1655 Grundlagen der Theoretischen Informatik
Klausur vom 3. Februar 2001

Es müssen Ihnen 8 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 4 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 1 Seite Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausur–Unterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1655 erhalten Sie, wenn Sie entweder

- in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen und zusätzlich mindestens 25% der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben,

oder

- in dieser Klausur mindestens 45 der möglichen 90 Punkte erreichen.

Die Benutzung von Hilfsmitteln wie z.B. Kurstext etc. ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an.
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen.

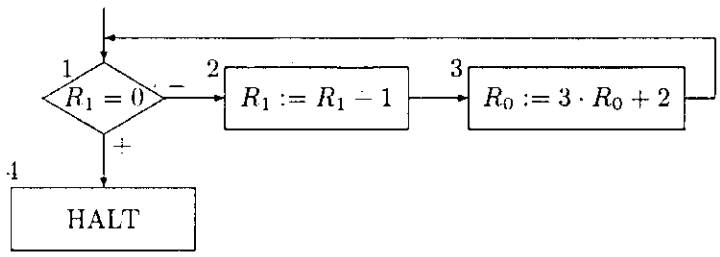
Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.
Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich - etwa in drei Wochen - zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch folgendes Flußdiagramm:



(a) *(7 Punkte)*
Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \forall x \in \mathbb{N}.\ \forall m \geq n.$$
$$\mathrm{ES}^{3n}\big(1, (x, m, 0, \ldots)\big) = \big(1, (3^n(x+1) - 1, m - n, 0, \ldots)\big)$$

(b) *(3 Punkte)*
Welche der folgenden Funktionen wird von der Registermaschine M berechnet?

(1) Die Funktion $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_1(n) = 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Die Funktion $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_2(n) = 3^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Die Funktion $g_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g_3(n, m) = 3^n(m+1) - 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

(a) *(4 Punkte)*
Formulieren Sie das smn-Theorem für die Standardnumerierung $\varphi : \mathbb{N} \to P^{(1)}$ der Menge $P^{(1)}$ aller berechenbaren Zahlenfunktionen $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) *(4 Punkte)*
In dieser Teilaufgabe betrachten wir Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$. Das *Komplement* einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathbb{N} \setminus A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$.
Geben Sie an, welche der folgenden vier Aussagen richtig sind und welche falsch sind. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(1) Das Komplement jeder rekursiv–aufzählbaren Menge ist rekursiv–aufzählbar.

(2) Das Komplement jeder rekursiv–aufzählbaren Menge ist rekursiv.

(3) Das Komplement jeder rekursiven Menge ist rekursiv–aufzählbar.

(4) Das Komplement jeder rekursiven Menge ist rekursiv.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ die durch $\nu_{\mathbb{Q}}(\langle i, j, k \rangle) := \frac{i-j}{k+1}$ definierte Numerierung der Menge der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, die durch

$$f(q) := q^2$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$ definiert ist, eine $(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 4 *(14 Punkte)*

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(n) &:= \#\{i \in \mathbb{N} \mid i < n+1 \text{ und } i \in A\} \\ &= \text{die Anzahl der Zahlen } i \in \mathbb{N}, \text{ die kleiner als } n+1 \text{ sind} \\ &\quad\ \text{und in } A \text{ liegen.} \end{aligned}$$

(a) *(6 Punkte)*
Zeigen Sie: Wenn die Menge A rekursiv ist, ist die Funktion f berechenbar.
(Hinweis: Wenn Sie zur Lösung dieser Aufgabe eine verallgemeinerte Registermaschine angeben, braucht deren Korrektheit nicht bewiesen zu werden.)

(b) *(8 Punkte)*
Zeigen Sie: Wenn die Funktion f berechenbar ist, ist die Menge A rekursiv.

