Lösungsvorschläge zur Klausur zum Kurs 01653
Einführung in die Theoretische Informatik A

Aufgabe 1

(1) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Für eine partielle Funktion $f :\subseteq A \to B$ und $X \subseteq A$ gilt $f[X] = \{b \in B \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = b\}$.
[ ]	[X]	Für jede partielle Funktion $f = (A, B, \rho)$ ist $f^{-1} = (B, A, \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\})$ eine partielle Funktion.
[X]	[ ]	Eine partielle Funktion $f = (A, B, \rho)$ heißt total, genau dann wenn $A = \mathrm{Def}(f)$ gilt.

(2) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[X]	[ ]	Es gilt $< x_1, x_2, x_3, x_4 >= \Pi^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
[X]	[ ]	Für alle $f :\subseteq \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ gilt: Wenn f aus g und h durch primitive Rekursion entsteht, dann ist f total.
[ ]	[X]	Für alle $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ gilt: $\tilde{\mu}(h)$ ist total

(3) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[X]	[ ]	Syntaktisch ist jedes WHILE-Programm ein LOOP-Programm.
[ ]	[X]	Jede WHILE-berechenbare Funktion ist auch LOOP-berechenbar.
[X]	[ ]	Jede LOOP-berechenbare Funktion ist auch primitiv rekursiv.
[ ]	[X]	Für jede berechenbare Wortfunktion $f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert eine Registermaschine M mit $f_M = f$.
[X]	[ ]	Für jede Funktion $f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ für die eine Turingmaschine M existiert, so dass $f_M = f$ gilt, existiert auch eine Bandmaschine M' mit $f_{M'} = f$.

(4) Welche der folgenden Funktionen $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist/sind berechenbar?

berechenbar	nicht ber.	
[ ]	[X]	$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ , falls } \varphi_n(n) = 0 \\ 0 \text{ , sonst} \end{cases}$
[X]	[ ]	$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ , falls } g_1(n) = g_2(n) \\ \text{div} \text{ , sonst} \end{cases}$ wobei $g_1, g_2 \in R^{(1)}$
[X]	[ ]	$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ , falls } \Phi_n(n) = n \\ 0 \text{ , sonst} \end{cases}$

(5) Welche der folgenden Mengen ist/sind rekursiv / rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv / nicht rekursiv-aufzählbar?

rekursiv	r.a., aber nicht rek.	nicht r.a.	
[ ]	[X]	[ ]	$\{n \mid n \in \mathrm{Bild}(\varphi_n)\}$
[X]	[ ]	[ ]	$\{n \mid \Phi_n(n) \leq n$ und $n \in \mathrm{Def}(\varphi_n)\}$
[ ]	[ ]	[X]	$\{n \mid n \notin \mathrm{Def}(\Phi_n)\}$
[ ]	[ ]	[X]	$\{< n, m > \mid \varphi_n = \varphi_m\}$
[X]	[ ]	[ ]	$\{n \mid f(n) = n\}$ wobei $f \in R^{(1)}$ gegeben ist.
[X]	[ ]	[ ]	$\mathrm{Def}(\varphi)$

(6) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv-aufzählbar. Dann ist auch jede Menge $B \subseteq A$ rekursiv-aufzählbar.
[X]	[ ]	Für alle $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$ gilt: Wenn A_1, A_2 rekursiv sind, dann ist auch $\mathbb{N} \backslash (A_1 \cup A_2)$ rekursiv.
[X]	[ ]	Für alle Mengen A und alle Funktionen $g \in R^{(1)}$ gilt: $g^{-1}[\mathrm{Bild}(cf_A)]$ ist rekursiv.

Aufgabe 2

Wir geben nur die Nummern der Definitionen an. Die nötigen Formulierungen können dann an der entsprechenden Stelle im Kurstext nachgelesen werden.

