Vorbemerkungen zur Klausur zum Kurs 01654 „Einführung in die Theoretische Informatik B “

Es müssen Ihnen 9 Blätter Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung für das Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 5 Blätter mit 8 Aufgaben,
- ein Anhang.

Füllen Sie bitte vor der Bearbeitung das Deckblatt aus (Matrikel-Nr., Name, Adresse) und legen Sie es mit den Ausweisen zur Kontrolle bereit.

Für die Bearbeitung haben Sie 3 Stunden Zeit. Außer Schreibzeug sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Schreiben Sie bitte leserlich und lassen Sie einen breiten Korrekturrand. Beginnen Sie möglichst für jede Aufgabe eine neue Seite.

Folgende Unterlagen sind zusammengeheftet abzugeben:

- das ausgefüllte Deckblatt (bitte bearbeitete Aufgaben ankreuzen),
- die ausgefüllte Finanzamt-Bescheinigung (sofern gewünscht),
- Ihre Lösungsblätter, möglichst in der Reihenfolge der Aufgaben. Schreiben Sie zur Sicherheit auf jedes Blatt nochmals Name und Matrikel-Nr.

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 40 von 100 Punkten erreichen. Wir bemühen uns, die Klausur zügig zu korrigieren und zurückzusenden. Sollten Sie nach zwei Wochen noch keine Nachricht haben, können Sie Ihr Ergebnis im Lehrgebiet erfragen.

Viel Erfolg!

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(30 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

1.) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind für alle $A, B \subseteq \Sigma^*$ korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Aus $A \leq_{pol} B$ und $B \in$ PSPACE folgt $A \in$ PSPACE.
[ ]	[ ]	Aus $A \leq_{log} B$ und $A \in$ P folgt $B \in$ P.
[ ]	[ ]	Aus $A \leq_{pol} B$ und $B \leq_{pol} A$ und A NP-vollständig folgt B ist NP-vollständig.
[ ]	[ ]	Aus $A \in$ NP und B NP-hart folgt $A \leq_{pol} B$.
[ ]	[ ]	Aus A ist NP-vollständig folgt SAT $\leq_{pol} A$.
[ ]	[ ]	$A \leq_{pol} \{0, 1, 00\}$
[ ]	[ ]	Aus SAT $\leq_{pol} A$ und $A \in$ NP folgt A ist NP-vollständig.

2.) Welche der folgenden Mengen ist/sind deterministisch kontextfrei (dkf)?
Dabei ist $(a_1 \dots a_n)^R = a_n \dots a_1$, $a_i \in \{0, 1\}$ und $\varepsilon^R = \varepsilon$.

dkf	nicht dkf	
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m c^m d^{2n} \mid m, n \geq 0\}$
[ ]	[ ]	$\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
[ ]	[ ]	$\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
[ ]	[ ]	$(\{a, b, c\}^* \backslash \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}) \cup (\{a, b, c\}^* \backslash \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\})$

3.) Welche der folgenden Sprachen ist/sind regulär?

regulär	nicht regulär	
[ ]	[ ]	$\{ww \mid w \in \{0\}^*\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^n \mid n$ gerade$\}$
[ ]	[ ]	$\{a^n b^m \mid n$ ist gerade und m ist durch 3 teilbar$\}$

4.) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Jede zeitkonstruierbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist auch bandkonstruierbar.
[ ]	[ ]	$n + \log\ n$ ist bandkonstruierbar
[ ]	[ ]	$\forall k \in \mathbb{N}.\ \sqrt{n} \cdot (\log\ n)^k \in o(n)$
[ ]	[ ]	$\log\ n$ ist zeitkonstruierbar
[ ]	[ ]	$\forall k \in \mathbb{N}.\ \log(n^k) \in O(\log\ n)$
[ ]	[ ]	$\forall k \in \mathbb{N}.(\log n)^k \in O(\log n)$

