# Einführung in die Theoretische Informatik A
# Lösungshinweise zur Klausur am 17.03.01

## Aufgabe 1

a) $P = ((R_1 : (R_1-; R_0+)); (R_2 : (R_2-; R_0+)))$ leistet das Gewünschte.

b) Wir zeigen zunächst per Induktion nach $x$:

$\forall x \forall y \forall z.(\min\{t \mid \tau((R_1-; R_0+))^t(z, x, y, 0, ...)(1) = 0\} = x)$
$\wedge \tau((R_1-; R_0+))^x(z, x, y, 0, ...) = (z + x, 0, y, 0, ...)$

IA $(x = 0)$ : Es gilt $\tau((R_1-; R_0+))^0(z, x, y, 0, ...) = (z + x, 0, y, ...)$
$= (z + 0, 0, y, ...)$

IS $(x \rightsquigarrow x + 1)$ : Es gilt $\tau((R_1-; R_0+))^1(z, x + 1, y, 0, ...) = (z + 1, x, y, 0, ...)$

und somit nach Induktionsbehauptung:

$\tau((R_1-; R_0+))^t(z, x + 1, y, 0, ...)(1) > 0$ für $0 \leqq t \leqq x$
und weiter
$\tau((R_1-; R_0+))^{t+1}(z, x + 1, y, 0, ...)$
$= \tau((R_1-; R_0+))^t(z + 1, x, y, 0, ...)$
$= (z + 1 + x, 0, y, 0, ...)$

Völlig analog zeigt man ebenfalls

$\forall y \forall x \forall z.(\min\{t \mid \tau((R_2-; R_0+))^t(z, x, y, 0, ...)(2) = 0\} = y)$
$\wedge \tau((R_2-; R_0+))^y(z, x, y, 0, ...) = (z + y, x, y, 0, ...)$.

Mit $Q := (R_1 : (R_1-; R_0+))$ und $Q' := (R_2 : (R_2-; R_0+))$ folgt somit $\forall y \forall x \forall z.\tau(Q)(z, x, y, 0, ...) = (z+x, 0, y, 0, ...)$ und $\forall y \forall x \forall z.\tau(Q')(z, x, y, 0, ...) = (z + y, x, 0...)$,

insgesamt also

$\tau(P)(0, x, y, 0, ...) = \tau(Q') \circ \tau(Q)(0, x, y, 0, ...) = \tau(Q')(x, 0, y, 0, ...)$
$= (x + y, 0, 0, ...)$.

## Aufgabe 2

a) Man kann eine solche Numerierung leicht durch Konkatenation einer Standardnumerierung und der Semantikfunktion von LOOP-Programmen definieren.

Wir definieren $\Psi : \mathbb{N} \to LOOP$ hier aber mittels der Standardnumerierung $\varphi$ von $P^{(1)}$ und Satz 7.12 (Rechenzeitsatz).

Sei $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ die berechenbare Funktion aus Lemma 8.4, d.h.

$$h(i,n,t) = \begin{cases} 1 + \varphi_i(n), \text{falls } \Phi_i(n) \leqq t \\ 0, \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $\Psi$ definiert durch $\Psi\langle i,c,n\rangle(x) = h(i,x,c \cdot A_n(x) + c) \dot{-} 1$ für alle $i,c,n,x \in \mathbb{N}$.

Aus dem Rechenzeitsatz folgt nun sofort, dass das Bild von $\Psi$ tatsächlich LOOP ist.

Die Berechenbarkeit von $u_\Psi$ folgt sofort aus der Berechenbarkeit von $h$, $A(n,x) := A_n(x)$ und den Projektionen der Umkehrung der Cantorschen Tupelfunktion.

b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(x) = \max\{u_\Psi(i,y) \mid i,y \leqq x\} + 1$.

Aus der Berechenbarkeit von $u_\Psi$ folgt die Berechenbarkeit von $f$.

Sei nun $r \in LOOP$ gegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r = \Psi_n$. Für alle $x \geqq n$ gilt nun

$$\begin{aligned} f(x) &= \max\{u_\Psi(i,y) \mid i,y \leqq x\} + 1 \\ &\geqq u_\Psi(n,x) + 1 \\ &> r(x). \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

Sei $f \in R^{(1)}$ gegeben. Wir zeigen, dass zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geqq n_0$ existiert mit $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Sei hierzu $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben. Sei $h \in P^{(1)}$ gegeben, so dass $\forall j.(j < n_0 \Rightarrow h \neq \varphi_j)$. Sei weiter $i \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i = h$ gewählt und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(n) = \begin{cases} i, \text{falls } n < n_0 \\ f(n), \text{sonst} \end{cases}$$

(für alle $n \in \mathbb{N}$). Offensichtlich gilt $g \in R^{(1)}$ und es existiert somit nach dem Rekursionssatz (8.10) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n = \varphi_{g(n)}$.

Nehmen wir nun an, $n$ sei kleiner als $n_0$. Dann ist $\varphi_{g(n)} = \varphi_i = h$ und nach Definition von $h$ : $h = \varphi_n$ im Widerspruch zu $\varphi_n \neq h$. Somit gilt $n \geqq n_0$ und weiter $\varphi_n = \varphi_{g(n)} = \varphi_{f(n)}$.