(a) Siehe Text und Def. 1.3.2

(b) Def. 3.1.1.1

(c) Def. 3.1.3.1

(d) Def. 5.3.2.4

(e) Def. 5.3.3.3

(f) Def. 7.1.1

(g) Def. 9.3.4

(h) Def. 10.1.10

Aufgabe 3

(i) (a) Satz 8.2.6
    (b) Satz 9.3.7

(ii) (a) $A = \mathrm{Def}(f)$ für $f \in P$
    (b) $A = \emptyset$ oder ($A = \mathrm{Bild}(g)$ für $g \in R^{(1)}$)
    (c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists t)\ (x, t) \in B\}$ für ein rekursives $B \subseteq \mathbb{N}^2$

(iii) (a) $P = \{f \mid f = f_M$ für eine RM $M\}$ (Def. 9.2.1)

(b) $P = \{f \mid f = \mathrm{AC}\circ\tau(P)\circ\mathrm{EC}$ für ein WHILE-Programm $P\}$ (Satz 9.2.5.1)

(c) $P = \{f \mid f = f_\mu$ für eine μ-rekursive Funktion $f_\mu\}$ (Satz 9.2.5.2)

(d) $P = \{f \mid \nu_\Sigma f \nu_\Sigma^{-1}$ berechenbar $\}$

Weiterhin sind Charakterisierungen über Markov-Algorithmen, λ-definierbare Funktionen oder durch Gleichungssysteme im Kurs vorgestellt worden.

Aufgabe 4

(a) Seien $P := (R1 : P1)$, $P1 := (R1 : P2)$ und $P2 := R0+$.

(b) Es gilt:

$$\begin{array}{llll}
(B1) & \forall a,b,t. & \lambda(P2)^t(a,b,0,\ldots) & = (a+t,b,0,\ldots) \\
(B2) & \forall a,b. & \lambda(P1)(a,b,0,\ldots) & = (a+b,b,0,\ldots) \\
(B3) & \forall a,b,t. & \lambda(P1)^t(a,b,0,\ldots) & = (a+tb,b,0,\ldots) \\
(B4) & \forall a,b. & \lambda(P)(a,b,0,\ldots) & = (a+b^2,b,0,\ldots)
\end{array}$$

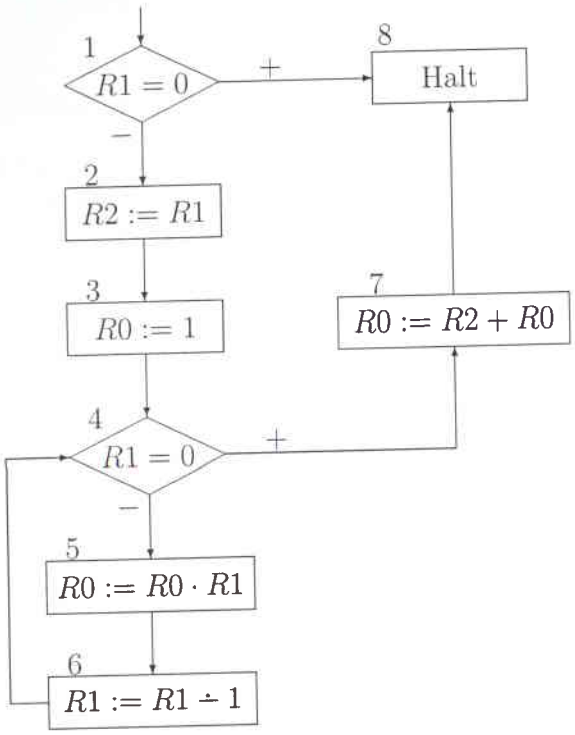
(B1) zeigt man mit Induktion nach t, (B2) mit (B1), (B3) mit Induktion nach t und (B4) mit (B3).
Aus (B4) folgt $\mathrm{AC}\circ\lambda(P)\circ\mathrm{EC}(a) = \mathrm{AC}\circ\lambda(P)(0,a,0,\ldots) = \mathrm{AC}(a^2,0,\ldots) = a^2$.

