Lösungshinweise zur Klausur 1653/1657 vom 20. Februar 2010

Aufgabe 1 *(12 Punkte)*

Es wird jede **richtig beantwortete Frage mit 1 Punkt**, jede **falsch beantwortete Frage mit -1 Punkt** und jede nicht beantwortete Frage mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können für jede Teilaufgabe nur nicht negative Punktzahlen erzielt werden.

Um eine Frage zu beantworten, kreuzen Sie das entsprechenden Kästchen in der Zeile an. Falls Sie eine Frage nicht beantworten wollen, dann machen Sie bitte kein Kreuz in der Zeile.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihre Lösung für diese Aufgabe abzugeben!

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Jede wortberechenbare Funktion ist auch zahlenberechenbar. **Falsch:** Die Vorbereiche von zahlenberechenbaren und wortberechenbaren Funktionen unterscheiden sich.
[ ]	[X]	Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar genau dann, wenn es eine Maschine M mit $f_M = f$ gibt. **Falsch:** In der Definition wird eine Registermaschine gefordert. Zu beliebigem $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kann man eine Maschine M mit $f = f_M$ definieren.
[ ]	[X]	Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv-aufzählbar genau dann, wenn die Funktion $df_M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad df_M(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in M \\ \text{div} & \text{sonst} \end{cases}$ existiert. **Falsch:** Wenn diese Funktion berechenbar ist, so ist M rekursiv aufzählbar. Die Existenz alleine reicht nicht.
[ ]	[X]	Alle Nummerierungen von Σ^* sind bijektiv. **Falsch:** Für eine Nummerierung ist nur Surjektivität gefordert. Lediglich die im Kurstext eingeführten Standardnummerierungen sind bijektiv.
[X]	[ ]	Eine Zahlenfunktion ist genau dann berechenbar, wenn sie μ-rekursiv und WHILE-berechenbar ist. **Korrekt:** Satz 4.4.4 (KE 2) und Satz 6.3.2 (KE 4).
[X]	[ ]	Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv-aufzählbar genau dann, wenn die Funktion $d_M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. d_M(n) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } n \in M \\ \text{div} & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar ist. **Korrekt:** Nach Definition ist eine Menge M r.a. wenn $M = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion f gilt. Mit f ist aber auch d_M berechenbar, da $d_M(n) = 2^n + f(n) \dot{-} f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Welche der folgenden Mengen ist rekursiv, rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv, nicht rekursiv aufzählbar?

