1601 Formale Grundlagen der Informatik

Lösungsvorschläge zur Klausur

Aufgabe 1: *7 Punkte*

Menge	Kardinalität
$A \cup \{b\}$	4
$A \cap B$	2
$\mathcal{P}(A \cup B)$	32
$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$	4
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$	20
$A \times \{a\} \times B$	12
$(A \times B) \setminus (\{a\} \times B)$	8

$|A \cup \{b\}| = |\{a, 3, 2, b\}| = 4.$

$|A \cap B| = |\{a, 3\}| = 2.$

$|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|} = 2^5 = 32,$
da $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 4 - 2 = 5$
(bzw. da $A \cup B = \{a, 3, 2, b, 1\}$).

$|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cap B)| = 2^{|A \cap B|} = 2^2 = 4,$
da $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \leftrightarrow X \subseteq A \cap B \leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$
(bzw. da $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{3\}, \{a, 3\}\}$).

$|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| - |\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| = 2^3 + 2^4 - 4 = 8 + 16 - 4 = 20.$

$|A \times \{a\} \times B| = |A| \cdot |\{a\}| \cdot |B| = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12.$

$|(A \times B) \setminus (\{a\} \times B)| = |A \times B| - |\{a\} \times B| = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 8,$
da $\{a\} \times B \subseteq A \times B$.

Aufgabe 2: *10 Punkte*

	R_1		R_2	
	ja	nein	ja	nein
irreflexiv		X		X
konnex	X			X
symmetrisch		X	X	
antisymmetrisch	X			X
transitiv	X			X

R_1 ist *nicht* irreflexiv, da z.B. $(b, b) \in R_1$.

R_1 ist konnex, da $(a, b), (c, b), (a, c) \in R_1$.

R_1 ist *nicht* symmetrisch, da z.B. $(a, b) \in R_1$, aber $(b, a) \notin R_1$.

R_1 ist antisymmetrisch, denn $(x, y), (y, x) \in R_1 \rightarrow x = y = a \vee x = y = b$.

R_1 ist transitiv, da $(a, c), (c, b), (a, b) \in R_1$, etc.

R_2 ist *nicht* irreflexiv, da $(a, a) \in R_2$.

R_2 ist *nicht* konnex, da $(b, c), (c, b) \notin R_2$.

R_2 ist symmetrisch, da $(a, b), (b, a) \in R_2$, etc.

R_2 ist *nicht* antisymmetrisch, da z.B. $(a, b), (b, a) \in R_2$, aber $a \neq b$.

R_2 ist *nicht* transitiv, da $(b, a), (a, c) \in R_2$, aber $(b, c) \notin R_2$.

Aufgabe 3: *8 Punkte*

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein
injektiv	X			X	X		X	
surjektiv		X	X			X	X	

f_1 ist injektiv, denn aus $(m_2, m_1 + m_2) = (n_2, n_1 + n_2)$ folgt $m_2 = n_2$ und $m_1 = n_1$.

f_1 ist *nicht* surjektiv, da z.B. $(n_2, n_1 + n_2) \neq (1, 0)$, für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

f_2 ist *nicht* injektiv, da z.B. $f_2(1, 1) = 2 = f_2(0, 2)$.

f_2 ist surjektiv, da $f_2(0, n_2) = n_2$, für alle $n_2 \in \mathbb{N}$.

f_3 ist injektiv: angenommen $f_3(n_1, n_2) = k \in \mathbb{N}$; sei m die größte natürliche Zahl mit $m^2 \leq k$; dann $m = n_1 + n_2$, da $(n_1 + n_2 + 1)^2 = (n_1 + n_2)^2 + 2n_1 + 2n_2 + 1 > (n_1 + n_2)^2 + n_2 = k$. Daher $n_2 = k - m^2$ und $n_1 = m - n_2$, d.h. n_1 und n_2 sind durch k eindeutig bestimmt.

f_3 ist *nicht* surjektiv, da z.B. $f_3(n_1, n_2) \neq 3$, für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

f_4 ist injektiv: angenommen $f_4(n_1, n_2) = k \in \mathbb{N}$; sei m die größte natürliche Zahl mit $\frac{m(m+1)}{2} \leq k$; dann $m = n_1 + n_2$, da $\frac{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+2)}{2} = k + n_1 + 1$. Daher $n_2 = k - \frac{m(m+1)}{2}$ und $n_1 = m - n_2$, d.h. n_1 und n_2 sind durch k eindeutig bestimmt.

f_4 ist surjektiv: gegeben $k \in \mathbb{N}$, wähle die größte natürliche Zahl m mit $\frac{m(m+1)}{2} \leq k$; dann $\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 > k$; folglich $k - \frac{m(m+1)}{2} \leq m$; wähle $n_2 = k - \frac{m(m+1)}{2}$ und $n_1 = m - n_2$; dann $k = f_4(n_1, n_2)$.

