Einführung in die Theoretische Informatik A
Lösungshinweise zur Klausur am 08.02.2003

Aufgabe 1

a) $f_M(n) = 2n + 2$

b) Wir zeigen per Induktion zunächst

$(*)$ $\forall x \forall y \exists t. \quad ES^t(1, (y, x, 0, 0, \ldots)) = (4, (y + 2x + 2, 0, \ldots))$

IA: $(x = 0)$
Es gilt $ES^3(1, (y, 0, 0, \ldots)) = (4, (y + 2, 0, \ldots))$

IS: $(x \rightsquigarrow x + 1)$
Es gilt $ES^4(1, (y, x + 1, 0, \ldots)) = (1, (y + 2, x, 0, \ldots))$.
Mit $y' = y + 2$ existiert nach Induktionsbehauptung ein $t \in \mathbb{N}$ mit

$$ES^t(1, (y', x, 0, \ldots)) = (4, (y' + 2x + 2, 0, \ldots)).$$

Setzt man nun $t' = t + 4$ so folgt insgesamt

$$ES^{t+4}(1, (y, x + 1, 0, \ldots)) = (4, (y + 2 + 2x + 2, 0, \ldots))$$

q.e.d.

Setzt man nun in $(*)$ $y = 0$, so folgt die Behauptung aus Teil a).

Aufgabe 2

a) $\pi^{(n)}$ bezeichne wie im Kurstext die n-stellige Cantorsche Tupelfunktion. Die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ definiert durch

$$f(x) = ([\pi^{(\pi_1^{(2)}(x)+1)}]^{-1}(\pi_2^{(2)}(x))$$

leistet dann das Gewünschte.
Wir zeigen hier nur, dass f bijektiv ist. Die Berechenbarkeit von F wird dann in Teil b) gezeigt.
Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Dann gilt zunächst $\pi_1^{(2)}(x) = \pi_1^{(2)}(y)$

und weiter wegen der Injektivität von $\pi^{(n)}$: $\pi_2^{(2)}(x) = \pi_2^{(2)}(y)$, insgesamt also $x = y$.
Sei nun ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ für ein $n > 0$ gegeben. Dann gilt für $x = \pi(n-1, \pi^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)) : \quad f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$.

b) Hier gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, die Berechenbarkeit von F nachzuweisen. Wir nutzen hier Satz 7.3.2 und zeigen, dass F μ-rekursiv ist.

Zunächst benötigen wir einige Hilfsfunktionen:

(i) Sei $h_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$h_1(i, x) = [\pi_1^{(2)}]^{(i)}(x) = \underbrace{\pi_1^{(2)} \circ \pi_1^{(2)} \circ \ldots \circ \pi_1^{(2)}}_{i-fach}(x)$$

Es gilt

$$h_1(0, x) = x \text{ und } h_1(i+1, x) = \pi_1^{(2)}(h_1(i, x))$$

also

$$h_1 = \mathrm{Sub}(\mathrm{Prk}(pr_1^1, \mathrm{Sub}(\pi_1^{(2)}, pr_3^3)), pr_2^2, pr_1^2)$$

Mit $\pi_1^{(2)}$ ist also auch h_1 μ-rekursiv.

(ii) Sei $h_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$h_2(i, n, x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } i > n \\ pr_{i+1}^{(n+1)}[(\pi^{(n+1)})^{-1}(x)], & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } i > n \\ \pi_2^{(2)}(h_1(n-i, x)), & \text{falls } 1 \leq i \leq n \\ h_1(n, x), & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h_2(i, n, x) = \; & [1 \dot{-} (i \dot{-} n)](1 \dot{-} i) \cdot h_1(n, x) \\ & + [1 \dot{-} (i \dot{-} n)](1 \dot{-} (1 \dot{-} i))\pi_2^{(2)}(h_1(n \dot{-} i, x)) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 3.2.4 zeigt man somit sofort, dass mit h_1 auch h_2 μ-rekursiv ist.

Da $F(i, x) = h_2(i, \pi_1^{(2)}(x), \pi_2^{(2)}(x))$ folgt aus der μ-Rekursivität von h_2 die μ-Rekursivität von F.

Aufgabe 3

a) Für alle Alphabete Σ, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle Standardnumerierungen ν von Σ^* gilt

   (i) Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist genau dann (Zahlen-)berechenbar, wenn die Funktion $\nu \circ f \circ (\underbrace{\nu^{-1} \times \ldots \times \nu^{-1}}_{n-fach})$ (Wort-)berechenbar ist.

