Mengen

(8 Punkte)

Gegeben seien die Mengen

$$A =_{def} \{2,4\}$$

$$B =_{def} \{1, 5\}$$

$$C =_{def} \{a, c\}$$

Teil 1 (4 Pkt.):

Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an:

1.
$$(A \times B) \cup C =$$

2.
$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\} \setminus B) =$$

Teil 2 (4 Pkt.):

Bestimmen Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen:

1.
$$|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(C)| =$$

2.
$$|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)| =$$

Relationen

(10 Punkte)

Gegeben sei $M=_{def}\{a,b,c,d\}$ und die Relation

$$R =_{def} \{(a, a), (a, b), (b, c), (d, b), (c, d)\} \subseteq M \times M$$

Teil 1 (5 Pkt.):

Ist R reflexiv? Wenn nein, erweitern Sie R zu einer Relation R_1 (wenn möglich), so dass

- $R \subseteq R_1$
- $R_1 \neq M \times M$ und
- R₁ reflexiv ist

Teil 2 (5 Pkt.):

Ist R symmetrisch? Wenn nein, erweitern Sie R zu einer Relation R_2 (wenn möglich), so dass

- $R \subseteq R_2$
- $R_2 \neq M \times M$ und
- R_2 symmetrisch ist

Aufgabe 3 Ordnungen und Verbände (11 Punkte)

Sei $M =_{def} \{a,b,c,d\}$. Wir betrachten alle Teilmengen von M, die das Element a enthalten, zusammen mit der Teilmengenbeziehung \subseteq . Das ergibt eine Halbordnung.

Teil 1 (6 Pkt.):

Stellen Sie diese Halbordnung als Hasse-Diagramm dar.

Teil 2 (5 Pkt.):

Ist diese Halbordnung auch ein Verband? Wenn nein, warum nicht?

Aussagenlogik

(16 Punkte)

Sei $G =_{def} K_1 \vee \cdots \vee K_n$ eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, das heisst, die K_i sind Konjunktionen von (negierten oder nicht-negierten) aussagenlogischen Variablen und $n \geq 1$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie auf jeden Fall Ihre Antworten. Bei falschen Aussagen geben Sie Gegenbeispiele an.

Teil 1 (5 Pkt.):

"G ist unerfüllbar, wenn es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass K_i unerfüllbar ist."

Teil 2 (5 Pkt.):

"G ist erfüllbar, wenn es ein $i \in \{1, ..., n\}$ gibt, so dass K_i erfüllbar ist."

Teil 3 (6 Pkt.):

"Wenn G unerfüllbar ist, dann tritt jede Aussagenvariable in G sowohl negiert als auch nichtnegiert auf."

Aussagenlogik

(15 Punkte)

Teil 1 (7 Pkt.):

Überführen Sie die folgende Formel in konjunktive Normalform:

$$(\neg B \to A) \land \neg (A \to C)$$

Teil 2 (8 Pkt.):

Konstruieren Sie den Syntaxbaum für die Formel

$$\mathbf{G} =_{def} (A \leftrightarrow (B \vee \neg C)) \vee (\neg A \wedge C)$$

und vervollständigen Sie die Wahrheitstafel.

A	B	C	$\neg C$	$B \vee \neg C$	$A \leftrightarrow (B \vee \neg C)$	$\neg A$	$\neg A \wedge C$	G
T	T	T						
T	T	F						
T	\overline{F}	\overline{T}						
T	\overline{F}	\overline{F}						
F	T	\overline{T}						
F	T	\overline{F}						
F	F	T						
F	F	F						

Aussagenlogik

(12 Punkte)

Geben Sie zu den unten aufgeführten Formeln jeweils eine erfüllende und eine falsifizierende Interpretation an, bzw. begründen Sie, warum keine solche existiert.

Teil 1 (6 Pkt.):
$$G_1 =_{def} ((A \rightarrow B) \land \neg A) \rightarrow \neg B$$

Teil 2 (6 Pkt.):
$$G_2 =_{def} ((A \to B) \land \neg B) \to \neg A$$

Aufgabe 7 Modellieren in Prädikatenlogik (8 Punkte)

Drücken Sie den Sachverhalt

"Kein Kind mag jedes Gemüse, aber jedes Kind mag irgendein Gemüse"

in Prädikatenlogik aus; verwenden Sie die folgenden Prädikate:

kind/1, mag/2, gemüse/1

Dabei ist "mag(x,y)" zu lesen als "x mag y".

Aufgabe 8 Logisches Schließen mit Prädikatenlogik (14 Punkte)

Teil 1 (8 Pkt.):

Zeigen Sie $\exists y \forall x \ P(x,y) \models \forall x \exists y \ P(x,y)$, indem Sie zeigen, dass die Formel

$$\big(\exists y \forall x \ P(x,y)\big) \ \land \ \neg \big(\forall x \exists y \ P(x,y)\big)$$

unerfüllbar ist.

Teil 2 (6 Pkt.):

Geben Sie ein Gegenbeispiel für die umgekehrte Richtung. Das heisst, zeigen Sie, dass

$$\forall x \exists y \ P(x,y) \models \exists y \forall x \ P(x,y)$$

nicht gilt.

Inferenz

(6 Punkte)

Geben Sie an, welche Art der Inferenz in den folgenden Schlüssen benutzt wurde. Welche Schlüsse sind logisch zwingend?

Teil 1 (3 Pkt.):

Für Alfons ist die Klausur zu leicht.

Für Brigitte ist die Klausur zu leicht.

Für Christian ist die Klausur zu leicht.

Die Klausur ist zu leicht.

Teil 2 (3 Pkt.):

Wer Fieber hat, kann nicht arbeiten.

Dieter arbeitet.

Dieter hat kein Fieber.