Die Bijektivität der Funktion f_4 wird durch den folgenden Ausschnitt ihrer Wertetabelle veranschaulicht:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$[n_1]$
0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	
1	2	4	7	11	16	22	29	37		
2	5	8	12	17	23	30	38			
3	9	13	18	24	31	39				
4	14	19	25	32	40					
5	20	26	33	41						
6	27	34	42							
7	35	43								
8	44									
$[n_2]$										

Aufgabe 4: *8 Punkte*

Halbordnung	M_1	M_2	M_3	M_4
Infimum	1	$\emptyset$	—	$(0,1)$
Supremum	—	$\mathbb{N}\setminus\{0\}$	$\mathbb{N}$	$(1,0)$

M_1: Das Infimum von $\mathbb{N}\setminus\{0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$ ist 1; ein Supremum existiert nicht.

M_2: Für jede Menge M hat $\mathcal{P}(M)$ das Infimum $\emptyset$ und das Supremum M.

M_3: Für jede nichtleere Menge M hat $\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ das Supremum M. Besitzt M mehr als ein Element, dann hat $\{\{x\} \mid x \in M\}$ und damit auch $\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ keine untere Schranke (in $\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$).

M_4: $(0,1) \leq (1,1)$, $(0,1) \leq (0,0)$, $(1,1) \leq (1,0)$, $(0,0) \leq (1,0)$.

Aufgabe 5: *8 Punkte*

A:	T	T	F	F	j
B:	T	F	T	F	
	F	F	T	T	4
	T	T	F	F	13
	F	T	T	T	2
	F	F	F	F	16
	F	T	F	F	14
	T	F	F	T	7
	T	F	T	T	3
	F	F	T	F	12

Aufgabe 6: *12 Punkte*

Schritt	Formel F	The.	Anw.	VNF	
				ja	n.
	$(((C \to E) \vee B) \to A) \vee ((C \vee E) \wedge (A \to B))$	1	3		X
1	$(\neg((\neg C \vee E) \vee B) \vee A) \vee ((C \vee E) \wedge (\neg A \vee B))$	3	1		X
2	$((\neg(\neg C \vee E) \wedge \neg B) \vee A) \vee ((C \vee E) \wedge (\neg A \vee B))$	3	1		X
3	$(((\neg(\neg C) \wedge \neg E) \wedge \neg B) \vee A) \vee ((C \vee E) \wedge (\neg A \vee B))$	2	1		X
4	$((C \wedge \neg E \wedge \neg B) \vee A) \vee ((C \vee E) \wedge (\neg A \vee B))$	8	1	X	
5	$((C \wedge \neg E \wedge \neg B) \vee A) \vee (((C \vee E) \wedge \neg A) \vee ((C \vee E) \wedge B))$	6	2	X	
6	$((C \wedge \neg E \wedge \neg B) \vee A) \vee ((\neg A \wedge (C \vee E)) \vee (B \wedge (C \vee E)))$	8	2	X	
7	$((C \wedge \neg E \wedge \neg B) \vee A) \vee (((\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge E)) \vee ((B \wedge C) \vee (B \wedge E)))$			X	
8	$(C \wedge \neg E \wedge \neg B) \vee A \vee (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge E) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge E)$			X	

Anmerkung: Auch die vorletzte Formel, die noch zusätzliche Klammern enthält, soll als Lösung akzeptiert werden.

Aufgabe 7: *12 Punkte*

Formel F	F allgemeingültig		F erfüllbar		F inkonsistent		F in VNF		Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$(I \vee (\neg G \wedge \neg(\neg H))) \leftrightarrow (H \vee I)$		X	X			X		X	7
$(K \rightarrow H) \wedge (\neg K \rightarrow G)$		X	X			X		X	4
$\neg((\neg G \vee I) \rightarrow (G \rightarrow I))$		X		X	X			X	0
$(G \rightarrow (G \wedge I)) \wedge (\neg(I \wedge G) \wedge G)$		X		X	X			X	0

Lösung zum Beispiel mit Wahrheitswertetafeln

G	H	I	$\neg G$	$\neg G \wedge \neg(\neg H)$	$H \vee I$	$I \vee (\neg G \wedge \neg(\neg H))$	$(I \vee (\neg G \wedge \neg(\neg H))) \leftrightarrow (H \vee I)$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	F	F	F	T

K	H	G	$K \rightarrow H$	$\neg K \rightarrow G$	$(K \rightarrow H) \wedge (\neg K \rightarrow G)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

