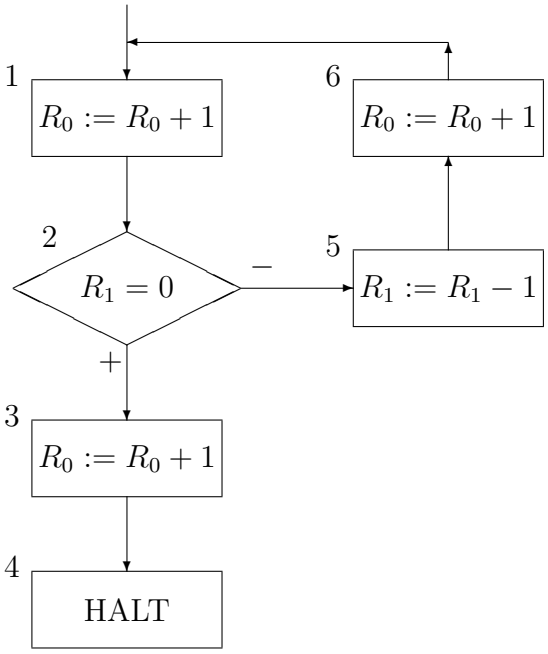
Einführung in die Theoretische Informatik A
Klausur Wintersemester 2002/03
08. Februar 2003

Bitte beachten Sie den Anhang. Sie dürfen in dieser Klausur ohne Beweis voraussetzen, dass die im Anhang (Satz 3.2.4) aufgeführten Funktionen berechenbar sind.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Die einstellige Registermaschine M sei durch das folgende Flussdiagramm gegeben:



a) Welche Funktion berechnet M ?

(3 Punkte)

b) Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teil a).

(12 Punkte)

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Sei $\mathbb{N}^+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ an, so dass die Funktion $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$F(i, f^{-1}(x_1, \ldots, x_n)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \geq n \\ x_{i+1}, & \text{sonst ,} \end{cases}$$

berechenbar ist.

(6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die in Teil a) definierte Funktion F (für die von Ihnen gewählte Funktion f) berechenbar ist.

(9 Punkte)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

a) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen berechenbaren Wortfunktionen und berechenbaren Zahlenfunktionen mittels Standardnumerierungen.

(5 Punkte)

b) Gilt ein solcher Zusammenhang (Teil a) auch für allgemeine (nicht notwendig Standard-) Numerierungen? (Beweis)

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (15 Punkte)

a) Zeigen Sie:

> Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist genau dann berechenbar, wenn $F_f(g) \in P^{(1)}$ für alle $g \in P^{(1)}$ und weiter $F_f : P^{(1)} \to P^{(1)}$ (φ, φ)-berechenbar ist. Hierbei sei $F_f(g) :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $g \in P^{(1)}$ definiert durch $F_f(g)(x) = f(\pi_1^{(2)}(g(x)), \pi_2^{(2)}(g(x)))$.

(8 Punkte)

b) Gilt a) auch noch, wenn in a) die Cantorsche Tupelfunktion weggelassen wird, d.h. zeigen oder widerlegen Sie:

> Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist genau dann berechenbar, wenn für alle $g \in P^{(1)}$ gilt $\hat{F}_f(g) \in P^{(1)}$ und weiter $\hat{F}_f : P^{(1)} \to P^{(1)}$ (φ, φ)-berechenbar ist. Hierbei sei $\hat{F}_f(g) :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $g \in P^{(1)}$ definiert durch $\hat{F}_f(g)(x) = f(g(x), g(x))$.

(7 Punkte)

Aufgabe 5 (15 Punkte)

a) Welche der folgenden Mengen enthält rekursiv-aufzählbare Mengen, die nicht rekursiv sind?

(i) $A_1 = \{f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid f \in R^{(2)}\}$

(ii) $A_2 = \{f^{-1}(0,0) \mid f \in R^{(2)}\}$

(iii) $A_3 = \{f(\mathbb{N}) \mid f \in R^{(1)} \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq f(n+1)\}$

(iv) $A_4 = \{Def(f) \mid f \in P^{(2)}\}$

(6 Punkte)

b) Zeigen Sie 3 Ihrer Aussagen aus Teil a).

(9 Punkte)

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Die Identität $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Numerierung von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie für alle Numerierungen ν von $\mathbb{N}$:

a) $\nu \equiv id \;\Rightarrow\;$ f_+ ist (ν, ν, ν)-berechenbar und $f_=$ ist (ν, ν, id)-berechenbar.
(5 Punkte)

b) f_+ ist (ν, ν, ν)-berechenbar $\Rightarrow id \leq \nu$.
(5 Punkte)

c) f_+ ist (ν, ν, ν)-berechenbar und $f_=$ ist (ν, ν, id)-berechenbar $\Rightarrow \nu \equiv id$.
(5 Punkte)

Hierbei seien $f_+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $f_= : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_+(x, y) = x + y \text{ und } f_=(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Anhang:

Satz 3.2.4 (berechenbare Zahlenfunktionen)
Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

1. $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}, \tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).
2. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion):
3. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion)
4. $V : \mathbb{N} :\to \mathbb{N}, V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion)
5. $pr_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, pr_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).
6. $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
7. $f(x, y) := x + y$ (Summe).
8. $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
9. $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).
10. $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \text{div}$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).
11. $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).
12. $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).
13. max (x, y).
14. min (x, y).
15. $t(x) := (1$ falls x Primzahl, 2 sonst).
16. $f(x) :=$ die x-te Primzahl.
17. $t(x, y) := (1$ falls $x < y, 2$ sonst). (Entsprechend für $\leq, =, \leq, >, \neq$ anstelle von $<$.)
18. Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A, 1$ sonst).
19. Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar. $f(x) :=$ (die kleinste Zahl y mit $g(y) = x$ falls $x \in$ Bild (g), div sonst):
20. Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelte $(\forall y) g(y) < g(y + 1)$. Dann sei $f(x) := \max \{y \mid g(y) \leq x\}$.