Aufgabe 5 *(22 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, sei $k \geq 1$ und sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit $A \in \mathrm{ZEIT}(n^k)$. Wir definieren eine Sprache $B \subseteq \Sigma^*$ durch

$$\begin{aligned} B &:= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*.\ (w = uv \ \text{ und } \ u \in A)\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{ein Präfix von } w \text{ liegt in } A\}. \end{aligned}$$

(a) *(10 Punkte)*
Zeigen Sie:

$$B \in \mathrm{ZEIT}(n^{k+1}),$$

indem Sie unter Verwendung einer determinierten Turingmaschine M_1 mit $L(M_1) = A$ und $\tilde{t}_{M_1} \in O(n^k)$ eine determinierte Turingmaschine M_2 mit $L(M_2) = B$ und $\tilde{t}_{M_2} \in O(n^{k+1})$ konstruieren und eine Zeitabschätzung für M_2 durchführen. Die Korrektheit von M_2 braucht nicht nachgewiesen zu werden.

(b) *(12 Punkte)*
Zeigen Sie:

$$B \in \mathrm{NZEIT}(n^k),$$

indem Sie unter Verwendung einer determinierten Turingmaschine M_1 mit $L(M_1) = A$ und $\tilde{t}_{M_1} \in O(n^k)$ eine Kontrollturingmaschine M_3 mit $L(M_3) = B$ und $\tilde{t}_{M_3} \in O(n^k)$ konstruieren und eine Zeitabschätzung für M_3 durchführen. Die Korrektheit von M_3 braucht nicht nachgewiesen zu werden.

Aufgabe 6 *(7 Punkte)*

Die Regelmenge R der Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$ mit $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Pi := \{S, T, U\}$ sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{aa}S \mid \mathtt{a}T \mid U \\ T &\to \mathtt{aa}T \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{c} \\ U &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus dem Kurs aus der Grammatik G eine rechtslineare Normalformgrammatik G' mit $L(G') = L(G)$.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei definiert durch:

$$L := \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ und } n > m\}.$$

(a) *(7 Punkte)*
Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, daß L nicht regulär ist.

(b) *(3 Punkte)*
Geben Sie eine Regelmenge R mit genau drei Regeln an, so daß die Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, R, S)$ kontextfrei ist und $L(G) = L$ erfüllt. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 8 *(9 Punkte)*

Die Regelmenge einer kontextfreien Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$ mit $\Pi := \{S\}$ und $\Sigma := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ sei gegeben durch:

$$S \to \mathsf{a}S\mathsf{c} \mid \mathsf{b}S\mathsf{c} \mid \varepsilon$$

(a) *(3 Punkte)*
Welche der folgenden drei Behauptungen ist/sind richtig?
Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(1) $\forall v \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*.\ S \xrightarrow{*} vS\mathsf{c}^{lg(v)}$

(2) $\forall v \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ S \xrightarrow{*} v\mathsf{c}^n$

(3) $\forall i, j \in \mathbb{N}.\ S \xrightarrow{*} \mathsf{a}^i\mathsf{b}^jS\mathsf{c}^{i+j}$

(b) *(6 Punkte)*
Beweisen Sie durch Induktion über die Ableitungslänge die Aussage:

$$\forall W \in (\Sigma \cup \Pi)^*.$$
$$(S \xrightarrow{*} W \Longrightarrow (\exists v \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*.\ W = vS\mathsf{c}^{lg(v)} \text{ oder } W = v\mathsf{c}^{lg(v)}))$$

Anhang

Pumping–Lemma für reguläre Sprachen

Satz 11.4.3 *Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gilt:*
Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $lg(z) = n$ gilt:

$$\exists u, v, w \in \Sigma^*.(z = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge \forall i \geq 0.tuv^iw\bar{t} \in L).$$

Für n kann man die Zustandszahl eines endlichen Automaten A mit $L(A) = L$ wählen.
(Wenn L regulär ist, gibt es also eine Konstante n (die nur von L abhängt), so daß man in jedem Teilwort z der Länge n eines jeden Wortes x aus L (der Länge $\geq n$) ein Teilwort v mit der Eigenschaft findet, daß beim Ersetzen von v in x durch eine beliebig häufige Wiederholung v^i von v („Aufpumpen") wiederum ein Wort aus L entsteht.)