1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur vom 18. März 2006

Es sollten Ihnen 9 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 3 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1653 erhalten Sie, wenn Sie

- in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen und zusätzlich mindestens 25% der insgesamt möglichen Punktzahl in den Einsendeaufgaben erreicht haben.

Die Benutzung von Hilfsmitteln (wie z.B. des Kurstextes) ist nicht erlaubt!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben links Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen.

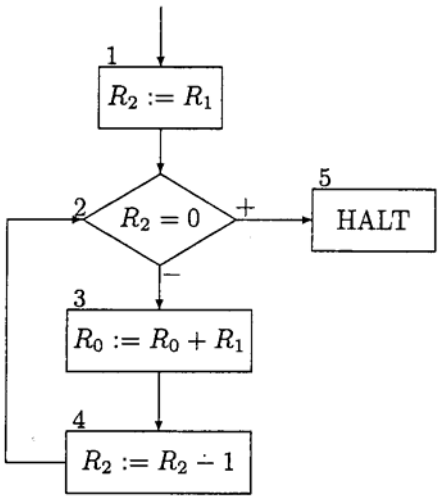
Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.
Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich – etwa in drei Wochen – zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei durch das folgende Flussdiagramm gegeben:



(a) *(6 Punkte)* Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \leq z \Longrightarrow$$
$$\mathrm{ES}^{3n}(2, (x, y, z, 0, ...)) = (2, (x + n \cdot y, y, z \dot{-} n, 0, ...)).$$

(b) *(2 Punkte)* Folgern Sie aus (a), dass $f_M(a) = a^2$ für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(7 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(a, b) := a \dot{-} b$. Geben Sie ein WHILE–Programm P mit $\tau(P) = f$ an. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht notwendig.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Es sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $\lg(w)$ die Länge von w. Dann sei die Wortfunktion $f : (\Sigma^*)^2 \longrightarrow \Sigma^*$ definiert durch

$$f(u, v) := 1^{\lg(u) \cdot \lg(v)} \text{ für alle } u, v \in \Sigma^*.$$

Zeigen Sie durch Angabe des Flussdiagramms einer geeigneten Turingmaschine, dass f berechenbar ist. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.

Aufgabe 4 *(15 Punkte)*

Bei dieser Aufgabe dürfen Sie den im Anhang angegebenen Satz 7.2.2 benutzen.

(a) *(4 Punkte)* Es sei $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$h(x, y, z) := x \cdot z + y + 1 \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist.

(b) *(5 Punkte)* Es sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x, y) := x \cdot \left(\sum_{i=0}^{y} i \right) \text{ für alle } x \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass f ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

(c) *(6 Punkte)* Es sei $\mathrm{sqrt} :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{sqrt}(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{falls } \exists\, y \in \mathbb{N}.\, x = y^2 \\ \mathrm{div} & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass sqrt μ–rekursiv ist. Benutzen Sie dabei nicht Satz 7.3.2, sondern verwenden Sie ausschließlich die Definition der μ–rekursiven Funktionen und bekannte primitiv–rekursive Funktionen. (Hinweis und Tipp: Außer den Funktionen aus Satz 7.2.2 dürfen Sie auch die Betragsfunktion verwenden; d. h., Sie dürfen benutzen, dass $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(x, y) := |x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

primitiv-rekursiv ist.)

Aufgabe 5 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie, dass es eine Zahl $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_{j_0}\langle n, i\rangle = \varphi_n\langle i, j_0\rangle + 1.$$

(Tipp: Rekursionssatz)

Um nachzuweisen, dass eine Zahlenfunktion berechenbar ist, genügt es im Folgenden, z.B. eine geeignete verallgemeinerte Registermaschine zu skizzieren (ein formaler Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich).

Aufgabe 6 *(12 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{\langle i, x\rangle \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(x) \text{ existiert und } \varphi_i(x) = \varphi_x(i)\}$$

rekursiv-aufzählbar ist.

(b) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass A nicht rekursiv ist.
(Tipp: Selbstanwendbarkeitsproblem)

(c) *(2 Punkt)* Ist die Menge A unendlich?

Aufgabe 7 *(11 Punkte)*

Sei eine Nummerierung $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen definiert durch $\mathrm{Def}(\nu) := \{\langle i, j, k\rangle \mid k \neq 0\}$ und $\nu\langle i, j, k\rangle := (i - j)/k$. Zeigen Sie:

(a) *(5 Punkte)* Die Menge $\{1\} \subseteq \mathbb{Q}$ ist ν-rekursiv-aufzählbar.

(b) *(6 Punkte)* Die partielle Funktion $f :\subseteq \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definiert durch $f(x) := 1/x$, ist (ν, ν)-berechenbar.

Aufgabe 8 *(12 Punkte)*

Es sei $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ die Cauchy-Darstellung der reellen Zahlen. Beantworten Sie die folgenden Fragen (jeweils mit Begründung).