rekursiv	r.a. \ rekursiv	nicht r.a.	
[X]	[ ]	[ ]	$\{(i,x) \mid \Phi_i(x) < i \cdot x\}$ **rekursiv:** Dies folgt sofort aus dem Φ-Theorem.
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid \varphi_i(x) < i \cdot x\}$ **r.a.:** Dies folgt aus dem utm-Theorem. **nicht rekursiv:** Mittels Diagonalisierung: Angenommen, die Menge ist rekursiv. Dann ist die Funktion f, definiert durch $f(i) = i^2 + cf(i,i) \dot{-} 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ebenfalls berechenbar, wobei cf die charakteristische Funktion der obigen Menge bezeichne. Somit gilt $f = \varphi_i$ für ein $i > 0$ und weiter $f(i) < i^2 \Leftrightarrow \varphi_i(i) < i^2 \Leftrightarrow cf(i,i) = 1 \Leftrightarrow f(i) = i^2$. Widerspruch.
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid \Phi_i(x) > i \cdot x\}$ **r.a.:** Dies folgt aus Lemma 7.2.3. **nicht rekursiv:** Wenn die Menge rekursiv wäre, so wäre auch $M = \{(i,x) \mid \Phi_i(x) \text{ definiert}, \Phi_i(x) \neq i \cdot x\}$ rekursiv. Die charakteristische Funktion von K_φ wäre somit wegen $cf_{K_\varphi}(i) = cf_M(i,i) + cf_N(i,i)$ (für alle $i \in \mathbb{N}$)berechenbar, wobei nach dem Φ-Theorem die Menge $N = \{(i,x) \mid \Phi_i(x) = i \cdot x\}$ rekursiv ist.
[ ]	[ ]	[X]	$\{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_{i+j}\}$ **nicht r.a.:** Wähle ein i so dass φ_i total ist. Mit der angegebenen Menge wäre auch $M_\varphi = \{j \mid \varphi_j = \varphi_i\}$ rekursiv aufzählbar, da die Menge $\{j < i \mid \varphi_j = \varphi_i\}$ endlich und damit r.a. ist. Dies steht im Widerspruch zu Satz 8.3.9.
[ ]	[ ]	[X]	$\{(i,j) \mid \Phi_i(i+j) = \varphi_{i+j}(i)\}$ **nicht r.a.:** Sei i mit φ_i die nirgends definierte Funktion. Nach dem smn- und utm-Theorem existiert dann ein $r \in R^{(1)}$ mit $\varphi_{r(j)}(x) = \text{div} \Leftrightarrow \varphi_j(j)$ existiert nicht (für alle $x, j \in \mathbb{N}$). Es gilt somit für alle j mit $r(j) \geq i$: $j \in \mathbb{N} \setminus K_\varphi$ gdw. $(i, r(j) \dot{-} i)$ ist in der angegebenen Menge. Den Fall $r(j) < i$ kann man leicht durch eine Wertetabelle abhandeln. Insgesamt erhält man eine Reduktion von $\mathbb{N} \setminus K_\varphi$ auf die angegebene Menge.
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid \Phi_i(x) \text{ ist Primzahl}\}$ **r.a.:** Dies folgt aus Lemma 7.2.3. **nicht rekursiv:** Man kann jedes Bandprogramm so manipulieren, dass für alle Eingaben gilt: Wenn das Bandprogramm hält, so ist der Wert der Schrittzahlfunktion eine Primzahl. Anders ausgedrückt: Es existiert eine totale rekursive Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass $\varphi_i = \varphi_{r(i)}$ und $\Phi_i(x)$ ist entweder nicht definiert oder eine Primzahl (für alle $i, x \in \mathbb{N}$). D.h. r liefert uns eine Reduktion von K_φ auf die angegebenen Menge.

Aufgabe 2 *(8 Punkte, je 2 pro Teilaufgabe)*

Geben Sie Definitionen an für:

(i) die Eingabekodierung einer k-stelligen Registermaschine: Definition 3.1.1 (KE 1).

(ii) primitiv-rekursive Funktionen: Definition 6.2.1 (KE 4).

(iii) entscheidbare Mengen: Definition 3.2.3 (KE 1).

(iv) Nummerierung einer Menge M: Definition 6.1.1 (KE 4).

Aufgabe 3 *(6 Punkte, je 3 pro Teilaufgabe)*

Formulieren Sie

(i) das Φ-Theorem: Satz 7.2.7 (KE 5).

(ii) den Äquivalenzsatz von Rogers: Satz 7.4.4 (KE 5).

Aufgabe 4 *(16 Punkte)*

Gegeben sei das folgende While-Programm P:

$$((\text{WHILE } R_1 \neq 0 \text{ DO } ((R_1-; R_2+); R_0+); (\text{WHILE } R_2 \neq 0 \text{ DO } (R_2-; R_0+)))$$

(i) Welche einstellige Funktion $AC \circ \tau(P) \circ EC$ wird von P berechnet. (3 Punkte)

(ii) Zeigen Sie Ihre Aussage aus Teil (i). (13 Punkte)

Lösung:

(i) Sei $f = AC \circ \tau(P) \circ EC$. Dann gilt $f(n) = 2 \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei im Folgenden Q_1 das While-Programm

$$Q_1 = \text{WHILE } R_1 \neq 0 \text{ DO } ((R_1-; R_2+); R_0+)$$

und Q_2 das While-Programm

$$Q_2 = \text{WHILE } R_2 \neq 0 \text{ DO } (R_2-; R_0+)).$$

Man zeigt zunächst per Induktion nach t:

$$\forall t \in \mathbb{N}. \forall r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{N}. \tau(((R_1-; R_2+); R_0+))^t(r_0, r_1, r_2, 0, ...) = (r_0+t, r_1 \dot{-} t, r_2+t, 0, ...)$$