## Aufgabe 4

Wir zeigen zunächst Teil c):

Sei eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}, A \neq \emptyset$ und $A$ rekursiv gegeben. Sei $A$ zunächst endlich, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0 < a_1 < ... < a_n$ mit $\{a_0, ..., a_n\} = A$.

Offensichtlich leistet dann $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(i) = \begin{cases} a_i, \text{falls } i \leqq n \\ a_n, \text{sonst} \end{cases}$

das Gewünschte.

Sei nun $A$ nicht endlich. Dann existiert nach Satz 9.4 eine wachsende, also auch monotone, Funktion $f \in R^{(1)}$ mit $Bild(f) = A$.

Sei umgekehrt eine monotone Funktion $f \in R^{(1)}$ gegeben. Falls $Bild(f)$ endlich ist, so ist $Bild(f)$ auch rekursiv. Sei also $Bild(f)$ nicht endlich. Mit $f$ ist dann auch die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $h(0) = 0, h(n+1) = \min\{m \mid m > h(n) \wedge f(m) > f(h(n))\}$, berechenbar. Weiter gilt offensichtlich $Bild(f \circ h) = Bild(f)$. Da $f \circ h$ wachsend ist, folgt die Behauptung aus Satz 9.4.

b) Sei $f$ beschränkt. Dann ist $Bild(f)$ endlich und somit rekursiv. Somit existiert nach Teil c) eine monotone, berechenbare Funktion $g$ mit $Bild(g) = Bild(f)$.

a) Nehmen wir an, die Aussage sei korrekt. Nach Satz 9.10 (1) existiert dann zu jeder r.a. Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine monotone Funktion $f \in R^{(1)}$ mit $Bild(f) = A$. Nach Teil c) wäre somit jede r.a. Menge auch rekursiv. In Satz 9.14 wurde aber gezeigt, dass es r.a. Sprachen gibt, die nicht rekursiv sind (Bsp. $K_\varphi$). Widerspruch.

## Aufgabe 5

Sei $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ die berechenbare Funktion aus Lemma 8.4, d.h.

$$h(i, n, t) = \begin{cases} 1 + \varphi_i(n), \text{falls } \Phi_i(n) \leqq t \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{für alle } i, n, t \in \mathbb{N}).$$

Sei weiter $B := \{\langle i, j, \langle u, v_1 \rangle, v \rangle \mid v \geqq v_1 \wedge h(i, u, v) = h(j, u, v)\}$.

Aus der Berechenbarkeit von $h$ folgt die Berechenbarkeit von $cf_B$, also die Rekursivität von $B$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_i = \varphi_j &\Leftrightarrow \forall u.\varphi_i(u) = \varphi_j(u) \\
&\Leftrightarrow \forall u[(\forall v_1.h(i,u,v_1) = h(j,u,v_1) = 0) \vee (\exists v.h(i,u,v) = h(j,u,v) > 0)] \\
&\Leftrightarrow \forall u \forall v_1 \exists v.(v \geqq v_1 \wedge\ h(i,u,v) = h(j,u,v)) \\
&\Leftrightarrow \forall \langle u, v_1 \rangle \exists v. \langle i, j, \langle u, v_1 \rangle, v \rangle \in B
\end{aligned}$$

und somit $\ddot{A}q = \{(i,j) \mid \forall u \exists v. \langle i,j,u,v \rangle \in B\}$.

## Aufgabe 6

Wir zeigen zunächst für $\nu_{\Sigma^*}$, definiert durch $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2$ :

(*) $\forall n.\nu_{\Sigma^*}(n) = \nu(n+1)$.

Beweis: Sei $\nu_{\Sigma^*}(n) = a_K a_{K-1} ... a_0$ mit $a_i \in \{0,1\}$. Dann gilt $n = \sum_{i=0}^{K}(a_i+1)2^i$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
n+1 &= \sum_{i=0}^{K}(a_i+1)2^i + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{K} 2^i + 1 + \sum_{i=0}^{K} a_i 2^i \\
&= 2^{K+1} + \sum_{i=0}^{K} a_i 2^i,
\end{aligned}$$

also auch $\nu(n+1) = a_K a_{K-1} ... a_0$.

a) Nach Lemma 7.4 ist $\nu_{\Sigma^*}$ surjektiv, also auch $\nu$ nach (*).

b) Seien $f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) = n \dot{-} 1, h(n) = n+1$.

Offensichtlich sind $f$ und $g$ berechenbar und es gilt

$$\nu_{\Sigma^*} \circ f(n) = \nu_{\Sigma^*}(n \dot{-} 1) = \begin{cases} \varepsilon, \text{falls } n = 0 \\ \nu(n), \text{sonst} \end{cases},$$

$\nu \circ h(n) = \nu(n+1) = \nu_{\Sigma^*}(n)$.

Da $\nu(0) = \varepsilon$ folgt hieraus $\nu_{\Sigma^*} \circ f = \nu$ und $\nu \circ h = \nu_{\Sigma^*}$, also $\nu_{\Sigma^*} \equiv \nu$.