G	I	$G \rightarrow I, \neg G \vee I$	$(\neg G \vee I) \rightarrow (G \rightarrow I)$	$\neg((\neg G \vee I) \rightarrow (G \rightarrow I))$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

G	I	$G \wedge I$	$\neg(I \wedge G)$	$G \rightarrow (G \wedge I)$	$(\neg I \wedge G) \wedge G$	$(G \rightarrow (G \wedge I)) \wedge (\neg(I \wedge G) \wedge G)$
T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F

Aufgabe 8: *9 Punkte*

Ausgangsformel: $\neg(D \rightarrow E)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$\neg D \vee \neg E$		X
$((G \wedge (D \wedge \neg D)) \rightarrow D) \wedge \neg(D \rightarrow E)$	X	
$\neg D \wedge E$		X

Ausgangsformel: $(D \wedge E) \wedge (\neg D \vee \neg E)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$(D \vee E) \rightarrow D$		X
$D \rightarrow D \vee E$		X
$\neg G \wedge D \wedge G$	X	

Ausgangsformel: $(D \rightarrow E) \leftrightarrow G$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$G \leftrightarrow (E \rightarrow D)$		X
$((E \vee \neg D) \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow (\neg D \vee E))$	X	
$D \rightarrow E \vee G$		X

Aufgabe 9: *8 Punkte*

PL1-Formel über Σ und V ?	ja	nein
$\forall n\ (Zwei > Zwei - Eins)$		X
$Acht(Vier \wedge Zwei \wedge Zwei)$		X
$\forall y\ \forall x\ (Integer(x) \wedge Integer(y)) \rightarrow Integer((x + y) * Drei))$	X	
$\forall x\ (\exists y\ \neg(\neg Wahre\_Aussage(y) \vee \forall x\ \exists z\ Wahre\_Aussage(x)))$	X	
$\exists x\ (Integer(x) \wedge x < Drei \wedge x > Zwei)$	X	
$\neg\forall x\ \forall y\ \exists P\ (Q(x,y) \rightarrow P(x)) \vee (Q(y,y) \rightarrow P(y))$		X
$\forall x\ \forall y\ (R(x,y,z) \rightarrow \forall x\ R(x,y,z))$	X	
$\neg\exists x\ \forall y\ (Q(x,y) \vee P(y)) \wedge \forall z\ Q(z,y)$		X
$\forall Apfel\ \exists Kuchen(Apfel) \vee \exists Saft(Apfel)$		X
$\exists x \wedge y\ (\forall z\ (R(z,x,y) \leftrightarrow R(z,y,x)))$		X

Aufgabe 10: *10 Punkte*

Allgemeingültig?	ja	nein
$\neg\forall x\ F \leftrightarrow \exists x\ \neg F$	X	
$\neg\forall x\ F \leftrightarrow \neg\exists x\ F$		X
$\neg\forall x\ \neg F \leftrightarrow \neg\exists x\ F$		X
$\forall x\ F \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg F$	X	
$\neg\forall x\ \neg F \leftrightarrow \exists x\ F$	X	
$\forall x\ F \vee \forall x G \leftrightarrow \forall x\ (F \vee G)$		X
$\forall x\ F \vee \forall x\ G \leftrightarrow \forall x\ (F \wedge G)$		X
$(\exists x\ F) \wedge (\exists x\ G) \leftrightarrow \exists x\ (F \wedge G)$		X
$\forall x\ \neg F \leftrightarrow \exists x\ \neg F$		X
$\forall x\ \forall y\ F \leftrightarrow \forall y\ \forall x F$	X	

Aufgabe 11: *8 Punkte*

a) F
$\equiv \forall x\ (\neg\forall y\ (P(y,x) \wedge \exists z\ (R(y,x))))$
$\downarrow$ 1. unter 3.28 (1)
$\equiv \forall x\ (\exists y\ \neg(P(y,x) \wedge \exists z\ (R(y,x))))$
$\downarrow$ de Morgan
$\equiv \forall x\ (\exists y\ (\neg P(y,x) \vee \neg\exists z\ (R(y,x))))$
$\downarrow$ 2. unter 3.28 (1)
$\equiv \forall x\ (\exists y\ (\neg P(y,x) \vee \forall z\ \neg(R(y,x))))$
$\downarrow$ 2. unter 3.28 (2)
$\equiv \forall x\ (\exists y\ (\forall z\ \neg P(y,x) \vee \neg(R(y,x))))$
$\downarrow$ Weglassen von Klammern
$\equiv \forall x\ \exists y\ \forall z\ \neg P(y,x) \vee \neg R(y,x)$

b) Der Kern der Pränexform lautet $\neg P(y,x) \vee \neg R(y,x)$.
Dieser befindet sich bereits in DNF.