01653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 20. März 2010

Es müssen Ihnen 9 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 5 Blätter mit 10 Aufgaben,
- 1 Seite Anhang.

Füllen Sie bitte vor der Bearbeitung das Deckblatt aus (Matrikel-Nr., Name, Adresse) und legen Sie es mit den Ausweisen zur Kontrolle bereit.
Für die Bearbeitung haben Sie 3 Stunden Zeit. Außer Schreibzeug sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
Schreiben Sie bitte leserlich und lassen Sie einen breiten Korrekturrand. Beginnen Sie möglichst für jede Aufgabe eine neue Seite.
Folgende Unterlagen sind zusammengeheftet abzugeben:

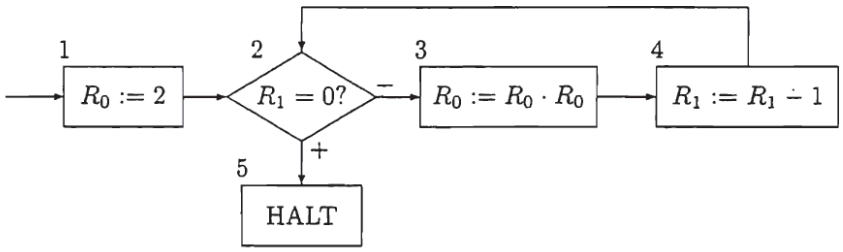
- das ausgefüllte Deckblatt (bitte bearbeitete Aufgaben ankreuzen),
- die ausgefüllte Finanzamt-Bescheinigung (sofern gewünscht),
- Ihre Lösungsblätter, möglichst in der Reihenfolge der Aufgaben. Schreiben Sie zur Sicherheit auf jedes Blatt nochmals Name und Matrikel-Nr.

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 40 von 100 Punkten erreichen. Wir bemühen uns, die Klausur zügig zu korrigieren und zurückzusenden. Sollten Sie nach zwei Wochen noch keine Nachricht haben, können Sie Ihr Ergebnis im Lehrgebiet erfragen.
Viel Erfolg!

Mit freundlichen Grüßen
IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei gegeben durch folgendes Flussdiagramm F :



(a) *(1 Punkt)*

Welche der folgenden beiden Behauptungen trifft zu?

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\mathrm{ES}^{3k}(2, (2, n, 0, 0, ...)) = \left(2, (2^{2^k}, n - k, 0, 0, ...)\right).$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x \geq n$ gilt

$$\mathrm{ES}^{3n}(2, (2, x, 0, 0, ...)) = (2, (2^{n+1}, x - n, 0, 0, ...)).$$

(b) *(6 Punkte)*

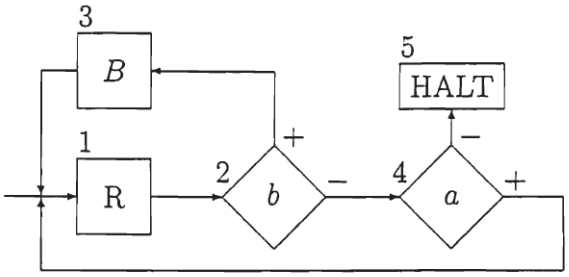
Beweisen Sie die zutreffende Behauptung aus (a).

(c) *(3 Punkte)*

Beweisen Sie $f_M(x) = 2^{2^x}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ oder $f_M(x) = 2^{x+1}$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 *(11 Punkte)*

Das Flussdiagramm F einer einstelligen Bandmaschine M über $\Sigma = \{a, b\}$ sei wie folgt gegeben:



Es sei $\Gamma := \Sigma \cup \{B\}$. Für alle $w \in \Sigma^*$, $u \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$ gilt dann:

$$\exists\, t \in \mathbb{N} \,.\, \exists\, w' \in \Gamma^* \,.\, \big(\mathrm{ES}^t\,(1, (u, c, w)) = (5, (ucw', B, \varepsilon)) \text{ und } \forall\, v \in \Sigma^* \,.\, (v \text{ Suffix von } w' \iff v \text{ Suffix von } w \text{ und } \exists\, n \in \mathbb{N} \,.\, v = a^n)\big).$$

(a) *(7 Punkte)*

Beweisen Sie dies durch vollständige Induktion nach der Länge von w.

(b) *(4 Punkte)*

Geben Sie diejenige Funktion f an, die von M berechnet wird, für die also $f_M = f$ gilt, und zeigen Sie dies mit Hilfe von (a).

Aufgabe 3 *(9 Punkte)*

(a) *(2 Punkte)*

Geben Sie die Definition des *Operators der primitiven Rekursion* wieder, d. h., formulieren Sie, wann per definitionem $f = \mathrm{Prk}(g, h)$ für die Funktionen f, g und h gilt (wobei f n-stellig sei).

