbar.

Aufgabe 4 *(12 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Sie erhalten für jede richtige Antwort (entweder „richtig" oder „falsch") einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

(a) Eine determinierte k-Band-Turingmaschine hat insgesamt $k+1$ Bänder.

(b) Für eine k-Band-Turingmaschine M gilt stets $\mathrm{Def}\,(t_M) = \mathrm{Def}\,(\tilde{t}_M)$.

(c) Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gilt $o(f) \subseteq O(f)$.

(d) $n^3 \in O\left(n^{\log 5}\right)$.

(e) $(\log n)^2 \in O\left(\log(n^2)\right)$.

(f) $\mathrm{ZEIT}(n) \subseteq \mathrm{FBAND}(n)$.

(g) Ist $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ zeitkonstruierbar, dann ist f eine obere Schranke für die Zeitkomplexität der durch $0^n \mapsto 0^{f(n)}$ definierten Wortfunktion.

(h) $\mathrm{ZEIT}(n \cdot \log n) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(n^2 \cdot \log n)$.

(i) $\mathrm{BAND}(\log n) \subsetneq \mathrm{BAND}\left((\log n)^2\right)$.

(j) Jede von einer Kontrollturingmaschine erkannte Sprache ist entscheidbar.

(k) $\mathrm{ZEIT}(n)$ ist abgeschlossen unter $\leq_{pol}$.

(l) $3\mathrm{SAT} \leq_{pol}$ 2D-DOMINO.

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Begründen Sie:

(a) *(5 Punkte)*

$$O(f) = O(g) \implies \mathrm{ZEIT}(f) = \mathrm{ZEIT}(g).$$

(b) *(5 Punkte)*

$$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \iff \mathrm{SAT} \in \mathrm{P}.$$

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

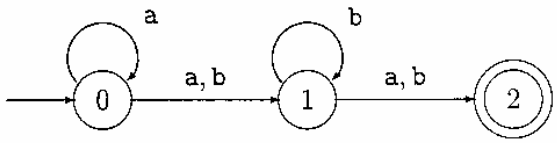
(a) *(3 Punkte)*

Geben Sie die Regelmenge einer rechtslinearen Grammatik G mit Terminalalphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, für die gilt

$$L(G) = L((\mathtt{ab})(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*).$$

(b) *(7 Punkte)*

Ein endlicher Automat A mit Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ sei durch folgenden Übergangsgraphen bestimmt:



Konstruieren Sie mit dem im Kurs angegebenen Verfahren den vereinfachten Potenzmengenautomaten zu A. Geben Sie diesen graphisch an und kennzeichnen Sie den Anfangszustand und alle Endzustände

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

(a) *(4 Punkte)*

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit dem Terminalalphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, für die gilt

$$L(G) = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid m \geqq 1, n \geqq 0\}.$$

Als Nichtterminalalphabet können Sie beispielsweise $\Pi = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}\}$ verwenden.

(Hinweis: Sie brauchen hier nicht zu beweisen, dass die von Ihnen angegebene Grammatik die gewünschte Eigenschaft hat.)

(b) *(6 Punkte)*

Die kontextfreie Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch das Nichtterminalalphabet $\Pi = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}\}$, das Terminalalphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und die wie folgt bestimmte Regelmenge R

$$\begin{array}{lcl|l} \mathtt{S} & \rightarrow & \mathtt{T} & \mathtt{TT} \\ \mathtt{T} & \rightarrow & \mathtt{aTb} & \mathtt{ab}\,. \end{array}$$

Bestimmen Sie zu dieser Grammatik G mit dem im Kurs angegebenen Verfahren eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit der Eigenschaft $L(G) = L(G')$.

Anhang

Nummerierung von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

- $\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch $\nu_{\mathbb{Z}}\langle n, k\rangle := n - k$.
- $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sei definiert durch $\nu_{\mathbb{Q}}\langle n, k, l\rangle := \frac{n-k}{l+1}$.

Nummerierungsberechenbarkeit

Seien $\nu_i :\subseteq \mathbb{N} \to M_i$ Nummerierungen für $i = 0, ..., k$ mit $k \in \mathbb{N}$.
Eine Funktion $f :\subseteq M_1 \times ... \times M_k \to M_0$ heißt $(\nu_1, ..., \nu_k, \nu_0)$-*berechenbar* genau dann, wenn es eine berechenbare Zahlenfunktion $g :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt

$$\nu_0 g(n_1, ..., n_k) = f(\nu_1(n_1), ..., \nu_k(n_k))$$

für alle $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ mit $(\nu_1(n_1), ..., \nu_k(n_k)) \in \mathrm{Def}(f)$.

smn-Theorem

Zu jeder berechenbaren Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt es eine total-berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(i, n) = \varphi_{r(i)}(n).$$

Obere Schranken

Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
Dann heißt $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *obere Schranke* für die Zeitkomplexität (bzw. Bandkomplexität) von f, wenn $f \in \mathrm{FZEIT}(t)$ (bzw. $f \in \mathrm{FBAND}(t)$).

Zeithierarchiesatz

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zeitkonstruierbar, es gelte $\forall n.g(n) \geq n$, und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine Funktion mit $f(n) \cdot \log f(n) \in o(g)$. Dann gilt:

$$\mathrm{ZEIT}(f) \subsetneq \mathrm{ZEIT}(g).$$

Bandhierarchiesatz

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bandkonstruierbar, $\forall n.g(n) \geq \log n$, und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \in o(g)$. Dann gilt:

$$\mathrm{BAND}(f) \subsetneq \mathrm{BAND}(g).$$

Chomsky-Normalform

Eine kontextfreie Grammatik mit Nichtterminalalphabet Π und Terminalalphabet Σ ist in *Chomsky-Normalform*, wenn alle Regeln die Form $\mathtt{A} \to \mathtt{BC}$ oder $\mathtt{A} \to \mathtt{a}$ haben ($\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C} \in \Pi$, $\mathtt{a} \in \Sigma$).