**1653 Einführung in die Theoretische Informatik A**
**Klausur am 9. Februar 2002**

Es müssen Ihnen 9 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 8 Aufgaben,
- 3 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausur-Unterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 3 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 1654 erhalten Sie, wenn Sie in dieser Klausur mindestens 36 der möglichen 90 Punkte erreichen.

Als Hilfsmittel sind nur Papier und Schreibzeug zugelassen. Die Benutzung anderer Hilfsmittel wie z.B. Kurstext etc. ist nicht erlaubt! Bitte benutzen Sie keinen Bleistift zum Schreiben.

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an.
Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte möglichst nach Aufgaben sortiert, beginnend mit dem Deckblatt und der Bescheinigung für das Finanzamt, zusammen. Die Vorbemerkungen, die Aufgabenblätter und der Anhang brauchen nicht abgegeben zu werden.

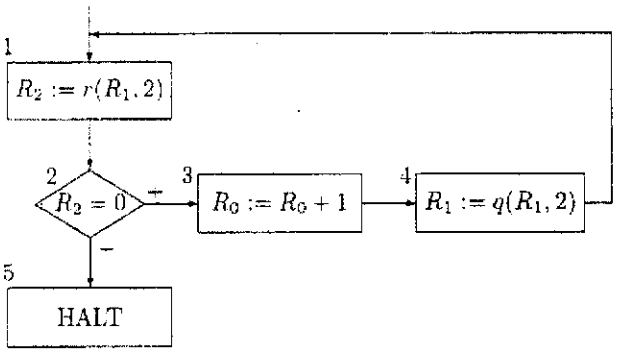
Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.
Wir senden Ihnen die korrigierten Aufgaben so rasch wie möglich – etwa in drei Wochen – zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

**Aufgabe 1** *(13 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine $M$ sei durch das folgende Flussdiagramm gegeben:




Dabei seien $q$ und $r$ die berechenbaren Funktionen aus Satz 3.5(10); siehe Anhang.
Sei außerdem $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die durch

$$f(n) := \begin{cases} \text{div.} & \text{falls } n = 0, \\ \max\{m \in \mathbb{N} \mid 2^m \text{ teilt } n\}, & \text{falls } n > 0, \end{cases}$$

definierte Funktion mit Definitionsbereich $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) *(8 Punkte)*
Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über $t$, dass für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$r(n, 2^t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\mathrm{ES}^{4t}(1, (0, n, 0, 0, 0, \ldots)) \\ &= (1, (t, n/2^t, 0, 0, 0, \ldots)). \end{aligned}$$

(b) *(5 Punkte)*
Folgern Sie aus der Aussage in (a), dass $f_M = f$ gilt.

**Aufgabe 2** *(10 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Funktionen $f$ und $g$ primitiv-rekursiv sind. Geben Sie dazu an, wie man $f$ und $g$ mittels der Operatoren Sub und Prk – d.h. durch Substitution und primitive Rekursion– aus den primitiv-rekursiven Grundfunktionen und den nach Satz 7.10 primitiv-rekursiven Funktionen gewinnen kann; siehe Anhang.

(a) *(6 Punkte)*
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 3^x$.

(b) *(4 Punkte)*
$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(x, y) = (3^x)^y$.

HK 2002

**Aufgabe 3** *(10 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Wir definieren eine Funktion $g :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $\mathrm{Def}(g) = \Sigma^* \setminus \{0\}^*$ durch

$$g(w) := \begin{cases} \text{div.} & \text{falls } w \in \{0\}^*, \\ \text{der Rest des Wortes } w \text{ ab der letzten } 1. & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt, wenn $w$ mindestens eine 1 enthält und $l$ die Zahl der Nullen am Ende von $w$ ist, dann soll $g(w) = 10^l = 1\underbrace{0\ldots0}_{l}$ sein.

Geben Sie graphisch das Flussdiagramm einer Bandmaschine an, die die Funktion $g$ berechnet. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.

**Aufgabe 4** *(10 Punkte)*

Sei einerseits $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion aus Aufgabe 1 und $h :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch:

$$h(n) := 2^{f(n)}$$

Das heißt, es ist $h(0) = \text{div}$, und für $n > 0$ ist $h(n)$ die maximale Zweierpotenz, die $n$ teilt.
Sei andererseits $\Sigma := \{0, 1\}$ und $g :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Funktion aus Aufgabe 3. Definieren Sie eine Simulationsrelation $\mathrm{Sim} \subseteq \mathbb{N} \times \Sigma^*$, so dass $h \,\mathrm{Sim}\, g$ gilt (siehe Anhang), und beweisen Sie, dass $h \,\mathrm{Sim}\, g$ gilt.

**Aufgabe 5** *(11 Punkte)*

(a) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass es eine Funktion $r \in R^{(1)}$ gibt mit

$$\varphi_{r(i)}(x) = \varphi_i(\varphi_x(i + x))$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$.

(b) *(6 Punkte)*
Zeigen Sie, dass es eine Funktion $s \in R^{(2)}$ gibt mit

$$\varphi_{s(x,y)}(z) = \varphi_x(y) - \varphi_y(z) + \varphi_z(x)$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$.