Aufgabe 5

Sei $g(a,<b,c>,<d,e,f>) = (a^2d + b^2d + 2abe + 2acd + dc^2 + 2eab, a^2e + 2abd + b^2e + 2aec + 2bcd + c^2e, f)$ für alle $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$. Dann ist g berechenbar und es gilt $f(a,\nu_{\mathbb{Z}}(b),\nu_{\mathbb{Q}}(c)) = \nu_{\mathbb{Q}}g(a,b,c)$ für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$, wie sich durch nachrechnen überprüfen lässt. Somit ist f $(\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\nu_{\mathbb{Z}},\nu_{\mathbb{Q}},\nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbar.

Aufgabe 6

(a) Sei R durch das folgende Flussdiagramm F gegeben:



(b) Es gilt:

(B1) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, b > 0. \quad (4, (a, b, c, 0, \ldots)) \overset{*}{\vdash} (4, (a \cdot b!, 0, c, 0, \ldots))$

Beweis per Induktion nach b:

$b = 1 \qquad (4, (a, 1, c, 0, \ldots)) \vdash (5, (a, 1, c, 0, \ldots)) \vdash (6, (a \cdot 1, 1, c, 0, \ldots))$

$\vdash (4, (a, 0, c, 0, \ldots)) = (4, (a \cdot 1!, 0, c, 0, \ldots))$

$b \to b + 1: \quad (4, (a, b + 1, c, 0, \ldots)) \overset{3}{\vdash} (4, (a \cdot (b + 1), b, c, \ldots))$

$\underset{\text{IV}}{\overset{*}{\vdash}} (4, (a \cdot (b + 1)b!, 0, c, 0, \ldots)) = (4, (a \cdot (b + 1)!, 0, c, 0, \ldots))$

Mit (B1) folgt für $n > 0$:

$$
\begin{aligned}
(1, (0, n, 0, \ldots)) &\overset{3}{\vdash} (4, (1, n, n, 0, \ldots)) \\
&\underset{(B1)}{\overset{*}{\vdash}} (4, (n!, 0, n, 0, \ldots)) \\
&\vdash (7, (n!, 0, n, 0, \ldots)) \\
&\vdash (8, (n! + n, 0, n, 0, \ldots)) \\
&= (8, (f(n), 0, n, 0, \ldots)).
\end{aligned}
$$

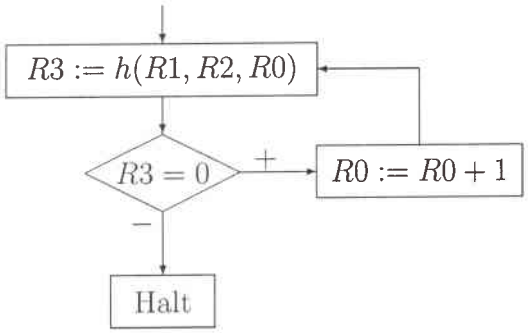
Für $n = 0$ ergibt sich:

$(1, (0, n, 0, \ldots)) \vdash (8, (f(0), n, 0, \ldots))$.

Somit ist $f_R(n) = \mathrm{AC} \circ f_T \circ \mathrm{EC}(n) = \mathrm{AC}((f(n), 0, \ldots)) = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

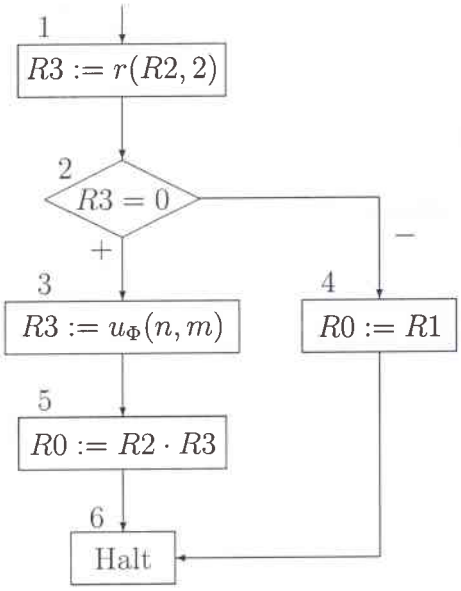
Aufgabe 7

(a) Es ist $u_\Phi(i, x) = \mu t[h(i, x, t) \neq 0]$, da aus $h(i, x, t) \neq 0$ folgt, dass $\Phi_i(x) \leq t$ (und $x \in \mathrm{Def}(\Phi_i)$). Die folgende verallgemeinerte Registermaschine berechnet dann u_Φ :



