Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich

Postanschrift: FernUniversität Hagen - Praktische Informatik VII - D - 58084 Hagen

Name, Vorname _____

_____

Straße, Nr. _____

PLZ, Wohnort _____

Kurs 1601 – Formale Grundlagen der Informatik

Nachklausur am 17.03.2001, 10.00 – 13.00 Uhr

Klausurort:
- ❑ Berlin
- ❑ Bochum
- ❑ Frankfurt
- ❑ Hamburg
- ❑ Karlsruhe
- ❑ Kassel
- ❑ Köln
- ❑ München
- ❑ Bregenz
- ❑ Wien
- ❑ Sonderregelung

Zusätzliche Angaben (für Schein / Zertifikat)

❑ Frau ❑ Herr geb. am ___ . ___ . 19___

❑ Vollzeitstudent

❑ Teilzeitstudent

❑ Gasthörer

❑ Zweithörer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**Summe**
erreichbare Punkte	*8*	*10*	*8*	*6*	*12*	*20*	*10*	*8*	*10*	*8*	*8*	*108*
bearbeitet												
erreichte Punktzahl												

Datum: _____ Korrektur: _____

Name: Matrikelnummer: _ _ _ _ _ _

1601 Formale Grundlagen der Informatik

Nachklausur

Aufgabe 1: *8 Punkte*

Sei S die Menge $\{x,z\}$ und T die Menge $\{z,y\}$. Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle die Kardinalität der dort aufgeführten Mengen an.

Kardinalität	0	1	2	3	4
T					
$S \times T$					
$T \setminus S$					
$S \cap T$					
$S \cup T$					
$\mathcal{P}(T)$					
$\{S\} \cap \{T\}$					
$\{S\} \cup \{T\}$					

Aufgabe 2: *10 Punkte*

Betrachten Sie die beiden folgenden homogenen zweistelligen Relationen R_1 und R_2 über der Menge $\{a,b,c\}$.

$$R_1 = \{(x,x),(y,y),(x,z),(x,y),(y,z)\}$$
$$R_2 = \{(z,y),(x,x),(y,z),(z,z),(y,y)\}$$

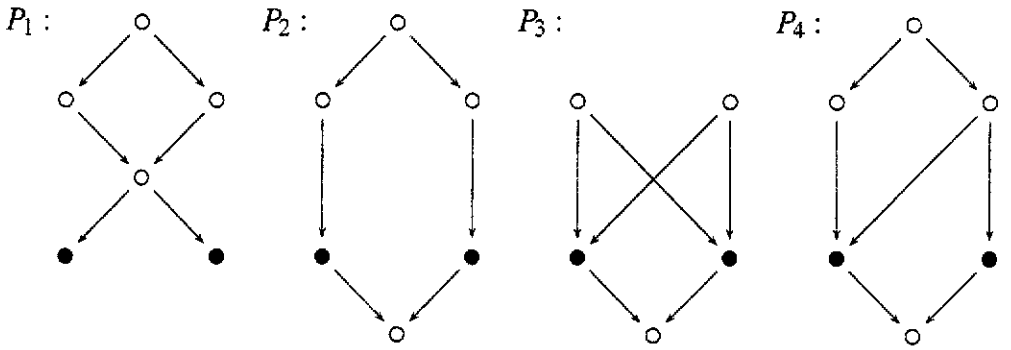
Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der dort aufgeführten Eigenschaften auf R_1 bzw. R_2 zutreffen, und welche nicht.

	R_1		R_2	
	ja	nein	ja	nein
reflexiv				
irreflexiv				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				

Aufgabe 3: *8 Punkte*

Betrachten Sie die folgenden, als Hasse-Diagramme dargestellten Halbordnungen P_1, P_2, P_3 und P_4. Kennzeichnen Sie durch Ankreuzen jeweils das Supremum, d.h. die kleinste obere Schranke der Menge der beiden geschwärzten Elemente (falls ein Supremum existiert).

Hinweis: Bei der Darstellung einer Ordnungsrelation $\leq$ durch ein Hasse-Diagramm bedeutet eine von b nach a laufende Kante, dass $a \leq b$, wobei a und b Elemente der zugrunde liegenden Menge sind.



Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der obigen Halbordnungen einen Verband bilden.

	P_1		P_2		P_3		P_4	
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein
Verband?								

Aufgabe 4: *6 Punkte*

Betrachten Sie die beiden folgendermaßen bestimmten Funktionen f und g. Beachten Sie, dass Teilen durch Null nicht definiert ist, und dass "Unendlich" keine reelle Zahl ist. $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen; $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen und $\mathbb{N}_0$ stellt die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null dar.

$$f: \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}\ , \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g: \{x \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \{x \in \mathbb{N}_0\}\ , \text{ mit } g(x) = x^2$$

Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der dort aufgeführten Eigenschaften auf f bzw. g zutreffen, und welche nicht.

	f		g	
	ja	nein	ja	nein
injektiv				
surjektiv				
total				

Aufgabe 5: *12 Punkte*

Entscheiden Sie, ob die jeweilige Formel die angegebene Eigenschaft besitzt oder nicht, und kreuzen Sie entsprechend die Felder an. Tragen Sie in der letzten Spalte die Anzahl der verschiedenen Modelle für die Formel ein.

