Kurs 1653 — Einführung in die Theoretische Informatik A

Lösungsvorschläge zur zweiten Klausur am 21. 03. 2004

Aufgabe 1

(a) Es treffen alle drei Behauptungen zu.

(b) Die zweite Behauptung lässt sich durch vollständige Induktion nach der außen stehenden Variablen beweisen. Wir führen dies aus:

Induktionsanfang $n = 0$:

Es sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{3\cdot 0}(1,(0,x,0,\dots)) &= (1,(0,x,0,\dots)) \text{ (da } \mathrm{ES}^0 = \mathrm{id}) \\ &= \left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-0}^{x} i, x \dot{-} 0, 0, \dots)\right). \end{aligned}$$

Also trifft die Behauptung in diesem Falle zu.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

Es sei $x \in \mathbb{N}$, und es gelte $x \geq n+1$. Dann gilt sowohl

$$(*) \quad x \geq n$$

als auch

$$(**) \quad x \dot{-} n \neq 0.$$

Wegen $(*)$ liefert die Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{ES}^{3\cdot n}(1,(0,x,0,\dots)) = \left(1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \dots)\right).$$

Mit $(**)$ ergibt sich zudem

$$\begin{aligned} & \mathrm{ES}^3\left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \dots)\right) \\ = & \left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-n}^{x} i + (x \dot{-} n), x \dot{-} n \dot{-} 1, 0, \dots)\right) \\ = & \left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-(n+1)}^{x} i, x \dot{-} (n+1), 0, \dots)\right), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\mathrm{ES}^{3\cdot(n+1)}(1,(0,x,0,\dots)) = \left(1,(\sum_{i=x+1-(n+1)}^{x} i, x \dot{-} (n+1), 0, \dots)\right),$$

was zu zeigen war.

(c) Die Behauptung (3) aus (a) ergibt sich aus (2), indem man x für n setzt. Mit (3) folgt

$$(\forall x)\, \mathrm{ES}^{3\cdot x+1}\,(1,(0,x,0,\dots)) = \left(4,(\sum_{i=1}^{x} i, 0, 0, \dots)\right).$$

Gemäß Ein–/Ausgabecodierung der (verallgemeinerten) Registermaschinen folgt

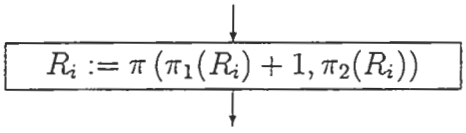
$$f_M(x) = \sum_{i=1}^{x} i$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

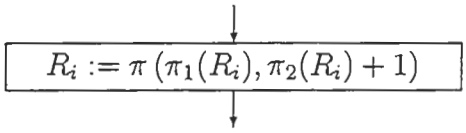
Aufgabe 2

Wir geben jeweils geeignete Funktionen durch Befehle verallgemeinerter Registermaschinen mit berechenbaren Funktionen und Tests an:

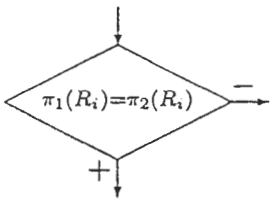
1. F_i^+ :



2. F_i^- :



3. F_i^0 :



Es handelt sich durchweg um totale Funktionen und Tests. Damit ist klar, dass das Gewünschte geleistet wird.

Aufgabe 3

(a) Wir beweisen Behauptung 2 durch vollständige Induktion nach $n = \lg(w)$.

$\underline{n = 0:}$ In diesem Fall ist $w = \varepsilon$, und mit $t := 3$ erhalten wir durch leichte Rechnung für alle $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$:

$$\mathrm{ES}^t\,(3, (vB\varepsilon, c, u)) = (7, (v, B, cu)) = \left(7, (v, B, b^{\lg(\varepsilon)}cu)\right).$$

Also gilt die Behauptung in diesem Fall.