(b) Sei $f(n, m) := \begin{cases} m \cdot \Phi_n(m) & \text{falls } m \text{ gerade} \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$

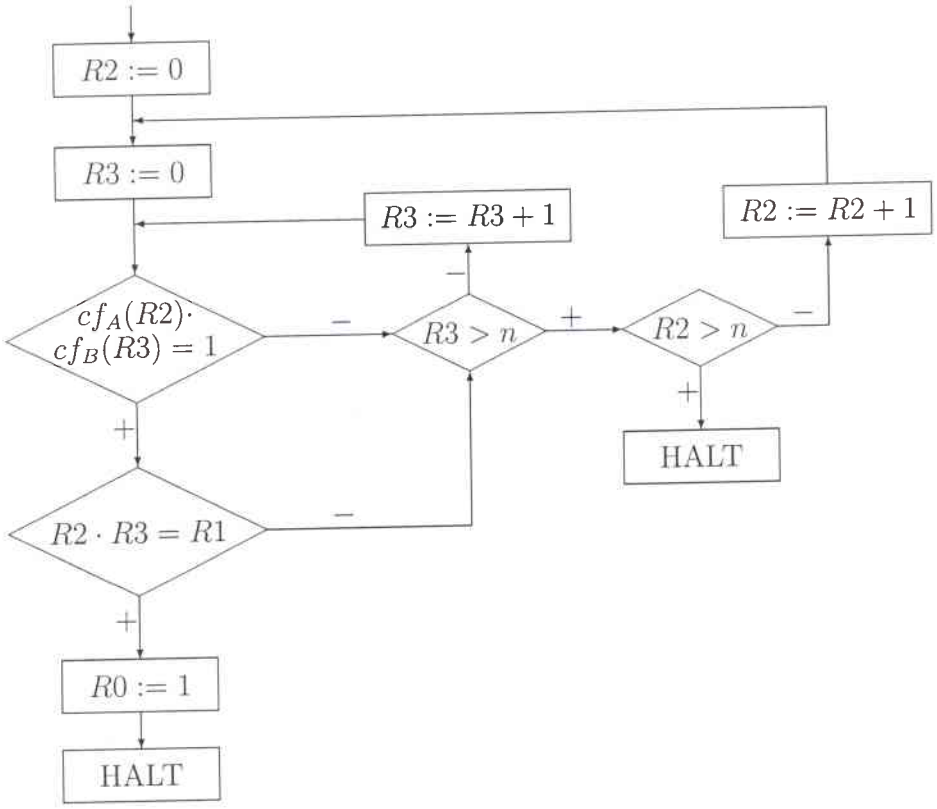
Die folgende verallgemeinerte Registermaschine M berechnet f:



Die Funktion r in Marke 1 ist das r aus Satz 3.2.4.10. Die Funktion u_Φ ist nach Teil (a) berechenbar. Somit kommen im Flussdiagramm von M nur berechenbare Tests und Funktionen vor. Da M offensichtlich f berechnet, ist f berechenbar.
Nach dem smn-Theorem gibt es nun ein $r \in R^{(1)}$, so dass $\varphi_{r(n)}(m) = f(n, m)$
$= \begin{cases} m \cdot \Phi_n(m) & \text{falls } m \text{ gerade} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 8

(a) Folgende verallgemeinerte Registermaschine berechnet die charakteristische Funktion von $A \cdot B$. Da A und B rekursiv sind, kommen nur berechenbare Funktionen und Tests vor.



(b) Es gilt $\varphi^{-1}\{f\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = f\}$. Weiterhin gilt $\{f\} \neq \emptyset$ und $\{f\} \neq P^{(1)}$. Nach dem Satz von Rice ist $\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = f\}$ somit nicht rekursiv. Wäre $\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = f\}$ endlich, dann wäre die Menge rekursiv. Widerspruch.