(b) *(7 Punkte)*

Es sei $t :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$t(x, y) := \begin{cases} \frac{y}{x} & \text{falls } x \text{ ein Teiler von } y \text{ ist} \\ \mathrm{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass t durch μ-Rekursion aus einer berechenbaren Funktion entsteht.

Aufgabe 4 *(7 Punkte)*

Formulieren Sie

(a) *(2 Punkte)*
das utm-Theorem,

(b) *(2 Punkte)*
das smn-Theorem,

(c) *(3 Punkte)*
das Φ-Theorem.

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

Es sei $u_\Phi :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die universelle Funktion der Standardkomplexität Φ zu φ, also

$$u_\Phi(i, x) := \Phi_i(x)$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$. Ferner sei eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } u_\Phi(x,x) \neq \text{div und } u_\Phi(x,x) \leq 10 \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$. Ist f berechenbar? – Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 *(12 Punkte)*

Beweisen Sie mittels Reduktion, dass die Menge $A := \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) = i\}$ nicht rekursiv ist.

Aufgabe 7 *(9 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ Teilmengen von $\mathbb{N}$, und es gelte $K_\varphi = (\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Abschlusseigenschaften, dass dann A oder B nicht rekursiv-aufzählbar ist.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Es sei V die Vorgängerfunktion auf den natürlichen Zahlen. Zeigen Sie, dass es keine berechenbare Funktion $g \in P^{(1)}$ gibt mit folgender Eigenschaft:

$$g(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = V \\ \text{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9 *(12 Punkte)*

Es sei $\nu_{\mathbb{Q}}$ die Standardnummerierung von $\mathbb{Q}$. Eine partielle Funktion $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$\nu(n) := \begin{cases} \nu_{\mathbb{Q}}(n) & \text{falls } \nu_{\mathbb{Q}}(n) \in \mathbb{N} \\ \text{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(a) *(2 Punkte)*

ν ist eine Nummerierung von $\mathbb{N}$.

(b) *(10 Punkte)*

ν ist zur Identitätsfunktion $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ äquivalent.

Aufgabe 10 *(12 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?
(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede richtige Antwort (entweder „richtig" oder „falsch") einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann pro Teilblock keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

1. (a) Im Flussdiagramm einer verallgemeinerten Registermaschine M dürfen beliebige Funktionen und Tests verwendet werden.
   (b) Jede primitiv-rekursive Funktion ist ein Element von $R^{(1)}$.
   (c) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine bijektive Abbildung von $R^{(k)}$ auf $R^{(1)}$.
   (d) Im Bildbereich der Standardnummerierung φ gibt es nicht-totale Funktionen.

(e) Die Standardnummerierung φ ist nicht total.

2. (f) Wenn die Menge $\{\langle i,j\rangle \mid i,j \in \mathbb{N},\ \varphi_i = \varphi_j\}$ rekursiv-aufzählbar ist, dann ist die Menge $K\varphi$ rekursiv.

   (g) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv-aufzählbar und gilt $A \leq B$ für die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}$, dann ist auch B rekursiv-aufzählbar.

   (h) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $f \in R^{(1)}$ die Eigenschaft $\varphi_{f(n)} = \varphi_n$ zutrifft.

   (i) Es gibt genau eine Nummerierung von $\mathbb{Z}$.

   (j) Ist ν eine Nummerierung einer beliebigen Menge M, so ist jede ν-rekursive Teilmenge von M auch ν-rekursiv-aufzählbar.

3. (k) Die Multiplikation mit 3 ist keine berechenbare reelle Funktion.

   (l) Jede stetige reelle Funktion ist berechenbar.

Anhang

Berechenbare Zahlenfunktionen

Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

1. $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).
2. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).
3. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).
4. $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
5. $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).
6. $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
7. $f(x, y) := x + y$ (Summe).
8. $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
9. $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).
10. $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \mathrm{div}$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).
11. $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).
12. $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).
13. $\max(x, y)$.
14. $\min(x, y)$.
15. $f(x) := (1$ falls x Primzahl, 0 sonst).
16. $f(x) :=$ die x-te Primzahl.
17. $f(x, y) := |x - y|$ (Absolutbetrag).

μ-Rekursion

1. Es sei $Q(x)$ eine Eigenschaft, in der eine natürliche Zahl x als Parameter vorkommt. Dann sei

$$\mu x[Q(x)] := \begin{cases} \min M & \text{falls } M := \{k \in \mathbb{N} \mid Q(k)\} \neq \emptyset \\ \mathrm{div} & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Es sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion. Dann sei die Funktion $\tilde{\mu}(h) :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\tilde{\mu}(h)(\bar{x}) = \mu y[h(\bar{x}, y) = 0]$$

für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$. Man sagt, $\tilde{\mu}(h)$ entsteht aus h durch *μ-Rekursion.*

Standardnummerierung von $\mathbb{Q}$

$\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist definiert durch $\nu_{\mathbb{Q}}\langle n, k, l\rangle := \dfrac{n - k}{l + 1}$ für alle $n, k, l \in \mathbb{N}$.