HK 2002

**Aufgabe 6** *(14 Punkte)*

Seien $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ drei paarweise disjunkte Mengen von natürlichen Zahlen, derer Vereinigung die ganze Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Das heißt, es soll gelten:

$$A \cap B = \emptyset,\ B \cap C = \emptyset,\ C \cap A = \emptyset \text{ und } A \cup B \cup C = \mathbb{N}.$$

(a) *(6 Punkte)*
Zeigen Sie: wenn die drei Mengen $A$, $B$ und $C$ alle rekursiv-aufzählbar sind, dann sind sie alle drei sogar rekursiv.

(b) *(4 Punkte)*
Ist es möglich, dass zwei der drei Mengen rekursiv sind, die dritte aber nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) *(4 Punkte)*
Ist es möglich, dass eine der drei Mengen rekursiv ist, die anderen beiden aber nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 7** *(12 Punkte)*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ sei definiert durch:

$$A := \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) \text{ ist definiert und größer als } 2002\}$$

(a) *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $A$ rekursiv-aufzählbar ist.

(b) *(8 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $A$ nicht rekursiv ist.

**Aufgabe 8** *(10 Punkte)*

Sei $\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ die durch $\nu_{\mathbb{Z}}(i, j) := i - j$ definierte Nummerierung der Menge der ganzen Zahlen.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die durch

$$f(z) := 1 - z^2$$

für alle $z \in \mathbb{Z}$ definiert ist, eine $(\nu_{\mathbb{Z}}, \nu_{\mathbb{Z}})$-berechenbare Funktion ist.

## Anhang

**Satz 3.5** (*Berechenbare Funktionen*)
Die wie folgt definierten Funktionen $f$ und Tests $t$ sind berechenbar.

(1) $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$, $\tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).

(2) $Z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).

(3) $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).

(4) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(5) $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).

(6) $f(x_1, \ldots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

(7) $f(x, y) := x + y$ (Summe).

(8) $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(9) $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).

(10) $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \uparrow$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).

(11) $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).

(12) $f(x) := (\sqrt{x}$ falls $x$ Quadratzahl, $\uparrow$ sonst).

(13) $\max(x, y)$.

(14) $\min(x, y)$.

(15) $t(x) := (1$ falls $x$ Primzahl, $2$ sonst).

(16) $f(x) :=$ die $x$-te Primzahl.

(17) $t(x, y) := (1$ falls $x < y$, $2$ sonst). (Entsprechend für $\leq, =, \geq, >, \neq$ anstelle von $<$.)

(18) Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich. $f(x) := (0$ falls $x \in A$, $1$ sonst).

(19) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar. $f(x) :=$ (die kleinste Zahl $y$ mit $g(y) = x$ falls $x \in \mathrm{Bild}(g)$, $\uparrow$ sonst).

(20) Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar, und es gelte $(\forall y)\, g(y) < g(y+1)$. Dann sei $f(x) := \max\{y \mid g(y) \leq x\}$.

**Definition 5.6** (*primitive Rekursion, ...*)

(2) Es seien $g : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}$$

(für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: $f$ entsteht aus $g$ und $h$ durch *primitive Rekursion*.

**Definition 7.9** (*primitiv–rekursive Funktionen*)

Es sei $Gr := \{\hat{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\}$ die Menge der *primitiv–rekursiven Grundfunktionen*, s. Satz 3.5.
Für $g : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$ für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$. Es sei Prk die in Definition 5.6 erklärte primitive Rekursion.
Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt primitiv–rekursiv, gdw. wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge $Gr$ durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub und Prk erzeugen läßt. Wir bezeichnen die Menge der primitiv–rekursiven Funktionen mit PRK.

**Satz 7.10** (*einige primitiv–rekursive Funktionen*)

Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv–rekursiv:

(1) $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).

(2) $s : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x, y) := x + y$ (Summe).

(3) $V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).

(4) $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $d(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).

(5) $m : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $m(x, y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

**Definition 4.4** (*Simulation*)
$D, D'$ seien Mengen, und es sei $\mathrm{Sim} \subseteq D \times D'$. Statt $(d, d') \in \mathrm{Sim}$ schreiben wir $d \,\mathrm{Sim}\, d'$ und sagen auch: $d'$ *simuliert* $d$ (bzgl. der *Simulationsrelation* Sim).

(1) Seien $f :\subseteq D \longrightarrow D$ und $f' :\subseteq D' \longrightarrow D'$ gegeben. Wir sagen "$f'$ *simuliert* $f$ (bzgl. Sim)" und schreiben dafür $f \,\mathrm{Sim}\, f'$, gdw. für alle $d, d'$ mit $d \,\mathrm{Sim}\, d'$ gilt:

$$f(d) \text{ existiert} \iff f'(d') \text{ existiert}$$

und

$$f(d) \text{ existiert} \implies f(d) \,\mathrm{Sim}\, f'(d').$$

(2) Seien $t :\subseteq D \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ und $t' :\subseteq D' \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ gegeben. Wir sagen "$t'$ *simuliert* $t$ (bzgl. Sim)" und schreiben $t \,\mathrm{Sim}\, t'$, gdw. für alle $d, d'$ mit $d \,\mathrm{Sim}\, d'$ gilt:

$$t(d) \text{ existiert} \iff t'(d') \text{ existiert}$$

und

$$t(d) \text{ existiert} \implies t(d) = t'(d').$$