Einführung in die Theoretische Informatik A Lösungshinweise zur Klausur am 10.02.01

Aufgabe 1

1.

)

- a) M berechnet die Funktion $f_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_M(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Der Test $t_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von M ist die konstante Funktion $t_M \equiv 1$.
- b) (i) Wir zeigen per Induktion nach x die folgende allgemeinere Aussage: $(\forall x \forall y \exists n)(ES^n(1,(0,x,y,y,0,\ldots)) = (1,(0,0,x+y,x+y,0,\ldots)))$ IA: (x=0) Die Behauptung gilt offensichtlich mit n=0. IS: $(x \leadsto x+1)$ Es gilt $ES^4(1,(0,x+1,y,y,0,\ldots)) = (1,(0,x,y+1,y+1,0,\ldots))$. Weiter existiert nach der Induktionsbehauptung ein $m \in \mathbb{N}$ mit $ES^m(1,(0,x,y+1,y+1,0,\ldots)) = (1,(0,0,x+y+1,x+y+1,0,\ldots))$. n=m+4 leistet also das Gewünschte.
 - (ii) Wir zeigen wiederum eine allgemeinere Aussage: $(\forall z \forall u \forall x \forall y \exists n) (ES^n(6,(x,u,y,z,0,\ldots)) = (6,(x+z,u+z,y,0,\ldots)))$ IA: (z=0) Die Behauptung gilt für n=0. IS: $(z \leadsto z+1)$ Es gilt $ES^4(6,(x,u,y,z+1,0,\ldots)) = (6,(x+1,u+1,y,z,0,\ldots)).$ Weiter existiert nach der Induktionsbehauptung ein $m \in \mathbb{N}$ mit $ES^m(6,(x+1,u+1,y,z,0,\ldots)) = (6,(x+1+z,u+1+z,y,0,\ldots)).$ n=m+4 leistet also das Gewünschte.
 - (iii) Wiederum zeigen wir eine allgemeinere Aussage: $(\forall y \forall u \forall x \forall z \exists n) (ES^n(10,(x,y,z,u,0,...)) = (10,(x,0,z,u+y,0,...)))$ IA: (y=0) folgt wiederum mit n=0. IS: $(y \leadsto y+1)$ Zunächst gilt $ES^3(10,(x,y+1,z,u,0,...)) = (10,(x,y,z,u+1,0,...))$ und weiter existiert nach der Induktionsbehauptung ein $m \in \mathbb{N}$ mit $ES^m(10,(x,y,z,u+1,0,...)) = (10,(x,0,z,u+y+1,0,...))$. Also folgt die Behauptung mit n=m+3

c) Wir zeigen zunächst folgende Aussage per Induktion:

$$(\forall y \forall x \forall z \exists n)(ES^{n}(5, (z, 0, y, x, 0, ...)) = (5, (z + y \cdot x, 0, 0, x, 0, ...)))$$

IA: (y = 0) folgt mit n = 0.

IS: Zunächst existieren nach Teil b), Aussagen (ii) und (iii), Zahlen $m,p\in\mathbb{N}$ mit

$$\begin{split} &ES^{m+p+4}(5,(z,0,y+1,x,0,\ldots))\\ &=ES^{m+p+3}(6,(z,0,y+1,x,0,\ldots))\\ &=ES^{p+3}(6,(z+x,x,y+1,0,\ldots))\\ &=ES^{p+2}(10,(z+x,x,y+1,0,\ldots))\\ &=ES^{2}(10,(z+x,0,y+1,x,0,\ldots)) \end{split}$$

= (5, (z + x, 0, y, x, 0, ...)). Weiter existiert nach der Induktionsbehauptung ein $q \in \mathbb{N}$ mit

 $ES^{q}(5, (z+x, 0, y, x, 0, ...)) = (5, (z+x+y\cdot x, 0, 0, x, 0, ...)),$ so dass die Behauptung mit n = q + m + p + 4 folgt.

Teil a) folgt nun aus Teil b), Aussage (i) und obiger Induktionsbehauptung wie folgt:

Zu $x \in \mathbb{N}$ existieren m, n mit $ES^m(1, (0, x, 0, 0, ...)) = (1, (0, 0, x, x, 0, ...))$ und $ES^n(5, (0, 0, x, x, 0, ...)) = (5, (x \cdot x, 0, 0, x, 0, ...)),$ insgesamt also $ES^{m+n+2}(1, (0, x, 0, 0, ...)) = (0, (x^2, 0, 0, x, 0, ...)).$

Aufgabe 2

)

)

Man kann diese Aufgabe leicht mit Hilfe einer verallgemeinerten Registermaschine und einem geeigneten Induktionsbeweis lösen. Wir nutzen hier aber die Abschlußeigenschaften der berechenbaren Funktionen (Satz 5.7).

