Grundlagen der Theoretischen Informatik
Lösungsvorschläge zur
Klausur am 21. Februar 2004
Wintersemester 2003/2004

Aufgabe 1 (von oben nach unten)

a) korrekt, korrekt, korrekt, falsch, korrekt

b) nicht rekursiv, rekursiv, rekursiv, nicht rekursiv, rekursiv

c) nicht r.a., r.a., r.a., r.a., nicht r.a.

d) falsch, falsch, korrekt

e) korrekt, korrekt, falsch

f) kf., kf., nicht kf.

g) korrekt, falsch, korrekt

h) falsch, korrekt, korrekt

Aufgabe 2

- $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist berechenbare Zahlenfunktion: Siehe Definition 2.5.3.
- $f : (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$ ist berechenbare Wortfunktion: Siehe Definition 3.2.2.
- Menge $A \subseteq \mathbb{N}^k$ ist rekursiv: Siehe Definition 6.1.1.
- NP: Siehe Definition 9.4.1
- A ist Alphabet: A ist Alphabet gdw. A ist eine nicht leere endliche Menge. (Kurseinheit 2)
- G ist eine rechtslineare Grammatik: Siehe Definition 10.3.1.

Aufgabe 3

(a)

$\underline{k=0}$: Sei $x \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} ES^3(2,(x,1,0,\ldots)) &= ES^2(3,(x,1,0,\ldots)) \\ &= ES^1(4,(x+1,1,0,\ldots)) \\ &= (2,(x+1,0,0,\ldots)) \\ &= (2,(x+(0+1)^2,0,0,\ldots)) \end{aligned}$$

$\underline{k \to k+1}$: Sei $x \geq 0$. Es gilt :

$$\begin{aligned} ES^{3k+6}(2,(x,2k+3,0,\ldots)) &= ES^{3k+5}(3,(x,2k+3,0,\ldots)) \\ &= ES^{3k+4}(4,(x+2k+3,2k+3,0,\ldots)) \\ &= ES^{3k+3}(2,(x+2k+3,2k+1,0,\ldots)) \\ &\overset{IV}{=} (2,(x+2k+3+(k+1)^2,0,0,\ldots)) \\ \text{Es ist } x+2k+3+(k+1)^2 &= x+(k+2)^2. \end{aligned}$$

□

(b)

Vermutung: Es wird die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^2$ berechnet.

<u>Beweis</u>:

Eingabe 0 : Es ist $ES^2(1,(0,0,\ldots))$

$$\begin{aligned} &= ES^1(2,(0,0,\ldots)) \\ &= (5,(0,0,\ldots)). \end{aligned}$$

Eingabe $n > 0$: Es ist $ES^{3(n'+1)+3}(1,(0,n,0,\ldots))$

$$\begin{aligned} &= ES^{3(n'+1)+2}(2,(0,2n-1,0,\ldots)) \\ &= ES^{3(n'+1)+1}(2,(0,2n'+1,0,\ldots)) \\ &\overset{(a)}{=} ES^1(2,((n'+1)^2,0,\ldots)) \\ &= (5,n^2,0,\ldots). \end{aligned}$$

Dabei ist $n' = n-1$.

Insgesamt also $f_M(n) = f(n) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Sei $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(< k_1, l_1 >, < k_2, l_2 >) =< k_1^2 + 2k_2l_2 + l_1^2 \quad , k_2^2 + 2l_1k_1 + l_2^2 >$ für $l_1, l_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Die Funktion g ist berechenbar wie man

durch die Ausgabe einer verallgemeinerten Registermaschine leicht sieht. Es gilt für $k_1, l_1, k_2, l_2 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\nu_{\mathbb{Z}}(g(< k_1, l_1 >, < k_2, l_2 >)) &= \nu_{\mathbb{Z}}(< k_1^2 + 2k_2l_2 + l_1^2, k_2^2 + 2l_1k_1 + l_2^2 >) \\
&= k_1^2 - 2l_1k_1 + l_1^2 - k_2^2 + 2k_2l_2 - l_2^2 \\
&= f(k_1 - l_1, k_2 - l_2) \\
&= f(\nu_{\mathbb{Z}} < k_1, l_1 >, \nu_{\mathbb{Z}} < k_2, l_2 >).
\end{aligned}$$

Somit ist f ein $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}})$- berechenbare Funktion.

Aufgabe 5

Nach dem utm-Theorem ist die Funktion $u_\varphi :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $u_\varphi(i, n) := \varphi_i(n)$ für alle $i, \in \mathbb{N}$, berechenbar. Da das Produkt berechenbar ist, ist somit auch die Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(i, n) = a \cdot u_\varphi(i, n) = a \cdot \varphi_i(n)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$, berechenbar. Nach dem smn-Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt:$\varphi_{r(i)}(n) = f(i, n) = a \cdot \varphi_i(n)$.

Aufgabe 6

(a) Wir geben eine TM M an, die bei der Eingabe von 0^n, die Ausgabe $0^{g(n)}$ erzeugt. Die Konstanten a, b werden im Flussdiagramm kodiert. Arbeitsweise von M:

Eingabe: 0^n

1.) Schreibe b 0'en auf das Ausgabeband.

