L Ö S U N G E N

zur Probe–(bzw. Muster–)klausur des Kurses

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

KURS – NRN. 01260 / 01261 / 01262

IM WINTERSEMESTER 2008 / 2009

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Wegen $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ist $\emptyset \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$, d.h. $T^{-1}(A) = A$; es folgt:

$$T^{-1}(A^c) = (T^{-1}(A))^c = A^c,$$

d.h. $A^c \in \mathcal{A}$.

Sei jetzt (A_n) eine Folge in $\mathcal{A}$, d.h.

$$T^{-1}(A_n) = A_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Es folgt:

$$T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ d.h. } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

(b) Sei $A \in \mathcal{A}$, d.h. $T^{-1}(A) = A$. Es folgt

$$T^{-1}(T^{-1}(A)) = T^{-1}(A);$$

also ist $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Dieser File ist ein organisations-notwendiges Phantom !!

Siehe Aufgabenstellung.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Gilt wegen der Stetigkeit der Funktion sin.

(b) Es gilt:

$$|g_k| \leq 1_{\mathbb{R}} \qquad (k \in \mathbb{N}^0),$$

wobei $1_{\mathbb{R}}$ P–integrierbar ist:

$$\int 1_{\mathbb{R}} \, \mathrm{d}P = 1 < \infty .$$

(c) Aufgrund des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz implizieren Teile (a) und (b)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f(t_k) &= \int g_k \, \mathrm{d}P = \int g_0 \, \mathrm{d}P = \\ &= f(t_0) . \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Offenbar ist

$$\pi_1^{-1}(A_1) \;=\; A_1 \times \Omega_2 \,.$$

(b) Es gilt nach Teil (a)

$$\begin{aligned}(P_1 \otimes P_2)_{\pi_1}(A_1) &= (P_1 \otimes P_2)(A_1 \times \Omega_2) \\ &= P_1(A_1) \cdot P_2(\Omega_2) \\ &= P_1(A_1)\end{aligned}$$

wegen der Produktmesseigenschaft. Also ist $(P_1 \otimes P_2)_{\pi_1} \;=\; P_1$.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}(P_1 \otimes \lambda^1)_{\pi_1}(\Omega_1) &= P_1 \otimes \lambda^1(\Omega_1 \times \mathbb{R}) \\ &= P_1(\Omega_1) \cdot \lambda^1(\mathbb{R}) \\ &= \infty \,.\end{aligned}$$