Seien $r:\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $t:\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die Funktionen aus Satz 3.5 (10) und (17). Dann ist nach Satz 5.7 und Satz 3.5 (7), (8), (9) auch die Funktion $f_1:\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, definiert durch $f_1(x,y)=(t(x^2,(y+2)^2)-1)\cdot r(x,(y+2)^2)$, berechenbar. Es gilt $f_1(x,y)=0 \Leftrightarrow ((y+2)^2>x^2 \text{ oder } (y+2)^2 \text{ teilt } x)$.

Dann ist aber auch die Funktion $f_2: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$g_2(x) = \tilde{\mu}(f_1)(x) = \min\{y \mid f_1(x,y) = 0\}, \text{ berechenbar. Es gilt nun}$$

x>0ist Produkt paarweise verschiedener Primzahlen

$$\Leftrightarrow (y^2 \text{ teilt nicht } x) \text{ für alle } 2 \leq y \leq x$$

 $\Leftrightarrow f_2(x) > x - 2.$

Somit ist wegen $f(x) = (2 - t(x - 2, f_2(x))) + (1 - (1 - x)) \cdot (2 - x)$ auch f berechenbar. Den zweiten Summanden benötigen wir, da f(1) = 1.

Aufgabe 3

Nach Satz 7.6 gilt für Standardnumerierungen $\nu: \mathbb{IN} \to \Sigma^*$ der Worte über Σ :

Eine Funktion $\nu g \nu^{-1} :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist genau dann berechenbar, wenn auch $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist.

Für $\Sigma = \{a\}$ ist die Funktion $\nu : \mathbb{N} \to \Sigma^*, \nu(n) = a^n$ die Standardnumerierung.

$$\text{Mit } [2 \div t] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, [2 \div t](x) = 2 \div t(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{falls } x \text{ Primzahl} \\ 0, \text{sonst} \end{array} \right.$$

(siehe Satz 3.5 (15)) ist auch die Funktion $\nu[2 \div t] \nu^{-1}$ berechenbar. Es gilt nun aber

$$\nu[2 \div t]\nu^{-1}(a^n) = \nu[2 \div t](n)$$

= $\nu(x)$
= $a^x = f(n)$,

wobei x = 1, falls n Primzahl ist und x = 0, sonst.

Aufgabe 4

)

)

a) g kann berechenbar gewählt werden:

Nach Satz $8.5~(utm ext{-Theorem})$ ist zunächst die zweistellige Funktion

 $\overline{g}:\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\overline{g}(x,y)=u_{\varphi}(u_{\varphi}(x,y),y)+1 \qquad (x,y\in\mathbb{N})$ berechenbar. Nach Satz 8.6 (smn-Theorem) existiert dann auch eine berechenbare Funktion $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\varphi_{g(i)}(x)=\overline{g}(i,x)=\varphi_{\varphi_i(x)}(x)+1$ für alle $i,x\in\mathbb{N}$.

b) f kann ebenfalls berechenbar gewählt werden. Nach Satz 8.7 (Φ-Theorem) existiert eine berechenbare Funktion $g: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit

$$g(i, x, t) = \begin{cases} 1, \text{ falls } \Phi_i(x) \leq t. \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Nach dem utm-Theorem (Satz 8.5) und Satz 3.5 (11) ist dann auch die Funktion $\overline{f} :\subseteq \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, definiert durch $\overline{f}(i,x,y) = [\tilde{\mu}(1 \div g)(i,x)]^{u_{\varphi}(i,y)}$, berechenbar.

Setzt man $f'(\langle i, x \rangle, y) = \overline{f}(i, x, y)$ so existiert nach dem smn-Theorem (Satz 8.6) eine berechenbare Funktion

$$\begin{split} \hat{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } \varphi_{\hat{f}(\langle i, x \rangle)}(y) &= f'(\langle i, x \rangle, y) \\ &= \overline{f}(i, x, y) \\ &= \left[\Phi_{i}(x)\right]^{\varphi_{i}(y)} \end{split}$$

 $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definiert durch $f(i,x) = \hat{f}(\langle i,x \rangle)$ leistet also das Gewünschte.

c) h kann nicht berechenbar gewählt werden.