$\underline{n \to n+1:}$ Sei nun $\lg(w) = n + 1$. Dann gibt es $w' \in \Sigma^*$ und $d \in \Sigma$, so dass $w = w'd$. Es gilt nun für alle $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$

$$\mathrm{ES}^3\,(3, (vBw, c, u)) = (3, (vBw', b, cu)),$$

und zwar sowohl im Falle $d = a$, als auch im Falle $d = b$. Es ist $\lg(w') = n$. Wir wenden jetzt die Induktionsvoraussetzung auf w' an, und zwar mit b anstelle von c und cu anstelle von u. Danach existiert ein $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^{t'}\,(3, (vBw', b, cu)) = \left(7, (v, B, b^{\lg(w')}bcu)\right) = \left(7, (v, B, b^{\lg(w)}cu)\right).$$

Setzen wir $t := 3 + t'$, dann folgt

$$\mathrm{ES}^t\,(3, (vBw, c, u)) = \left(7, (v, B, b^{\lg(w)}cu)\right).$$

Dies war zu zeigen.

(b) Sei $w \in \Sigma^*$ gegeben. Für $v = u = \varepsilon$ und $c = B$ liefert Behauptung 1 die Existenz eines $t \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^t\,(1, (\varepsilon, B, wB)) = (3, (Bw, B, \varepsilon)).$$

Für $v = u = \varepsilon$ und $c = B$ liefert Behauptung 2 die Existenz eines $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^{t'}\,(3, (Bw, B, \varepsilon)) = \left(7, (\varepsilon, B, b^{\lg(w)}B)\right).$$

Es folgt

$$\mathrm{ES}^{t+t'}\,(1, (\varepsilon, B, wB)) = \left(7, (\varepsilon, B, b^{\lg(w)}B)\right).$$

Unter Berücksichtigung der Ein-/Ausgabecodierung für Bandmaschinen ist damit $f_M = f$ gezeigt.

Aufgabe 4

Es sei $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Vorgängerfunktion; d. h., es gilt $V(0) = 0$ und $V(n+1) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Alphabet Σ besitzt (nur) die Standardnummerierung ν_Σ, die definiert ist durch $\nu_\Sigma(n) := a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann

$$\nu_\Sigma^{-1} g \nu_\Sigma(0) = \nu_\Sigma^{-1} g(\varepsilon) = \nu_\Sigma^{-1}(\varepsilon) = 0$$

sowie

$$\nu_\Sigma^{-1} g \nu_\Sigma(n+1) = \nu_\Sigma^{-1} g(a^{n+1}) = \nu_\Sigma^{-1}(a^n) = n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\nu_\Sigma^{-1} g \nu_\Sigma = V$. Da V berechenbar ist, ergibt sich mit Satz 7.1.9 die Berechenbarkeit von g.

Aufgabe 5

(a) f erfüllt die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$\begin{array}{lclcl} f(x,0) & = & x^0 & = & 1 \\ f(x,y+1) & = & x^{y+1} & = & f(x,y) \cdot y \end{array}$$

Es sei daher $g := Z$ und $h : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $h(x,y,z) := z \cdot y$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f = \mathrm{Prk}(g,h)$.

Es bleibt zu zeigen, dass h primitiv–rekursiv ist. Dies gilt aber wegen

$$h = \mathrm{Sub}\left(m, \mathrm{pr}_3^{(3)}, \mathrm{pr}_2^{(3)}\right),$$

wobei m die Multiplikation ist.

(b) Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt *μ–rekursiv,* gdw. wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge Gr der primitiv–rekursiven Grundfunktionen durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub, Prk und $\widetilde{\mu}$ erzeugen lässt.

Aufgabe 6

(a) Wir nehmen an, die Menge J ist rekursiv. Dann definieren wir eine Funktion $h :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$h(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_n(n) = \mathrm{div} \\ \mathrm{div} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$h(n) = \begin{cases} \mathrm{cf}_J(n) & \text{falls } n \in J \\ \mathrm{div} & \text{falls } n \notin J. \end{cases}$$

Daraus kann man sofort eine verallgemeinerte Registermaschine mit berechenbaren Funktionen und Tests ableiten, die die Berechenbarkeit von h zeigt. Also gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $h = \varphi_i$.

<u>Fall 1: $i \in J$.</u> Dann gilt $h(i) = 1$ nach Definition von h. Andererseits gilt aber wegen $h = \varphi_i$:

$$h(i) = \varphi_i(i) = \mathrm{div}.$$

Dies ist ein Widerspruch.

