Allgemeine Hinweise zur Klausur:

Bitte beachten Sie den Anhang. Sie dürfen in dieser Klausur ohne Beweis voraussetzen, dass die im Anhang (Satz 3.5) aufgeführten Funktionen berechenbar sind.

Aufgabe 1 *(15 Punkte)*

a) Geben Sie ein WHILE-Programm P an, das die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$, berechnet, d.h.

$$f = AC \circ \tau(P) \circ EC$$

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass das von Ihnen in a) gewählte WHILE-Programm das Gewünschte leistet.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

Bezeichne LOOP die Menge der einstelligen LOOP-berechenbaren Funktionen.

a) Definieren Sie explizit eine Numerierung $\Psi : \mathbb{N} \to LOOP$, so dass die universelle Funktion $u_\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $u_\Psi(i, x) = \Psi_i(x)$, berechenbar ist. (Begründung)

(8 Punkte)

b) Geben Sie eine berechenbare Funktion $f \in R^{(1)}$ an, die schneller wächst als jede LOOP-berechenbare Funktion, und beweisen Sie dies für f.

Hierbei wächst eine Funktion f schneller als eine Funktion g, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f(x) > g(x)$ für alle $x \geq n$.

(7 Punkte)

Aufgabe 3 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie:

Zu jeder Funktion $f \in R^{(1)}$ gibt es unendlich viele Zahlen n mit $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Aufgabe 4 *(15 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? (Beweisen Sie Ihre Antwort)

a) Zu jeder berechenbaren Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert eine monotone, berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $Bild(f) = Bild(g)$.

(5 Punkte)

b) Zu jeder berechenbaren, beschränkten Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert eine monotone, berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $Bild(f) = Bild(g)$.

(5 Punkte)

c) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}, A \neq \emptyset$ ist genau dann rekursiv, wenn eine monotone, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $Bild(f) = A$ existiert.

(5 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt hierbei monoton, falls für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $i \leqq j \Rightarrow f(i) \leqq f(j)$. Wir nennen f beschränkt, falls ein $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f(i) \leqq c$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 *(15 Punkte)*

Zeigen Sie:

Es existiert eine rekursive Menge B, so dass

$$\ddot{A}q = \{(i, j) \mid (\forall u \exists v)(\langle i, j, u, v\rangle \in B)\}.$$

Aufgabe 6 *(15 Punkte)*

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $\nu : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ wie folgt definiert:

$\nu(0) := \varepsilon$ und für $n > 0$ sei

$\nu(n) := a_{k-1}a_{k-2}...a_0$ (mit $a_i \in \{0, 1\}$ für $0 \leqq i \leqq k-1$), falls $n = 2^k + \Sigma_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$.

a) Zeigen Sie, dass ν eine Numerierung von Σ^* ist.

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie für eine Standardnumerierung ν_{Σ^*} von Σ^* : $\nu_{\Sigma^*} \equiv \nu$.

(10 Punkte)

ANHANG

Satz 3.5 Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t sind berechenbar.

(1) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}, \tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).

(2) $Z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).

(3) $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).

(4) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(5) $pr_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow, pr_i^{(k)}(x_1, ..., x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).

(6) $f(x_1, ..., x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

(7) $f(x, y) := x + y$ (Summe).

(8) $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(9) $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).

(10) $q, r : \subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = div$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).

(11) $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).

(12) $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).

(13) $max(x, y)$.

(14) $min(x, y)$.

(15) $t(x) := (1$ falls x Primzahl, 2 sonst).

(16) $f(x) :=$ die x-te Primzahl.

(17) $t(x, y) := (1$ falls $x < y, 2$ sonst). (Entsprechend für $\leq, =, \geq, >, \neq$ anstelle von $<$.)

(18) Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A, 1$ sonst).

(19) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar. $f(x) :=$ (die kleinste Zahl y mit $g(y) = x$ falls $x \in Bild(g), div$ sonst).

(20) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelte $(\forall y) g(y) < g(y + 1)$. Dann sei $f(x) := max\{y \mid g(y) \leq x\}$.

Definition 5.10

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei R_i eine Kurzschreibweise für die Zeichenreihe $R0\ldots0$ (R gefolgt von i Nullen).

a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sind R_i+ und R_i- WHILE–Programme.

b) Wenn die Zeichenreihen P und Q WHILE–Programme sind und $i \in \mathbb{N}$ ist, dann sind auch

$$(P;Q)$$
$$(R_i \mid P \mid Q)$$
$$(R_i : P)$$

WHILE–Programme.

c) Keine anderen Zeichenreihen sind WHILE–Programme.

Definition 7.2

Es sei Σ ein Alphabet, $n := \text{card}\ (\Sigma)$. Es sei $a : \{1, ..., n\} \longrightarrow \Sigma$ eine Bijektion (eine *Ordnungsfunktion*). Wir schreiben $a_i := a(i)$. Es sei $\sigma : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &:= 0 \\ \sigma(a_{i_k} a_{i_{k-1}} ... a_{i_1} a_{i_0}) &:= i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + ... + i_1 n + i_0 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}, i_0, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$. Dann heißt $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma^*$, definiert durch $\nu := \sigma^{-1}$, eine Standardnumerierung von Σ^*.

Lemma 8.4

Die wie folgt definierte Funktion $h : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ ist berechenbar.

$$h(i, n, t) = \begin{cases} 1 + \varphi_i(n) & \text{falls } \Phi_i(n) \text{ existiert und } \Phi_i(n) \leq t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 9.18

Es sei $d :\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $d(i) = div$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(1) Für jedes $f \in P^{(1)} \setminus \{d\}$ sind die Mengen $M_f := \{i \mid \varphi_i = f\}$ und $\mathbb{N} \setminus M_f = \{i \mid \varphi_i \neq f\}$ nicht r.a.

(2) Die Mengen Äq $:= \{(i, j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$ und $\mathbb{N}^3 \setminus$ Äq $= \{(i, j) \mid \varphi_i \neq \varphi_j\}$ sind nicht r.a.