2.) Schreibe a mal soviele 0'en auf das Ausgabeband wie Zeichen in der Eingabe stehen, also kopiere a mal 0^n auf das Ausgabeband.

Bandbedarf: Sowohl Schritt 1.) als auch Schritt 2.) benötigen kein Band. Insgesamt gilt also $\tilde{s}_M \in O(g)$. Korrektheit: Offensichtlich ist $f_M(0^n) = 0^{an+b}$. Somit ist g bandkonstruierbar.

(b) Wie in (a) gesehen ist $4n+2$ bandkonstruierbar und es gilt $4n+2 \geq \log n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n+1}{4n+3} = 0$, also $\log n \in o(4n+2)$. Somit gilt nach dem Bandhierachiesatz $\text{BAND}(\log n) \subsetneq \text{BAND}(4n+2)$.

Aufgabe 7

Siehe auch bei den Lösungshinweisen zu den Übungsaufgaben zur KE 5. Das Partitionsproblem ist ein Spezialfall des Schedulingsproblems. Zur Reduktion wählen wir:

$$f(d(x_1)\sharp \ldots \sharp d(x_n)) = d(2)\sharp d(\sum_{i=1}^{n} x_i) d(2x_1)\sharp \ldots \sharp d(2x_n)$$

$f \in FP$ ist offensichtlich.

Sei $d(x_1)\sharp\ldots\sharp d(x_n) \in$ PARTITION, dann gibt es $M \subseteq \{1,\ldots,n\}$ so dass:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad = \quad \sum_{i\in M} x_i$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad = \quad \sum_{i\in M} 2x_i \text{ und } \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}-M} 2x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Also $f(d(x_1)\sharp\ldots\sharp d(x_n)) \in$ SCHEDULING.

Sei nun $f(d(x_1)\sharp\ldots\sharp d(x_n)) \in$ SCHEDULING,
dann gibt es $M_1, M_2 \subseteq \{1,\ldots,n\}$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $M_1 \cup M_2 = \{1,\ldots,n\}$, so dass:

$$\sum_{i\in M_1} 2x_i \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ und } \sum_{i\in M_2} 2x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i\in M_1} x_i \quad \leq \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ und } \sum_{i\in M_2} x_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Aus $\sum\limits_{i\in M_1} x_i \quad < \quad \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ folgt sofort $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \quad < \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Somit $\sum\limits_{i\in M_1} x_i \quad = \quad \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Also $d(x_1)\sharp\ldots\sharp d(x_n) \in$ PARTITION.

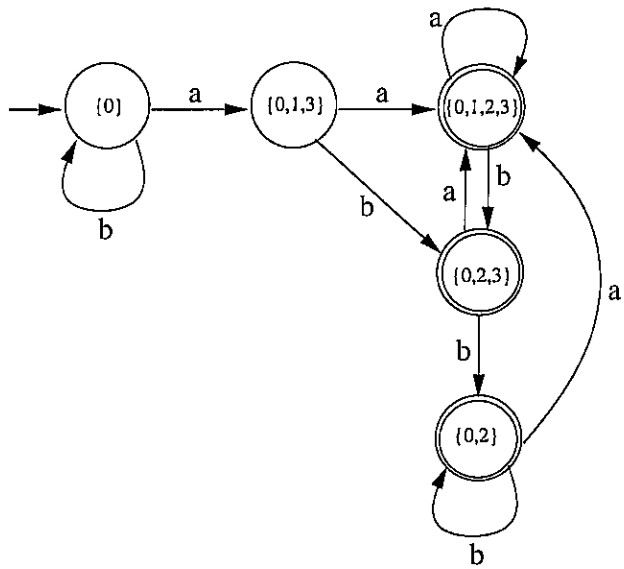
Bem.: Die Multiplikation mit 2 wurde gewählt, da $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ i. A. keine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 8

Zustand	a	b
$\{0\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0\}$
$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$
$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2\}$
$\{0,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2\}$

Anfangszustand $\{0\}$

Endzustandsmenge $\{\{0,1,2,3\},\{0,2,3\},\{0,2\}\}$



Kein Unterschied zwischen der von A und der von dem Potenzautomat zu A akzeptierten Sprache.

Aufgabe 9

Annahme: L sei kontextfrei.

Sei p die Zahl zu L aus dem Pumpinglemma. Betrachte das Wort $z := a^{3p}b^pc^{2p} \in L$ mit $lg(z) = 6p \geq p$ und alle möglichen Zerlegungen $z = uvwxy$ mit $vx <> \varepsilon$ und $lg(vwx) \leq p$.

<u>1.Fall:</u> $vwx \in \{a, b\}^*$.

Dann gilt für das Wort $z' := uwy$, dass $\sharp_a(z') + \sharp_b(z') < 4p$ und $\sharp_c(z') = 2p$. Somit $z' \notin L$.

<u>2.Fall:</u> $vwx \in \{b, c\}^*$

Dann gilt für das Wort $z' = uwy$, dass $\sharp_b(z') + \sharp_c(z') < 3p$ und $\sharp_a(z') = 3p$.

Somit $z' \notin L$.

Widerspruch. Somit ist L nicht kontextfrei.