1653 Einführung in die Theoretische Informatik A
Lösungshinweise zur Klausur vom 12. Februar 2000

Aufgabe 1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$:
Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über t.

$\underline{t = 0}$: Es gilt $n \geq 0$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^0(1,(0,n,0,0,\ldots)) &= (1,(0,n,0,0,\ldots)) \\ &= (1,(f(n)-f(n),n,0,0,\ldots)). \end{aligned}$$

$\underline{t \to t+1}$: Sei $n \geq t+1$. Dann ist auch $n \geq t$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{ES}^{3(t+1)}(1,(0,n,0,0,\ldots)) \\ = \; & \mathrm{ES}^3(1,(f(n)-f(n-t),n-t,0,0,\ldots)) \\ = \; & \mathrm{ES}^2(2,(f(n)-f(n-t)+(n-t)^3,n-t,0,0,\ldots)) \\ = \; & \mathrm{ES}(3,(f(n)-f(n-t)+(n-t)^3,n-t,0,0,\ldots)) \text{ da } n-t>0 \\ = \; & (1,(f(n)-f(n-t)+(n-t)^3,n-t-1,0,0,\ldots)) \\ = \; & (1,(f(n)-\frac{1}{4}(n-t)^2(n-t+1)^2+(n-t)^3,n-t-1,0,0,\ldots)) \\ = \; & (1,(f(n)-\frac{1}{4}(n-t)^2((n-t+1)^2-4(n-t)),n-t-1,0,0,\ldots)) \\ = \; & (1,(f(n)-\frac{1}{4}(n-t)^2(n-(t+1))^2,n-(t+1),0,0,\ldots)) \\ = \; & (1,(f(n)-f(n-(t+1)),n-(t+1),0,0,\ldots)), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Nach (a) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{3n+2}(1,(0,n,0,0,\ldots)) &= \mathrm{ES}^2(1,(f(n)-f(0),0,0,0,\ldots)) \\ &= \mathrm{ES}(2,(f(n),0,0,0,0,\ldots)) \\ &= (4,(f(n),0,0,0,0,\ldots)), \end{aligned}$$

d.h. $f_M(n) = f(n)$.

Aufgabe 2

Wir verwenden die Additions- und die Multiplikationsfunktion $s, m : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, die gemäß Satz 7.10 primitiv-rekursiv sind.
Wir definieren $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$g(n) := (n+1)^2 = m(S(n), S(n)) = \mathrm{Sub}(m, S, S)(n)$$

und $h : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} h(n,k) &:= (n+1)^2 + k \\ &= s(g(n), k) \\ &= \mathrm{Sub}(s, g \circ \mathrm{pr}_1^{(2)}, \mathrm{pr}_2^{(2)})(n,k) \end{aligned}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Damit sind g, h primitiv-rekursiv. Weiterhin gilt

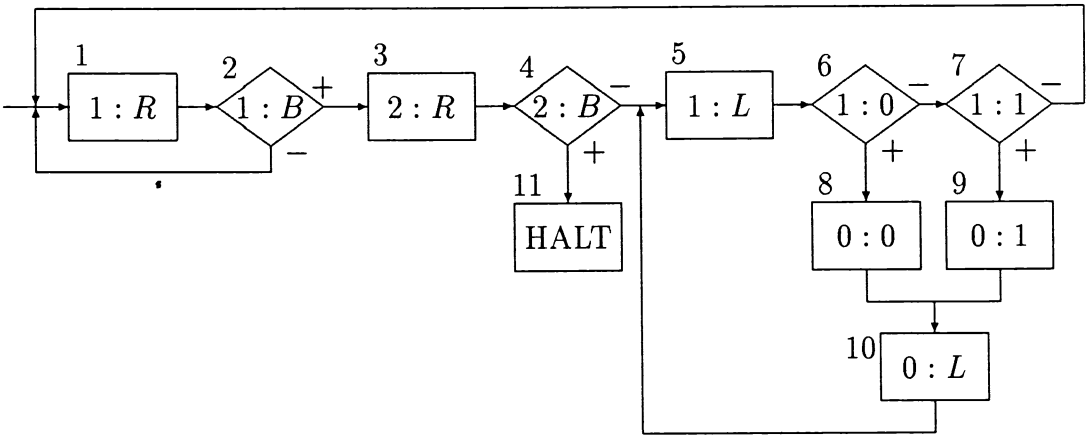
$$f(0) = 0 = \tilde{0}()$$

$$f(n+1) = (n+1)^2 + f(n) = h(n, f(n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wie man leicht durch vollständige Induktion über n zeigt. Somit ist auch $f = \mathrm{Prk}(\tilde{0}, h)$ primitiv-rekursiv.