Angenommen, es gäbe ein berechenbares h mit der angegebenen Eigenschaft. Nach dem utm-Theorem wäre dann auch die Funktion $\overline{h}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\overline{h}(0) = u_{\varphi}(h(0), 0) + 1$ und $\overline{h}(x+1) = \max(\overline{h}(x) + 1, u_{\varphi}(h(x), x) + 1)$, (somit ist \overline{h} monoton) berechenbar. Es gilt dann für ein $j \in \mathbb{N}$, $\overline{h} = \varphi_j$ und weiter

$$\varphi_{h(j)}(j) = \max\{\varphi_j(y) \mid y \leq j\}$$

$$= \max\{\overline{h}(y) \mid y \leq j\}$$

$$= \overline{h}(j) \geq \varphi_{h(j)}(j) + 1$$

Widerspruch.

Aufgabe 5

)

)

Nach Satz 9.18 ist weder $\ddot{A}q = \{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$ noch $\mathbb{N}^2 \setminus \ddot{A}q$ rekursiv aufzählbar. Nach Satz 9.9 ist dann auch weder $\pi^{(2)}(\ddot{A}q)$ noch $\mathbb{N} \setminus \pi^{(2)}(\ddot{A}q)$ rekursiv aufzählbar. Es gilt für $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(\langle i,j \rangle) = \langle i,j,i \rangle$

- (i) f ist berechenbar und
- (ii) $\pi^{(2)}(\ddot{A}q) \leq A$.

Nach Satz 9.16 gilt dann auch $\mathbb{N} \setminus \pi^{(2)}(\ddot{A}q) \leq A$ und mit A wäre auch $\pi^{(2)}(\ddot{A}q)$, mit $\mathbb{N} \setminus A$ wäre auch $\mathbb{N} \setminus \pi^{(2)}(\ddot{A}q)$ relursiv aufzählbar.

Aufgabe 6

(i) Sei $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(x,y) = (x+1)(y+1) \div 1$. Dann ist fberechenbar und es gilt

$$\nu_p(x) \cup \nu_p(y) = \{i \in \mathbb{N} \mid p(i) \text{ teilt } x+1 \text{ oder } p(i) \text{ teilt } y+1\}$$
$$= \{i \in \mathbb{N} \mid p(i) \text{ teilt } (x+1) \cdot (y+1)\}$$
$$= \nu_p(f(x,y)).$$

Somit ist \cup (ν_p, ν_p, ν_p) -berechenbar.

(ii) Sei nun $q: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{array}{lcl} g(x,y,0) & = & [1 \div (r(x,2) + r(y,2))] \cdot 2 + 1 \div [1 \div (r(x,2) + r(y,2))] \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 2, \text{ falls 2 teilt } x \text{ und 2 teilt } y. \\ 1, \text{sonst} \end{array} \right. \end{array}$$

und

)

$$\begin{array}{ll} g(x,y,n+1) & = & g(x,y,n) \cdot (1 \div (r(x,p(n+1)) + r(y,p(n+1))) \\ & & + 1 \div [1 \div (r(x,p(n+1)) + r(y,p(n+1)))]) \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} g(x,y,n) \cdot p(n+1), \text{ falls } p(n+1) \text{ teilt } x \text{ und } y, \\ g(x,y,n), \text{ sonst} \end{array} \right. \end{array}$$

Nach Satz 3.5 und Satz 5.7 ist g und damit auch $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definiert durch $f(x,y) = g(x+1, y+1, x+y+2) \div 1$, berechenbar. Man verifiziert leicht

$$\nu_p f(x,y) = \{i \mid p(i) \text{ teilt } x+1 \text{ und } p(i) \text{ teilt } y+1\}$$
$$= \nu_p(x) \cap \nu_p(y).$$

b) Sei $\nu : \mathbb{N} \to E(\mathbb{N})$ definiert durch $\nu(\langle i, j \rangle) = \begin{cases} \nu_p(j), \text{ falls } \varphi_i(i) \text{ definiert } \\ \emptyset, \text{ sonst } \end{cases}$ Nehmen wir nun an, es gelte $\nu \leq \nu_p$. Sei dann $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar

 $mit \ \nu = \nu_p \circ f.$

Dann gilt $i \in K_{\varphi} \Leftrightarrow f(\langle i, 1 \rangle) \neq 0$, d.h. $\mathbb{N} \setminus K_{\varphi} = g^{-1}(\{0\})$ mit der berechenbaren Funktion $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(i) = f(\langle i, 1 \rangle)$. Mit $\{0\}$ wäre dann nach Satz 9.16 auch $\mathbb{N} \setminus K_{\varphi}$ und somit K_{φ} entscheidbar, im Widerspruch zu Satz 9.14.