Hieraus folgt nun sofort

$$\begin{aligned} \tau(Q_1) &= \tau((\text{WHILE } R_1 \neq 0 \text{ DO } ((R_1-; R_2+); R_0+))(0, r_1, 0, 0, ...) \\ &= \tau(((R_1-; R_2+); R_0+))^{r_1}(0, r_1, 0, 0, ...) \\ &= (r_1, 0, r_1, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

für alle $r_1 \in \mathbb{N}$. Weiter zeigt man per Induktion nach t:

$$\forall t \in \mathbb{N}. \forall r_0, r_2 \in \mathbb{N}. \tau((R_2-; R_0+))^t(r_0, 0, r_2, 0, 0, ...) = (r_0 + t, 0, r_2 \dot{-} t, 0, 0, ...)$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned} \tau(Q_2) &= \tau(((\text{WHILE } R_2 \neq 0 \text{ DO } (R_2-; R_0+)))(r_1, 0, r_1, 0, ...) \\ &= \tau((R_2-; R_0+))^{r_1}(r_1, 0, r_1, 0, ...) \\ &= (r_1 + r_1, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

für alle $r_1 \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= AC \circ \tau(P) \circ EC(x) = AC \circ \tau(P)(0, x, 0, 0, ...) \\ &= AC \circ \tau(Q_2) \circ \tau(Q_1)(0, x, 0, 0, ...) = AC \circ \tau(Q_2)(x, 0, x, 0, 0, ...) \\ &= AC(2 \cdot x, 0, 0, ...) = 2 \cdot x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass es nicht berechenbare Funktionen gibt.

Lösung:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(i) = 0$, falls $\varphi_i(i) = 1$ und $f(i) = 1$, sonst (für alle $i \in \mathbb{N}$). Behauptung: f ist nicht berechenbar.
Beweis: Wenn f berechenbar wäre, so gäbe es i mit $\varphi_i = f$, da φ eine Nummerierung der berechenbaren, einstelligen Funktionen ist. Dann gilt aber weiter

$$f(i) = 1 \Leftrightarrow \varphi_i(i) = 1 \Leftrightarrow f(i) = 0$$

im Widerspruch zu $f(i) \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 6 *(14 Punkte)*

Sei Σ ein endliches Alphabet. Geben Sie eine bijektive Funktion $f : (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$ an, so dass für alle $g : (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$ gilt: g ist berechenbar genau dann wenn die Funktion $g' : \Sigma^* \to \Sigma^*$, definiert durch $g'(f(w)) = g(w)$ für alle $w \in (\Sigma^*)^k$, berechenbar ist. (Beweis)

Lösung:
Sei ν_Σ eine Standardnummerierung von Σ^*. Definieren wir nun f mittels $f(w_1, ..., w_k) = \nu_\Sigma(\pi^{(k)}(\nu_\Sigma^{-1}(w_1), ..., \nu_\Sigma^{-1}(w_k))$, d.h. $f = \nu_\Sigma \circ \pi^{(k)} \circ \vec{\nu_\Sigma}^{-1}$, so sind die Bedingungen in der Aufgabenstellung erfüllt: Die Bijektivität von f folgt aus der Bijektivität der Funktionen ν_Σ und $\pi^{(k)}$. Sei weiter $g : (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$ gegeben. Dann gilt nach Lemma 4.2.4 und Satz 6.1.6:

$$\begin{aligned} g \text{ berechenbar} &\Leftrightarrow \nu_\Sigma^{-1} \circ g \circ \vec{\nu_\Sigma} \text{ berechenbar} \Leftrightarrow \nu_\Sigma^{-1} \circ g \circ \vec{\nu_\Sigma} \circ (\pi^{(k)})^{-1} \text{ berechenbar} \\ &\Leftrightarrow \nu_\Sigma \circ \nu_\Sigma^{-1} \circ g \circ \vec{\nu_\Sigma} \circ (\pi^{(k)})^{-1} \circ \nu_\Sigma^{-1} \text{ berechenbar} \\ &\Leftrightarrow g \circ (\nu_\Sigma \circ \pi^{(k)} \circ \vec{\nu_\Sigma}^{-1})^{-1} = g \circ f^{-1} \text{ berechenbar.} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 *(14 Punkte)*