5.) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	$L((a \cup b)^* a(a \cup b)) = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ der vorletzte Buchstabe in w ist ein $a\}$
[ ]	[ ]	$\forall L, M.\ L$ regulär und M kontextfrei $\Rightarrow\ L \cap M$ kontextfrei
[ ]	[ ]	$\forall L.\ L$ deterministisch kontextfrei $\Rightarrow L^*$ deterministisch kontextfrei
[ ]	[ ]	Für reguläre und kontextfreie Sprachen ist das Wortproblem entscheidbar.
[ ]	[ ]	Die Menge der C-Programme ist eine kontextfreie Menge.

6.) Welche der folgenden Ausssagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	ZEIT(n) $\subsetneq$ ZEIT(n log n)
[ ]	[ ]	Aus $\tilde{t}_M \in O(n)$ folgt, dass die Turingmaschine M für jede Eingabe hält.
[ ]	[ ]	Aus $N \in$ NZEIT(n^2) und $N \subseteq \{0,1\}^*$ folgt: $\exists M \in$ ZEIT$(n).\ N = \{x \mid \exists y \in \{0,1\}^*.xy \in M$ und $lg(y) \in O((lg(x))^2)\}$
[ ]	[ ]	PSPACE $\subsetneq$ NPSPACE
[ ]	[ ]	P=LOGSPACE $\Leftrightarrow \{\varepsilon\}$ ist P-vollständig

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*

Geben Sie Definitionen an für:

(a) die von einer nichtdeterminierten Turingmaschine $M = (F, \Sigma^*, \Sigma^*, EC, AC)$ mit $F = (Q, D, \delta, q_0, s, Q_e)$ erkannte Sprache L_M

(b) P

(c) $M \subseteq \Sigma^*$ ist NP-hart

(d) L ist NP-vollständig

(e) den Begriff Formale Sprache

(f) die von einem Automaten $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ erkannte Sprache $L(A)$

Aufgabe 3 *(8 Punkte)*

Zu zwei totalen Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionen $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \forall n \in \mathbb{N}. & (f+g)(n) & := \quad f(n) + g(n) \text{ und} \\ \forall n \in \mathbb{N}. & (f \circ g)(n) & := \quad f(g(n)). \end{array}$$

Seien also $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben. Beweisen Sie:

(a) Gilt $f(n) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $g + (f \circ g) \in O(f \circ g)$.
(3 Punkte)

(b) Sind f und g zeitkonstruierbar und gilt $f(n) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $f \circ g$ zeitkonstruierbar.
(5 Punkte)

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Die Reduktion $\leq_{LIN}$ ist wie folgt definiert:

$$A \leq_{LIN} B \Leftrightarrow (\exists f \in \text{FZEIT}(n). \forall x. x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$$

Zeigen Sie:

(a) Die Sprachklasse P ist unter $\leq_{LIN}$ abgeschlossen.
(3 Punkte)

(b) Es gibt keine vollständigen Sprachen für P bzgl. $\leq_{LIN}$.
(7 Punkte)

Aufgabe 5 *(11 Punkte)*

Sei

$$\begin{array}{lll} \text{DOPPELT} := & \{d(a_1)\sharp \ldots \sharp d(a_m)\sharp d(N)\sharp d(M) & \mid N, M, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}, N \leq M \wedge \\ & \exists I, J \subseteq \{1, \ldots, m\}. \sum_{i \in I} a_i = N \wedge \sum_{i \in J} a_i = M \wedge I \cap J = \emptyset\} & \end{array}$$

(i) Beweisen Sie durch die Angabe einer Reduktion:

$$\text{RUCKSACK} \leq_{pol} \text{DOPPELT}$$

(7 Punkte)

(ii) Zeigen Sie, dass die Sprache DOPPELT eine NP-vollständige Sprache ist.
(4 Punkte)