   (ii) Eine Funktion $h :\subseteq (\Sigma^*)^n \to \Sigma^*$ ist genau dann (Wort-)berechenbar, wenn die Funktion $\nu^{-1} \circ h \circ (\underbrace{\nu \times \ldots \times \nu}_{n-fach})$(Zahlen-)berechenbar ist.

b) Nein, die Aussage zu Teil a) gilt <u>nicht</u> für alle Numerierungen. Sei Σ ein endliches Alphabet und ν eine Standardnumerierung von Σ^*. Sei weiter $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige, totale, aber nicht berechenbare Funktion. Wir definieren nun eine Numerierung ν_f von $\mathbb{N}$, so dass f (ν_f, ν_f)-berechenbar ist, also $\nu \circ \nu_f \circ f \circ (\nu \circ \nu_f)^{-1}$ $(\nu \circ \nu_f, \nu \circ \nu_f)$-berechenbar ist.
Sei $\nu_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\nu_f < i, x >= f^{(i)}(x),$$

also insbesondere $\nu_f < 0, x >= x$. Somit ist ν_f eine Numerierung von $\mathbb{N}$. Weiter gilt für die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g < i, x >=< i+1, x >$:

$$\nu_f \circ g < i, x >= \nu_f < i+1, x >= f^{(i+1)}(x) = f(f^{(i)}(x)) = f \circ \nu_f < i, x >,$$

also ist f (ν_f, ν_f)-berechenbar.

Aufgabe 4

a) (i) Wir zeigen zunächst:
Falls f berechenbar ist, so ist die Funktion F_f (φ, φ)-berechenbar.
Sei $f \in P^{(2)}$ gegeben. Dann ist nach dem utm-Theorem die Funktion $f' :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f'(i, x) = f(\pi_1^{(2)}(u_\varphi(i, x)), \pi_2^{(2)}(u_\varphi(i, x)))$ berechenbar. Insbesondere ist die Funktion $x \mapsto f'(i, x)$ für festes i berechenbar und somit $F_f(P^{(1)}) \subseteq P^{(1)}$. Weiter existiert nach dem smn-Theorem ein $s \in R^{(1)}$ mit

$$\varphi_{s(i)}(x) = f'(i, x) \text{ für alle } i, x \in \mathbb{N}.$$

Aus der Definition von s folgt nun sofort

$$F_f \circ \varphi = \varphi \circ s$$

also ist F_f (φ, φ)-berechenbar.

(ii) Sei nun umgekehrt ein $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gegeben mit $F_f(P^{(1)}) \subseteq P^{(1)}$. Dann gilt insbesondere $F_f(\mathrm{id}) \in P^{(1)}$, d.h. die Funktion $< x, y > \mapsto f(x, y)$ ist berechenbar, was nach Lemma 5.2.4 äquivalent zur Berechenbarkeit von f ist.

b) Die hier angegebene Aussage gilt nicht:

Sei hierzu f definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \text{ und } x \in K_\varphi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(für alle $x, y \in \mathbb{N}$)

Nun gilt für alle $g \in P^{(1)}$ und $x \in \mathbb{N}$: $\hat{F}_f(g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } g(x) \in \mathbb{N} \\ \text{div}, & \text{sonst} \end{cases}$

Somit ist $\hat{F}_f(g) \in P^{(1)}$ und weiter nach dem utm-Theorem die Funktion $\hat{f} :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, x) \mapsto u_\varphi(i, x) - u_\varphi(i, x)$, berechenbar. Nach dem smn-Theorem existiert somit ein $s \in R^{(1)}$ mit $\hat{f}(i, x) = \varphi_{s(i)}(x)$ für alle i, $x \in \mathbb{N}$. Für dieses s gilt aber nun nach Definition

$$\hat{F}_f \circ \varphi = \varphi \circ s.$$

$\hat{F}_f$ ist also auch (φ, φ)-berechenbar. Nehmen wir nun weiter an, f sei berechenbar, dann ist aber auch die Funktion $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\chi(x) = f(x, x + 1)$ berechenbar und es gilt :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in K_\varphi, \text{ also } \chi = cf_{K_\varphi} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

im Widerspruch zu Satz 9.3.1.

(Bemerkung: Man kann einen Widerspruch auch leicht direkt mittels Diagonalisierung und einer entsprechenden Definition von f herbeiführen!)