Zeigen Sie:
Es gibt eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_{f(i,j)}(j) = (\varphi_i(j))^2$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Insbesondere existiert $f(i,j)$, falls $\varphi_i(j)$ existiert.

Lösung:
Sei $g :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $g(i,j) = (\varphi_i(j))^2$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Nach dem utm-Theorem ist g berechenbar, so dass nach dem smn-Theorem eine berechenbare, totale Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi_{r(i)}(j) = g(i,j)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ existiert. Definieren wir nun f durch $f(i,j) = r(i)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi_{f(i,j)}(j) = \varphi_{r(i))}(j) = (\varphi_i(j))^2$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Mit r ist auch f berechenbar.

Aufgabe 8 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie:
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn es eine berechenbare Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

a) $\forall i, j \in \mathbb{N}.(f(i)$ existiert und $f(j)$ existiert und $i < j) \Rightarrow f(i) < f(j)$ und

b) $f(\mathbb{N}) = A$.

Lösung:
Sei A rekursiv aufzählbar. Nach Definition existiert dann eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass $\mathrm{Def}(g) = A$. Mit g ist auch die Funktion $f \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(i) = i + g(i) \dot{-} g(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, berechenbar. Es gilt nun

$$A = \mathrm{Def}(g) = \mathrm{Def}(f) = f(\mathbb{N}).$$

Ferner ist Bedingung (a) erfüllt, da f eine Einschränkung der Identitätsfunktion auf $\mathbb{N}$ ist.

Sei nun f eine berechenbare Funktion mit den Eigenschaften (a) und (b) aus der Aufgabenstellung. Dann ist die Funktion $g :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(j, \langle i, x, t\rangle) = |1 + j - h(i, x, t)|$ (für alle $j, i, x, t \in \mathbb{N}$) berechenbar, wobei h die berechenbare Funktion aus Lemma 7.2.1 sei. Es folgt $A = f(\mathbb{N}) = \mathrm{Def}(\tilde{\mu}(g))$. Somit ist A rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 9 *(14 Punkte, je 7 pro Teilaufgabe)*

a) Zeigen Sie, dass die Menge $K = \{i \in \mathbb{N} \mid \forall x \in \mathbb{N}.\varphi_i(x) = x\}$ nicht rekursiv ist.

b) Ist K r.a. ? (Beweis)

Lösung:

a) Es gilt $K = \varphi^{-1}(\{id\})$, wobei id die Identitätsfunktion auf $\mathbb{N}$ bezeichne. Die Behauptung folgt somit aus dem Satz von Rice.

b) K ist nicht r.a.: Da $id \neq d$, wobei d die nirgends definierte Funktion ist, kann man – analog zum ersten Teil – Satz 8.3.9 anwenden.

Mit Hilfe des Hinweises kann man dies aber auch direkt durch eine Reduktion $\mathbb{N} \setminus K_\varphi \leq K$ zeigen. Hieraus folgt dann mit Satz 8.3.1 und Satz 8.3.5 die Behauptung. Sei $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(i,t) = \begin{cases} t+1 & \text{falls } \Phi_i(i) \leq t \\ t & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem Φ-Theorem ist g berechenbar und somit existiert nach dem smn-Theorem eine Funktion $f \in R^{(1)}$ mit $\varphi_{f(i)}(j) = g(i,j)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Es gilt nun

$$i \in \mathbb{N} \setminus K_\varphi \Leftrightarrow \forall t.\neg(\Phi_i(i) \leq t) \Leftrightarrow \forall t.g(i,t) = t \Leftrightarrow f(i) \in K$$

f gibt uns somit die gewünschte Reduktion.