<u>Fall 2: $i \notin J$.</u> Dann gilt $h(i) = \mathrm{div}$ nach Definition von h. Andererseits gilt aber, wiederum wegen $h = \varphi_i$:

$$h(i) = \varphi_i(i) \neq \mathrm{div}.$$

Auch dies ist ein Widerspruch.

Damit ergibt sich in beiden möglichen Fällen ein Widerspruch. D. h., die Annahme ist falsch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) Wir definieren

$$F := \{f \in P^{(1)} \mid (\exists y)\, f(y) = \mathrm{div}\}.$$

Offenbar gilt dann

$$I = \varphi^{-1}[F].$$

Es ist einerseits $F \neq \emptyset$, denn es gibt nichttotale berechenbare einstellige Funktionen (z. B. die nirgends definierte Funktion), und andererseits $F \neq P^{(1)}$, denn es gibt natürlich auch totale berechenbare einstellige Funktionen (z. B. die konstanten Funktionen). Nach dem Satz von Rice ist I nicht rekursiv.

Aufgabe 7

(a) A *ist* rekursiv–aufzählbar. Es gilt nämlich

$$A = m^{-1}[K_\varphi],$$

wobei m die Multiplikation ist. Da m berechenbar und K_φ rekursiv–aufzählbar ist und die rekursiv–aufzählbaren Mengen unter Urbild–Bildung bzgl. berechenbarer Funktionen abgeschlossen sind, ergibt sich die Behauptung.

(b) B ist *nicht* rekursiv–aufzählbar. Das Komplement von B ist nämlich das Halteproblem K_φ^0. Diese Menge ist lt. Kurs rekursiv–aufzählbar, aber nicht rekursiv. Wäre nun B rekursiv–aufzählbar, dann würde nach Satz 9.2.6 des Kurses folgen, dass K_φ^0 rekursiv ist. Also ist B nicht rekursiv–aufzählbar.

Aufgabe 8

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\nu_{C2}(n) \in \Delta \iff \pi_1(n) = \pi_2(n).$$

Es sei also $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi_1(n) = \pi_2(n) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist, wie man schnell mit Hilfe einer geeigneten verallgemeinerten Registermaschine zeigt, g eine totale berechenbare Funktion. Es folgt, dass Δ ν_{C2}–rekursiv ist.

(b) Es sei $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$h(i,n) := (\varphi_i(n))^2 = (u_\varphi(i,n))^2$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Da wegen des utm–Theorems (u. a.) $h \in P^{(2)}$ gilt, liefert das smn–Theorem eine Funktion $g \in R^{(1)}$ mit

$$\varphi_{g(i)}(n) = (\varphi_i(n))^2 \text{ für alle } i, n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt

$$\mathrm{sq}\,(\varphi_i(n)) = (\varphi_i(n))^2 = \varphi_{g(i)}(n) \text{ für alle } i, n \in \mathbb{N},$$

und dies genau war zu zeigen.

IHRE KURSBETREUER

P.S.: Leider haben sich in den Lösungshinweisen zu Aufgabe 5 (a) einige kleine Fehler eingeschlichen. Daher haben wir hier nochmals eine korrigierte Version angefügt:

f erfüllt die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$\begin{array}{lclcl} f(x,0) & = & x^0 & = & 1 \\ f(x,y+1) & = & x^{y+1} & = & f(x,y)\cdot x \end{array}$$

Es sei daher $g := c_1^{(1)}$ und $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert durch $h(x,y,z) := z \cdot x$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f = \mathrm{Prk}(g,h)$. Es bleibt zu zeigen, daß h primitiv-rekursiv ist. Dies gilt aber wegen

$$h = \mathrm{Sub}\big(m, \mathrm{pr}_3^{(3)}, \mathrm{pr}_1^{(3)}\big),$$

wobei m die Multiplikation ist.

Telefonzentrale	+49 2331 987-01
Zentraler Telefaxeingang	+49 2331 987-316
Internet	http://www.informatik.fernuni-hagen.de/thi1/
Buslinien	515, 527, 534
Haltestelle	Fernuniversität