Formel	erfüllbar		allgemein-gültig		inkonsistent		in VNF		Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$(\neg B \vee C) \rightarrow (B \rightarrow C)$									
$(\neg E \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow A)$									
$\neg((\neg E \vee D) \rightarrow (E \rightarrow D))$									
$(B \rightarrow (B \wedge C)) \wedge (B \wedge \neg(C \wedge B))$									

Aufgabe 6: *20 Punkte*

a) Entscheiden Sie für jede der folgenden vier Ausgangsformeln, ob die Formeln in den Tabellenzeilen logisch äquivalent sind oder nicht. Kreuzen Sie entsprechend an.

Ausgangsformel: $(C \wedge A) \wedge (\neg C \vee \neg A)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$\neg B \wedge C \wedge B$		
$C \rightarrow C \vee A$		
$(C \vee A) \rightarrow C$		

Ausgangsformel: $(C \rightarrow A) \leftrightarrow B$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$C \rightarrow A \vee B$		
$B \leftrightarrow (A \rightarrow C)$		
$(B \rightarrow (\neg C \vee A)) \wedge ((\neg C \vee A) \rightarrow B)$		

Ausgangsformel: $(C \rightarrow A) \vee B$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$C \wedge A \wedge B$		
$B \vee (\neg A \rightarrow \neg C)$		
$\neg C \vee \neg(\neg A) \vee B$		

Ausgangsformel: $\neg(C \rightarrow A)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$\neg C \wedge A$		
$\neg C \vee \neg A$		
$(((C \wedge \neg C) \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg(C \rightarrow A)$		

8 Punkte

b) Leiten Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Formeln formal her:
$((S \to T) \wedge (T \to U)) \to (S \to U)$ und $\neg S \vee (S \wedge \neg T) \vee U \vee (\neg U \wedge T)$.

Es gibt 5 Bedingungen, die Sie einhalten müssen:

- Benutzen Sie nur die folgenden Definitionen und Theoreme aus dem Kurs:
  1) Definition der Implikation
  2) Kommutativität für die Disjunktion
  3) Kommutativität für die Konjunktion
  4) Distributivität für die Disjunktion $[A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$
  5) Distributivität für die Konjunktion $[A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
  6) de Morgansches Gesetz für die Disjunktion $[\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B]$
  7) de Morgansches Gesetz für die Konjunktion $[\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B]$
  8) Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch
  9) Satz vom ausgeschlossenen Dritten
  10) Satz von der doppelten Negation
- Die Assoziativgesetze dürfen Sie ohne explizite Erwähnung mitverwenden.
- Verwenden Sie in jedem Umformungsschritt eines der obigen Theoreme und geben Sie dessen Nummer und die Anzahl der Anwendungen in den entsprechenden Spalten an. In einem Schritt wird jeweils die maximal gewünschte Anzahl der Anwendungen ein und desselben Theorems zusammengefasst.
- Verwenden Sie maximal 7 Schritte (es gibt auch kürzere Herleitungen).
- Die Formel darf bei keinem Schritt (außer bei Anwendung von 1) oder 6) oder 7)) komplizierter werden (d. h. mehr Zeichen umfassen).

Anmerkung: Das Theorem für den 1. Schritt ist vorgegeben.

Schritt	Formel	Theo.	Anw.
	$((S \to T) \wedge (T \to U)) \to (S \to U)$	1	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7	$\neg S \vee (S \wedge \neg T) \vee U \vee (\neg U \wedge T)$	–	–

12 Punkte

Aufgabe 7: *10 Punkte*

Formen Sie unter Verwendung der unten stehenden Tabelle die folgende Formel in DNF um:
$(\neg(S \wedge T) \wedge U) \rightarrow ((S \vee T) \wedge U)$

Es gibt 4 Bedingungen, die Sie einhalten müssen:

- Benutzen Sie nur die folgenden Definitionen und Theoreme aus dem Kurs:
  1) Definition der Implikation
  2) Kommutativität für die Disjunktion
  3) Kommutativität für die Konjunktion
  4) Distributivität für die Disjunktion $[A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$
  5) Distributivität für die Konjunktion $[A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
  6) de Morgansches Gesetz für die Disjunktion $[\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B]$
  7) de Morgansches Gesetz für die Konjunktion $[\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B]$
  8) Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch
  9) Satz vom ausgeschlossenen Dritten
  10) Satz von der doppelten Negation
- Die Assoziativgesetze dürfen Sie ohne explizite Erwähnung mitverwenden.
- Verwenden Sie in jedem Umformungsschritt eines der obigen Theoreme und geben Sie dessen Nummer und die Anzahl der Anwendungen in den entsprechenden Spalten an. In einem Schritt wird jeweils die maximal gewünschte Anzahl der Anwendungen ein und desselben Theorems zusammengefasst.
- Verwenden Sie maximal 6 Schritte (es gibt aber auch kürzere Herleitungen):