(a) *(2 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$, falls $x \neq 0$, und $f(x) = 1$, falls $x = 0$. Ist f (ρ, ρ)-berechenbar?

(b) *(5 Punkte)* Sei $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$, falls $x \neq 0$, und $f(x) = \mathrm{div}$, falls $x = 0$. Ist f (ρ, ρ)-berechenbar?

(c) *(3 Punkte)* Sei a eine rationale Zahl. Ist a ρ-berechenbar?

(d) *(2 Punkte)* Gibt es eine reelle Zahl, die nicht ρ-berechenbar ist?

Anhang

Definition 5.3.3 (primitive Rekursion, μ–Rekursion)

(a) Es sei $Q(x)$ eine Eigenschaft, in der eine natürliche Zahl x als Parameter vorkommt. Dann sei

$$\mu x[Q(x)] := \begin{cases} \min M & \text{falls } M := \{k \in \mathbb{N} \mid Q(k)\} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Für Funktionen $g :\subseteq \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ sei die Substitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.

(c) Es seien $g : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}$$

(für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion.*

(d) Es sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine totale Funktion. Dann sei die Funktion $\tilde{\mu}(h) :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$\tilde{\mu}(h)(\bar{x}) = \mu y[h(\bar{x}, y) = 0]$$

für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$. Man sagt, $\tilde{\mu}(h)$ entsteht aus h durch *μ–Rekursion.*

Definition 7.2.1 (primitiv–rekursive Funktionen)
Wir nennen

$$\mathrm{Gr} := \{\tilde{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\}$$

die Menge der *primitiv–rekursiven Grundfunktionen* (die in der Menge Gr enthaltenen Funktionen sind weiter unten nochmals definiert).

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *primitiv–rekursiv*, genau dann, wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge Gr durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub und Prk erzeugen läßt.

Satz 7.2.2 (einige primitiv–rekursive Funktionen)
Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:

(a) $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

(b) $s : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe).

(c) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(d) $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(e) $m : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Definition 7.3.1 (μ–rekursive Funktionen)
Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt μ–rekursiv, gdw. sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge $\mathrm{Gr} := \{\tilde{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\}$ durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub, Prk und $\tilde{\mu}$ erzeugen lässt.

Satz 7.3.2 (μ–rekursiv = berechenbar)
Die μ–rekursiven Funktionen sind genau die berechenbaren Zahlenfunktionen.

Satz 8.3.8 (Rekursionssatz)
Zu jeder Funktion $f \in \mathrm{R}^{(1)}$ gibt es eine Zahl n mit $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Definition 10.1.3 (ν-rekursiv–aufzählbar, (ν_1, ν)-berechenbar)

(a) Eine Menge $X \subseteq M$ heißt ν-rekursiv–aufzählbar, g.d.w. es eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

$$g(i) \begin{cases} \text{existiert} & \text{falls } \nu(i) \in X \\ =\uparrow & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\text{für alle } \ i \in \mathrm{Def}(\nu)\,).$$

(b) Eine Funktion $f :\subseteq M_1 \to M$ heißt (ν_1, ν)-berechenbar, g.d.w. es eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

$$f \circ \nu_1(i) = \nu \circ g(i) \quad \text{für alle } \ i \ \text{ mit } \ \nu_1(i) \in \mathrm{Def}(f). \tag{1}$$

Wenn (1) gilt, sagt man "g ist eine (ν_1, ν)–Realisierung von f" und "f ist eine (ν_1, ν)–Spur von g".

Definition 10.4.3

(a) Eine *Darstellung* einer Menge M ist eine surjektive Funktion $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M$.

(b) Es seien $\delta_0 :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M_0$ und $\delta_1 :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow M_1$ Darstellungen. Eine Funktion $f :\subseteq M_1 \longrightarrow M_0$ heißt (δ_1, δ_0)–berechenbar, gdw. es eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ gibt mit

$$f \circ \delta_1(p) = \delta_0 \circ g(p)$$

für alle p mit $\delta_1(p) \in \mathrm{Def}(f)$.

(c) Eine Zahl $x \in M_0$ heißt δ_0-berechenbar, g.d.w. es eine (nullstellige) berechenbare Funktion $g : \{()\} \to \Sigma^\omega$ gibt mit $x = \delta_0 \circ g()$.

Definition 10.4.6 (Cauchy–Darstellung)
Die Cauchy–Darstellung $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \rho(p) = x :\Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt } u_0, u_1, \ldots \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{rat}}), \text{ so dass } p = u_0\sharp u_1\sharp\ldots, \\ & \text{und } (\forall k \in \mathbb{N})\, |x - \nu_{\mathrm{rat}}(u_k)| \leq 2^{-k} \end{aligned}$$