Aufgabe 1

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ eine Abbildung

4 Punkte (a) Betrachtet wird das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,|\, T^{-1}(A) = A\} .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra ist.

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass T $\mathcal{A} - \mathcal{A}$–messbar ist.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie bei den folgenden Behauptungen, ob sie wahr oder falsch sind. Begründungen zu Ihren Antworten sind nicht erforderlich.

2 Punkte (a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W–Raum und $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von P–integrierbaren Funktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f_0 \qquad P - \text{f.ü.}$$

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}P = \int f_0 \, \mathrm{d}P$$

wahr ☐ falsch ☐

2 Punkte (b) Jede Borel–messbare Abbildung

$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

wahr ☐ falsch ☐

2 Punkte (c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$.

Dann ist μ σ–endlich.

wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 3

Sei P ein W–Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$f(t) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \sin(xt)\, \mathrm{d}P(x)$$

definierte Funktion. Es ist zu zeigen, dass f stetig ist. Dazu sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} t_k \;=\; t_0 \,.$$

1 Punkt (a) Begründen Sie die Gültigkeit von

$$\lim_{k\to\infty} \sin(t_k x) \;=\; \sin(t_0 x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \,.$$

2 Punkte (b) Für $k \in \mathbb{N}^0$ sei $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_k(x) \;:=\; \sin(t_k x) \,.$$

Geben Sie eine P–integrierbare Majorante der Funktionenfolge $(g_k)_{k=0}^{\infty}$ an.

3 Punkte (c) Zeigen Sie schließlich die Gültigkeit von:

$$\lim_{k\to\infty} f(t_k) \;=\; f(t_0) \,.$$

Aufgabe 4

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ zwei W–Räume, $i = 1, 2$ und

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \otimes P_2)$$

der Produktraum und $\pi_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1$ die Projektion

$$\pi_1(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 .$$

2 Punkte (a) Sei $A_1 \in \mathcal{A}_1$ beliebig. Bestimmen Sie das Urbild $\pi_1^{-1}(A_1)$.

2 Punkte (b) Bestimmen Sie das Bildmaß $(P_1 \otimes P_2)_{\pi_1}$.

2 Punkte (c) Sei jetzt $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) := (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und λ^1 das Borel–Lebesgue Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Ist das Bildmaß

$$(P_1 \otimes \lambda^1)_{\pi_1}$$

ein W–Maß?

Begründen Sie Ihre Antwort.