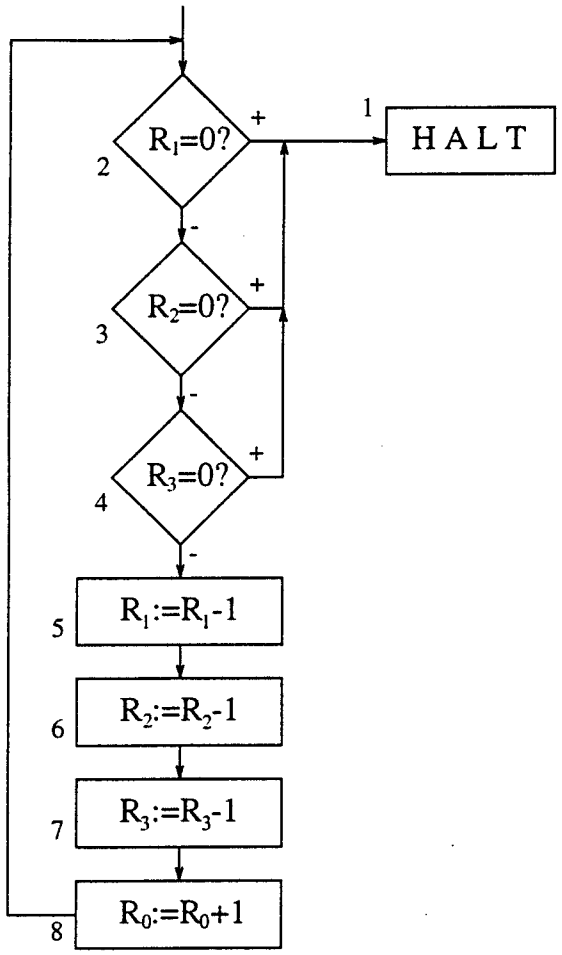
Aufgabe 1: (10 Punkte)

Eine 3-stellige Registermaschine sei durch folgendes Flussdiagramm gegeben:



(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion folgende Schleifeninvariante:
$b, c, d \geq i \Rightarrow ES^{7i}(2, (a, b, c, d, 0, ...)) = (2, (a + i, b - i, c - i, d - i, 0, ...))$
(5 Punkte)

(b) Welche Funktion wird von dieser Maschine berechnet?
Beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von a).
(5 Punkte)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

Sei $\mu(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Beweisen Sie:

a) μ ist eine Numerierung von $\mathbb{Z}$.
(2 Punkte)

b) μ ist äquivalent zu $\nu_{\mathbb{Z}}$.
(Zur Erinnerung: $\nu_{\mathbb{Z}}\langle n, k\rangle = n - k$.)
(10 Punkte)

c) Die Subtraktion auf $\mathbb{Z}$ ist (μ, μ, μ)-berechenbar.
(3 Punkte)

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Sei $A = \{\langle i, j\rangle \mid j \in \text{ Bild } (\varphi_i)\}$.

Beweisen Sie:

a) A ist rekursiv aufzählbar.
(10 Punkte)

b) A ist nicht rekursiv.
(5 Punkte)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L \subset \Sigma^*$ die Sprache, die genau die Dualdarstellungen von Quadratzahlen enthält.

a) Begründen Sie $L \in ZEIT(n^3)$.
(4 Punkte)

b) Begründen Sie $L \in ZEIT(n^{1+\log_2 3})$.
(Wer b) löst, erhält natürlich automatisch auch die Punkte für a).) (2 Punkte)

c) Gibt es überhaupt eine Sprache in $ZEIT(n^3)$, die nicht in $ZEIT(n^{1+\log_2 3})$ liegt?
Warum bzw. warum nicht?

(4 Punkte)

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Sei ALMOST-SAT die Menge aller Worte, die (bezüglich einer geeigneten Notation) aussagenlogische Formeln in KNF darstellen, für die gilt: Es existiert eine Belegung, die alle Klauseln erfüllt, bis auf höchstens eine Ausnahme.

Zeigen Sie, dass ALMOST-SAT NP-vollständig ist.

Unverbindlicher Hinweis:
Reduktion von SAT. Führen Sie eine zusätzliche Variable v ein, sowie folgende zusätzliche Klauseln:

- eine Klausel, die nur aus $\neg v$ besteht,
- zu jeder Klausel F_i in der Eingabe von SAT die Klausel $F_i \vee v$.

Auf die Notation γ_{WFF} muss man nicht Bezug nehmen; man kann direkt auf den Formeln arbeiten.

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Sei Σ ein festes Alphabet. Bekanntlich sind die regulären Mengen abgeschlossen unter Spiegelung. (L regulär $\Rightarrow L^R$ regulär.) Wir wollen eine konstruktive Version dieses Satzes beweisen:

Geben Sie eine Turingmaschine M an, die bei Eingabe $v \in (\Sigma \cup \{\emptyset, (,), \cup, ^*\})^*$ folgendes leistet.

Ist v kein regulärer Ausdruck, so darf die Ausgabe beliebig sein. Ist v ein regulärer Ausdruck, dann soll M einen regulären Ausdruck für die gespiegelte Sprache ausgeben, d.h. $L(w) = L(v)^R$. Zeichnen Sie kein Flussdiagramm, sondern beschreiben Sie M nur verbal auf höchstens einer A4-Seite.

Aufgabe 7: (15 Punkte)

Sei $G = \{\{S\}, \Sigma, R, S\}$ eine Grammatik mit den Regeln $S \rightarrow c$ und $S \rightarrow uSv$, sodass $c \in \Sigma, u, v \in \Sigma^*$ gilt, und c nicht in u bzw. v vorkommt.

Zeigen Sie:

a) $L(G)$ ist kontextfrei.

(2 Punkte)

b) $L(G)$ ist regulär genau dann, wenn $u = \varepsilon$ oder $v = \varepsilon$.

(10 Punkte)

c) In welchen Fällen existiert ein determinierter endlicher Automat, der $L(G)$ akzeptiert, und wie sieht der Automat jeweils aus?

(3 Punkte)