Aufgabe 5

a) A_1 und A_4 enthalten Mengen, die rekursiv-aufzählbar aber nicht rekursiv sind, A_2 und A_3 enthalten solche Mengen nicht.

b) (i) Nach Satz 9.2.5 existiert ein $g \in R^{(1)}$ mit Bild $(g) = K_\varphi \neq \emptyset$. Mit g ist aber auch $f = \mathrm{Sub}(g, \pi^{(2)})$ berechenbar und es gilt

$$f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = g(\mathbb{N}) = K_\varphi$$

(aufgrund der Surjektivität von $\pi^{(2)}$). Die Behauptung folgt nun aus Satz 9.3.1.

(ii) $R^{(2)}$ enthält nur Funktionen $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, also gilt $A_2 = \emptyset$.

(iii) Wir zeigen, dass für jedes $L \in A_3$ gilt: L ist rekursiv. Sei $f \in R^{(1)}$ mit $f(n) \leq f(n+1)$ (für alle n) gegeben. Falls $f(\mathbb{N})$ endlich ist, so ist $f(\mathbb{N})$ rekursiv. Andernfalls gilt für $g = \mathrm{Prk}(c^0_{f(0)}, h)$ mit $h(y, z) = f(\mu t[f(t) \dot{-} z = 0])$: $g \in R^{(2)}$, $g(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N})$ und $g(n) < g(n+1)$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Die Behauptung folgt somit aus Satz 9.1.6.

(iv) Nach Satz 9.2.3 (3) und Definition gilt für alle $L \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$L \text{ r.a. } \Leftrightarrow L \in A_4 \Leftrightarrow \pi^{(2)}(L) \text{ r.a.}$$

Sei $g \in P^{(1)}$ gegeben mit $K_\varphi = \mathrm{Def}(g)$. Sei weiter $f = g \circ \pi^{(2)}$ und $L = \mathrm{Def}(f)$. Dann gilt $f \in P^{(1)}$ und $L = (\pi^{(2)})^{-1}(K_\varphi)$, also $L \in A_4$, da $\pi^{(2)}$ surjektiv ist. Nach Satz 9.1.8 wäre mit L auch $\pi^{(2)}(L) = K_\varphi$ rekursiv im Widerspruch zu Satz 9.3.1.

Aufgabe 6

a) f_+ ist nach Satz 3.2.4 berechenbar, also auch (id, id, id)-berechenbar. Ferner gilt $f_=(x,y) = 1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))$, also ist $f_=$ nach Satz 3.2.4 ebenfalls berechenbar. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 10.2.4 (3), da $\nu \equiv \mathrm{id}$.

b) Da wir f_+ als (ν, ν, ν)-berechenbar annehmen, existiert eine berechenbare Funktion $g :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$f_+ \circ \nu \times \nu(x,y) = \nu \circ g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathrm{Def}(\nu \times \nu)$. Seien weiter n_0 und n_1 so gewählt, dass $\nu(n_0) = 0$ und $\nu(n_1) = 1$ gilt.
Mit g ist auch die Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$r(x) = \begin{cases} n_0, & \text{falls } x = 0 \\ g(r(x-1), n_1), & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar. (Dies zeigt man leicht mittels verallgemeinerter Registermaschinen oder Satz 5.3.5.)

Es gilt nun für alle $x \in \mathbb{N}$:

$$\nu(r(x)) = \nu(g(0,x)) = x.$$

c) Da f_+ als (ν, ν, ν)-berechenbar angenommen wird, gilt $id \leq \nu$. Es existiert also nach Teil b) ein $r_1 :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\nu(r_1(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Da weiter $f_=$ als (ν, ν, id)-berechenbar vorausgesetzt wird, existiert eine berechenbare Funktion $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \nu(x) = \nu(y) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $r_2 :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $r_2 = \tilde{\mu}(\bar{h})$, wobei $\bar{h} :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert sei durch

$$\bar{h}(x,y) = 1 \dot{-} h(x, r_1(y))$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Mit h ist auch $\bar{h}$ berechenbar und somit auch r_2 (vgl. Satz 5.3.5). Weiter gilt

$$r_2(x) = \min\{y | \nu(r_1(y)) = \nu(x)\}$$

für alle $x \in Def(\nu)$. Nach Definition von r_1 gilt also $\nu(x) = id(r_2(x))$ für alle $x \in Def(\nu)$ und somit $\nu \leq id$.