Schritt	Formel	Theo.	Anw.
	$(\neg(S \wedge T) \wedge U) \rightarrow ((S \vee T) \wedge U)$		
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Aufgabe 8: *8 Punkte*

Gegeben sei eine Signatur Σ, bestehend aus den Konstanten 1/0, 7/0, 9/0, *Eins*/0, *Zwei*/0, *Drei*/0, *Vier*/0 und *Neun*/0, den Funktionssymbolen +/2 und −/2 und den Prädikatensymbolen $P/1$, $Q/1$, $R/3$, $>/2$, $</2$, *Gerade*/1, *Ungerade*/1 und *Elternteil*/1. Sei V eine Menge von Individuenvariablen. Sind die folgenden Ausdrücke jeweils syntaktisch korrekte PL1-Formeln über Σ und einer Variablenmenge V ?

Hinweis:

- Die aus der Arithmetik bekannten Symbole $+$, $-$, $<$ und $>$ dürfen in Infixnotation verwendet werden.
- Betrachten Sie alle nicht in der Definition der Signatur verwendeten Symbole als Variable aus V.

PL1-Formel über Σ und V ?	ja	nein
$R(Eins \wedge Zwei \wedge Drei)$		
$\forall y\, \forall x\, (Gerade(x) \wedge Gerade(y) \rightarrow Ungerade((x+y)+1))$		
$\forall x\, (\exists y\, \neg(\neg Gerade(y) \wedge \forall x\, Ungerade(x)))$		
$\exists x \wedge y\, (\forall z\, (R(z,x,y) \leftrightarrow R(z,y,x)))$		
$\forall x\, \forall y\, (R(x,y,z) \rightarrow \forall x\, R(x,y,z))$		
$\neg\exists x\, \forall y\, (Q(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall z\, Q(z)$		
$\forall sohn\, \exists vater(sohn)\, (Elternteil(vater(sohn)))$		
$\forall n\, (Vier < Eins < Drei)$		
$\exists x\, (x < 7 \wedge x > 9 \wedge Gerade(x+1))$		
$\neg\forall x\, \exists Q\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (Q(x) \rightarrow P(x))$		

Aufgabe 9: *10 Punkte*

a) Sind die folgenden PL1-Formeln jeweils allgemeingültig ? *4 Punkte*

Allgemeingültig ?	ja	nein
$((\forall x\, \forall z\, P(x,z)) \wedge \neg\exists z\, \neg Q(z)) \leftrightarrow$ $(\forall z\, \forall x\, P(z,x) \wedge \forall y\, Q(y)$		
$\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \wedge \neg P(x,y)) \leftrightarrow$ $\neg(\neg Q(y) \vee Q(y))$		
$(\forall x\, \forall y\, Q(x) \wedge R(y)) \leftrightarrow$ $((\neg\exists x\, \neg Q(x)) \wedge \forall y R(y))$		
$(\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x,y) \wedge Q(z) \vee R(z)) \leftrightarrow$ $(\exists z\, \forall y\, \forall x\, P(x,z) \wedge Q(y) \vee R(y))$		

b) Begründen Sie für allgemeingültige Formeln aus Aufgabenteil a) Ihre Antwort durch Äquivalenzumformungen. Dabei dürfen Sie neben den speziellen Äquivalenzen für PL1-Formeln die Assoziativgesetze und Kommutativgesetze für Disjunktion und Konjunktion sowie die Idempotenzgesetze ($A \vee A \leftrightarrow A$ und $A \wedge A \leftrightarrow A$) verwenden. *6 Punkte*

Aufgabe 10: *8 Punkte*

Sei F die Formel $\exists y\ (\neg \exists x\ (P(x,y) \vee \forall z\ (Q(x,y))))$.

a) Überführen Sie F durch Äquivalenzumformungen in Pränexform. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt jeweils die angewendete Regel an. *5 Punkte*

b) Geben Sie den Kern der Pränexform an und überführen Sie ihn in DNF. *3 Punkte*

Aufgabe 11: *8 Punkte*

Gegeben sei eine PL1-Signatur Σ, bestehend aus einer Konstanten C, zwei Prädikatensymbolen P und Q der Stelligkeit Eins sowie einem Prädikatensymbol R der Stelligkeit Zwei. Sei I die folgendermaßen bestimmte Σ-Interpretation mit Trägermenge (Universum) $\{a,b,c,d\}$:

$$\begin{aligned} C_I &= c \\ P_I &= \{a,d\} \\ Q_I &= \{a,b,c\} \\ R_I &= \{(a,c),(d,d),(c,b)\} \end{aligned}$$

Entscheiden Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle, welche der dort aufgeführten Formeln über Σ von I erfüllt werden, und welche nicht.

Von I erfüllt?	ja	nein
$P(C)$		
$\forall x(P(x) \vee Q(x))$		
$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$		
$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$		
$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y))$		
$\forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \rightarrow Q(y))$		
$\exists x \forall y(P(x) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow Q(y)))$		
$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow R(x,y) \wedge Q(y))$		