FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität, 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

(Land)

FERNUNIVERSITÄT
EINGANG

MI

Bitte zurück an:
FERNUNIVERSITÄT
58084 Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik

Kurs 01654 – Einführung in die Theoretische Informatik B

Klausur am 30. Juli 2011

- ☐ Berlin
- ☐ Bern
- ☐ Bochum
- ☐ Bregenz
- ☐ Frankfurt
- ☐ Hamburg
- ☐ Karlsruhe
- ☐ Köln
- ☐ München
- ☐ Wien
- ☐ sonstige

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
bearbeitet								
maximale Punktzahl	20	10	20	15	15	10	10	100
erreichte Punktzahl								

Datum: _____ Korrektor: _____

© 2011 FernUniversität in Hagen

Vorbemerkungen zur Klausur zum Kurs 01654 „Einführung in die Theoretische Informatik B “

Es müssen Ihnen 8 Blätter Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 7 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Füllen Sie bitte vor der Bearbeitung das Deckblatt aus (Matrikel-Nr., Name, Adresse) und legen Sie es mit den Ausweisen zur Kontrolle bereit.

Für die Bearbeitung haben Sie 3 Stunden Zeit. Außer Schreibzeug sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Schreiben Sie bitte leserlich und lassen Sie einen breiten Korrekturrand. Beginnen Sie möglichst für jede Aufgabe eine neue Seite.

Folgende Unterlagen sind zusammengeheftet abzugeben:

- das ausgefüllte Deckblatt (bitte bearbeitete Aufgaben ankreuzen),
- die ausgefüllte Finanzamt-Bescheinigung (sofern gewünscht),
- Ihre Lösungsblätter, möglichst in der Reihenfolge der Aufgaben. Schreiben Sie zur Sicherheit auf jedes Blatt nochmals Name und Matrikel-Nr. Vergessen Sie bitte nicht, den ausgefüllten Fragebogen von Aufgabe 1 abzugeben!

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 40 von 100 Punkten erreichen. Wir bemühen uns, die Klausur zügig zu korrigieren und zurückzusenden. Sollten Sie nach zwei Wochen noch keine Nachricht haben, können Sie Ihr Ergebnis im Lehrgebiet erfragen.

Viel Erfolg!

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(20 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten, kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihre Lösung für diese Aufgabe abzugeben!

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Es gibt totale, berechenbare Funktionen f, die weder zeit- noch bandkonstruierbar sind.
[ ]	[ ]	Für jede beschränkte Funktion $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt, dass $\mathrm{ZEIT}(t)$ endlich ist.
[ ]	[ ]	Für jede beschränkte Funktion $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt, dass $\mathrm{ZEIT}(t)$ nur endliche Sprachen enthält.
[ ]	[ ]	Jede endliche Sprache ist in $\mathrm{ZEIT}(t)$ für alle $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enthalten.
[ ]	[ ]	Jede reguläre Sprache ist in $\mathrm{ZEIT}(\log n)$ enthalten.

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$\mathrm{ZEIT}(n) \subseteq \mathrm{NBAND}(n)$
[ ]	[ ]	$\mathrm{BAND}(\log n) \subseteq \mathrm{NP}$
[ ]	[ ]	$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{NBAND}(n^{\log n})$
[ ]	[ ]	Wenn $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann ist jede nichtleere Sprache NP-vollständig.
[ ]	[ ]	Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{ZEIT}(n^k)$.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Jede kontextsensitive Sprache ist auch kontextfrei.
[ ]	[ ]	Jede kontextfreie Grammatik ist auch kontextsensitiv.
[ ]	[ ]	Jede deterministisch kontextfreie Sprache ist eindeutig.
[ ]	[ ]	Eine kontextfreie Sprache ist deterministisch genau dann, wenn sie von einem Kellerautomaten akzeptiert wird.
[ ]	[ ]	Für jede kontextfreie Sprache L gilt $L \in \mathrm{BAND}(n^2)$.

(iv) Welche der folgenden Mengen ist regulär, kontextfrei aber nicht regulär, nicht kontextfrei?

regulär	kontextfrei und nicht regulär	nicht kontextfrei	
[ ]	[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{a^{n+m} a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{a^n b^m \mid n \equiv m \pmod 3\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{a^n b^m c^r \mid n \equiv m \pmod r\}$
[ ]	[ ]	[ ]	$\{a^n b^m a^n b^{2m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

(Hierbei bedeutet $m \equiv n \pmod r$ für Zahlen $m, n, r \in \mathbb{N}$, dass $a, b, c \in \mathbb{N}$ existieren mit $m = a \cdot r + c$, $n = b \cdot r + c$ und $c < r$.)

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

(i) Geben Sie die Definition von Zeitkonstruierbarkeit an. (2 Punkte)

(ii) Geben Sie die Definition von polynomialler Reduzierbarkeit an ($L \leq_{\text{pol}} M$). (2 Punkte)

(iii) Erläutern und begründen Sie, wie man mittels einer einzigen Reduktion nachweisen kann, dass eine Sprache NP-hart ist. (4 Punkte)

(iv) Geben Sie die Definition von kontextfreien Grammatiken an. (2 Punkte)

Aufgabe 3 *(20 Punkte)*

(i) Geben Sie alle bekannten Relationen zwischen den folgenden Komplexitätsklassen an — Beweise sind nicht gefordert: (10 Punkte)

$\text{BAND}(\log n)$, $\text{NBAND}((\log n) \cdot (\log \log n))$, $\text{ZEIT}(n)$, P, NP, $\text{BAND}((\log n)^3)$, $\text{ZEIT}(2^{n^{\log \log n}})$, $\text{ZEIT}(n \cdot \log \log n)$, $\text{BAND}(\lceil n / \log \log n \rceil)$, $\text{ZEIT}(n^{\log \log n})$.