Aufgabe 3

Eine zweistellige Turingmaschine M über Σ sei durch folgendes Flußdiagramm gegeben:



Für diese Maschine M gilt $f_M = f$.

Aufgabe 4

Für das WHILE-Programm

$$P := (R_1 : (((R_2 : (R_3+; R_2-)); (R_3 : (R_0+; (R_2+; R_3-)))); R_1-))$$

gilt

$$\mathrm{AC} \circ \tau(P) \circ \mathrm{EC}^{(2)} = f.$$

Aufgabe 5

Gemäß Lemma 8.4 ist die Funktion $h : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$h(i,n,t) := \begin{cases} 1 + \varphi_i(n) & \text{falls } \Phi_i(n) \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $i, n, t \in \mathbb{N}$ berechenbar. Damit ist die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(1653) = 1653\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid (\exists t) h(i, 1653, t) = 1654\} \end{aligned}$$

aufgrund des Projektionssatzes rekursiv–aufzählbar. Sei nun

$$F := \{f \in P^{(1)} \mid f(1653) = 1653\}.$$

Aufgrund des Satzes von Rice ist die Menge $A = \varphi^{-1}(F)$ nicht rekursiv.

Aufgabe 6

Sei $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(\langle i,j\rangle, n) := u_\varphi(i,n) \cdot u_\varphi(j,n)$$

für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$. Aufgrund des utm-Theorems ist f berechenbar und aufgrund des smn-Theorems gibt es eine berechenbare Funktion $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(\langle i,j\rangle, n) = \varphi_{s\langle i,j\rangle}(n)$$

für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $r : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $r(i,j) := s\langle i,j\rangle$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ berechenbar und es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{r(i,j)}(n) &= \varphi_{s\langle i,j\rangle}(n)\\ &= f(\langle i,j\rangle, n)\\ &= u_\varphi(i,n)\cdot u_\varphi(j,n)\\ &= \varphi_i(n)\cdot\varphi_j(n)\end{aligned}$$

für alle $i, j, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7

Sei $f :\subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar. Aufgrund des smn-Theorems gibt es eine berechenbare Funktion $r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(i,n) = \varphi_{r(i)}(n)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Aufgrund des Rekursionssatzes gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i = \varphi_{r(i)}$. Es folgt

$$f(i,n) = \varphi_{r(i)}(n) = \varphi_i(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8

Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die durch

$$g\langle i,j,k\rangle := \langle j+k+1, i, k\rangle$$

für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$ definierte Funktion. Dann ist g berechenbar und es gilt

$$\begin{aligned}\nu_{\mathbb{Q}} g\langle i,j,k\rangle &= \nu_{\mathbb{Q}}\langle j+k+1, i, k\rangle\\ &= \tfrac{j+k+1-i}{k+1}\\ &= \tfrac{k+1}{k+1} - \tfrac{i-j}{k+1}\\ &= 1 - \nu_{\mathbb{Q}}\langle i,j,k\rangle\\ &= f\nu_{\mathbb{Q}}\langle i,j,k\rangle\end{aligned}$$

für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$. D.h. daß $f(\nu_{\mathbb{Q}}, \nu_{\mathbb{Q}})$-berechenbar ist.

Aufgabe 9

Wir skizzieren eine Typ–2–Maschine M, die eine Funktion $f_M :\subseteq \Sigma^\omega \longrightarrow \Sigma^\omega$ berechnet, so daß

$$f\rho(p) = \rho f_M(p)$$

für alle $p \in \mathrm{Def}(\rho)$ gilt. Daraus folgt dann, daß f (ρ, ρ)-berechenbar ist.
Wir beschreiben jetzt das Verhalten von M bei Eingabe $p = u_0\#u_1\#... \in \mathrm{Def}(\rho)$. Für jedes $k = 0, 1, ...$ wählt die Maschine M ein Wort $v_k \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{rat}})$, so daß $\overline{v}_k = 1 - \overline{u}_k$ gilt. Dabei gibt M die Folge $q = v_0\#v_1\#...$ aus.
Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i > k$ gilt nun

$$\begin{aligned} |\,\overline{v_i} - \overline{v_k}\,| &= |\,1 - \overline{u_i} - (1 - \overline{u_k})\,| \\ &= |\,\overline{u_k} - \overline{u_i}\,| \\ &\leq 2^{-k} \end{aligned}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \overline{v_k} = \lim_{k\to\infty} (1 - \overline{u_k}) = 1 - \lim_{k\to\infty} \overline{u_k} = 1 - \rho(p).$$

Damit ist $q \in \mathrm{Def}(\rho)$ und

$$\rho f_M(p) = \rho(q) = 1 - \rho(p) = f\rho(p),$$

was zu zeigen war.