Dabei bezeichnet $d(n) \in \{0,1\}^*$ die in Dualnotation dargestellte Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 *(11 Punkte)*

a) Geben Sie für die folgenden Sprachen $L_i, 1 \leq i \leq 3$, reguläre Ausdrücke α_i an, so dass $L_i = L(\alpha_i)$ gilt:

(i) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a \text{ oder } \exists v \in \{a,b\}^*.w = vb\}$
(1 Punkt)

(ii) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ beginnt mit einem a und endet mit einem $b\}$
(1 Punkt)

(iii) $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w) \geq 2\}$
(1 Punkt)

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen $L_i, 1 \leq i \leq 2$, endliche Automaten A_i an, so dass $L_i = L(A_i)$ gilt:

(i) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w)$ ist gerade und $\sharp_b(w)$ ist ungerade$\}$
(2 Punkte)

(ii) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält ab oder w enthält ba als Teilwort$\}$
(2 Punkte)

c) Geben Sie einen determinierten endlichen Automaten A an, mit

$$L(A) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } ab \underline{\text{genau}} \text{ einmal}\}$$

(3 Punkte)

d) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G an mit

$$L(G) = \{w \in \{a,b\} \mid w \text{ enthält das Teilwort } ab\}$$

(1 Punkt)

Hierbei bezeichnet $\sharp_x(v)$ die Häufigkeit des Vorkommens von x in v, $x \in \{a,b\}$.

Hinweis: Beweise, dass Ihr Automat/Ihre Grammatik/Ihr regulärer Ausdruck die jeweilige Sprache akzeptiert/erzeugt/erzeugt, brauchen nicht geführt zu werden.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Beweisen Sie mit dem Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache

$$L := \{a^n b^m c^{2n} d^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 8 *(14 Punkte)*

Gegeben ist die folgende kontextfreie Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$
mit $\Sigma = \{<, >\}, \Pi = \{S\}$ und der Regelmenge R:

$$S \rightarrow < S > \mid SS \mid \varepsilon$$

Sei weiterhin

$$L := \{w \in \{<, >\}^* \mid \sharp_<(w) = \sharp_>(w) \text{ und für jedes Präfix } u \text{ von } w \text{ gilt } \sharp_<(u) \geq \sharp_>(u)\}.$$

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in (\Sigma \cup \Pi)^*. (S \xrightarrow{n} w \Rightarrow \sharp_<(w) = \sharp_>(w) \text{ und für jedes Präfix } u \text{ von } w \text{ gilt } \sharp_<(u) \geq \sharp_>(u))$$

(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie mit (a), dass $L(G) \subseteq L$ gilt.
(2 Punkte)

(c) Beweisen Sie $L \subseteq L(G)$. Sie dürfen dabei ohne Beweis die folgende Aussage $(*)$ benutzen:

$$(*) \quad \forall w \in L \backslash \{\varepsilon\}. (\exists u \in \text{ L. } w = < u >) \vee (\exists u, v \in L, \ u \neq w, v \neq w. \ w = uv).$$

(4 Punkte)

(d) Beweisen Sie die Aussage $(*)$ aus Aufgabenteil (c).
(4 Punkte)

Hierbei bezeichnet $\sharp_x(v)$ die Häufigkeit des Vorkommens von x in v, $x \in \{<, >\}$.

Anhang

Das Rucksackproblem ist wie folgt definiert:

$$\text{RUCKSACK} := \{d(N)\sharp d(k_1)\sharp \ldots \sharp d(k_n) \mid \exists M \subseteq \{1,\ldots,n\}. \sum_{i \in M} k_i = N\},$$

wobei $d(k)$ wieder die Dualdarstellung der Zahl k ist.

Pumping-Lemma für kontextfreie Mengen

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $\lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass gilt:

$$z = uvwxy,\ vx \neq \varepsilon,\ \lg(vwx) \leq p \text{ und } \forall i \geq 0. uv^i wx^i y \in L.$$