(ii) Zeigen Sie für 4 verschiedene Klassen L_1, L_2, M_1, M_2 aus Teil (i), dass $L_1 \subsetneq M_1$ und $L_2 \subsetneq M_2$. (10 Punkte)

Aufgabe 4 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie: Die Sprache

$$\{\gamma_{\text{WFF}}(F)\sharp^t \mid \ t \in \mathbb{N}, F \in \text{WFF}, F \text{ in 3-KNF}, \text{ es existiert eine Belegung, die wenigstens } t \text{ Klauseln von } F \text{ erfüllt}\}$$

ist NP-vollständig.

Aufgabe 5 *(15 Punkte)*

Sei $L = \{wa \mid w \in \{a,b\}^*, \ \lg(w) \text{ gerade}\}$.

(i) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G an mit $L(G) = L$. (4 Punkte)

(ii) Geben Sie einen endlichen, determinierten Automaten A an mit $L(A) = \{a,b\}^* \setminus L$. (4 Punkte)

(iii) Zeigen Sie $L(A) \subseteq \{a,b\}^* \setminus L$ für den von Ihnen in Teil (ii) gewählten Automaten A. (7 Punkte)

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Sei $L = \{a^n bcb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an mit $L(G) = L$. (4 Punkte)

(ii) Begründen Sie: L ist eine eindeutige Sprache. (6 Punkte)

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Zeigen Sie: Jede kontextfreie Sprache $L \subseteq \{a\}^*$ erfüllt auch das reguläre Pumping-Lemma, d.h. für jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet gilt: es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass zu jedem $w \in L$ mit $\lg(w) \geq n$ und jeder Zerlegung $w = tz\bar{t}$ mit $\lg(z) = n$ eine Zerlegung $z = uvx$ existiert mit $v \neq \varepsilon$ und $tuv^ix\bar{t} \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Anhang

Definition 5.2.3 *(Normalformen für aussagenlogische Formeln)*

Eine Formel der Form v_i oder $\neg v_i$ nennen wir *Literal*. Eine Disjunktion von Literalen (d. h. eine Formel der Form $(l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k)$ mit Literalen $l_1, l_2, \ldots, l_k$) nennen wir *Klausel*.

Eine Formel $F \in$ WFF heißt in *konjunktiver Normalform* (KNF), gdw. sie eine Konjunktion von Klauseln ist, d. h. $F = \bigwedge_{i=1}^{k} F_i$ mit Klauseln $F_1, \ldots, F_k$.

F heißt Formel in 3-KNF, gdw. $F = \bigwedge_{i=1}^{k} F_i$ und jedes F_i eine Disjunktion aus höchstens 3 Literalen ist.

Definition 5.2.4 *(SAT,3SAT)*

Sei $\Pi = \{|, 0, 1, \wedge, \vee, \neg, '(', ')'\}$, $V = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Formeln sind Worte über der unendlichen Menge $\tilde{\Pi} = V \cup \{0, 1, \wedge, \vee, \neg, '(', ')'\}$. Sei $\gamma : \tilde{\Pi}^* \to \Pi^*$ die folgende Funktion:

$$\begin{aligned}
\gamma(\varepsilon) &= \varepsilon \\
\gamma(v_i) &= |^{i+1} \\
\gamma(a) &= a && \text{falls } a \in \{0, 1, \wedge, \vee, \neg, '(', ')'\} \\
\gamma(wa) &= \gamma(w)\gamma(a) && \text{für } w \in \tilde{\Pi}^*,\ a \in \tilde{\Pi}
\end{aligned}$$

Sei $\gamma_{\text{WFF}} = \gamma|_{\text{WFF}}$ die Einschränkung von γ auf WFF $\subseteq \tilde{\Pi}^*$.

(Man zeigt leicht, dass γ_{WFF} injektiv ist; für γ gilt dies nicht, da z. B. $\gamma(v_1 v_2) = |^5 = \gamma(v_4)$.)

Sei

$$\begin{aligned}
\text{SAT} &= \{\gamma_{\text{WFF}}(F) \mid F \in \text{WFF},\ F \text{ ist erfüllbar}\}, \\
\text{3SAT} &= \{\gamma_{\text{WFF}}(F) \mid F \in \text{WFF},\ F \text{ in 3-KNF},\ F \text{ ist erfüllbar}\}.
\end{aligned}$$

Satz 8.4.3 *(Pumping-Lemma für reguläre Mengen)*

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gilt:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists\, u, v, w \in \Sigma^*.\ \left(z = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge \forall\, i \geq 0.\ tuv^iw\bar{t} \in L\right).$$

Für n kann man die Zustandszahl eines endlichen Automaten A mit $L(A) = L$ wählen.

(Wenn L regulär ist, gibt es also eine Konstante n (die nur von L abhängt), so dass man in jedem Teilwort z der Länge n eines jeden Wortes x aus L (der Länge $\geq n$) ein Teilwort v mit der Eigenschaft findet, dass beim Ersetzen von v in x durch eine beliebig häufige Wiederholung v^i von v („Aufpumpen") oder durch ε wiederum ein Wort aus L entsteht.)

Satz 9.4.3 *(Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)*

Sei L kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $\lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass gilt:

$$z = uvwxy\,, \quad vx \neq \varepsilon\,, \quad \lg(vwx) \leq p\,, \quad \forall\, i \geq 0.\ uv^iwx^iy \in L\,.$$

Ist $L = L(G)$ mit einer Chomsky-Normalform-Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$, so gilt die Aussage für jedes $p \geq 2^{\#\Pi}$.