mündl. Prüfung
Diskrete Mathematik (1215) und Graphentheorie (1306)

Prüfer: Prof. Hochstättler

Frühjahr 2008

Diskrete Mathematik (1215)

Erzeugende Funktionen
Hier sollte ich zeigen anhand des Beispiels der Fibonaccizahlen (s. Aigner) zeigen, wie man eine Rekursion anhand von erzeugenden Funktionen auflösen kann. Auch $\sum z_n$ als Ansatz der geometrischen Reihe wurde gefragt.

Lateinische Quadrate
Definition de Orthogonalität. Frage ob es für alle Ordnungen N, $N-1$ orthogonale Quadrate gibt. Nein, jedoch für Primzahlpotenzen p^m. (Ausserdem ist die Anzahl der orthogonalen Quadrate ≥ 2, für alle Ordnungen $n \not\equiv 2(mod 4)$). Hier haben wir dann noch die Eulervermutung besprochen.
Gibt es es für nicht Primzahlpotenzen N, $N-1$ orthogonalen Quadrate? Nein. Beweis? Dies wusste ich nicht direkt und ich wurde dann zur Definition projektiver Ebenen und ihren Bedingungen (Anzahl Punkte auf Gerade: $n+1$) und (Anzahl Punkte, Geraden: n^2+n+1) gefragt. Dies ist genau dann möglich, falls die Ordnung n der projektiven Ebene eine Primzahlpotenz ist. Zusammenhang der affinen Ebenen mit projektiven Ebenen? (Entfernung eines Blocks.) Beispiel Fano-Ebene - lassen sich hieraus orthogonale lateinische Quadrate konstruieren? Nein, denn die Ordnung der Fano-Ebene ist 2, also gibt es genau ein lateinisches Quadrat.

Sortieren
Warum lässt sich nicht allgemein schneller als mit $\mathcal{O}(n\, lgn)$ sortieren? Hier wusste ich die Antwort nicht recht und habe mich auf die informationstheoretische Schranke $L(T) \geq \lceil log_q n \rceil$ berufen. Der Beweis über die Konstruktion von $(n, 2)$ Bäumen (wobei die n Blätter die $n!$ möglichen Permutationen sind) brachte dann die gesuchte Antwort.

Graphentheorie (1306)

Euler/Hamilton Graphen
Was wissen sie über Euler- und Hamiltongraphen? Die folgenden Aussagen sind äquivalent für zusammenhängenden Graphen: a) Graph ist eulersch, b) Knotengerade alle gerade sind, c) Graph besteht aus paarweise disjunkten Kreisen. Beweis: c $\Rightarrow$ a Algorithmus zur Konstruktion eines Eulerzug durch einhängen weiterer Kreise in den Zug, bzw. sukessives herausnehmen von Kreisen aus dem Graph. Laufzeit? Linear.
Definition Hamiltongraphen. Was lässt sich über Charakterisierung sagen. Diese ist nicht vollständig möglich wie bei den Eulergraphen, jedoch sind vollständige Graphen und Kreisgraphen hamiltonsch und es gibt ausserdem das Lemma von Bondy-Chvátal. Erläuteren Lemma mit Konstruktion $G+$. Beweis: Konstruktion eines Hamiltonzuges in G aus vollständigem $G+$. Was sind die Korrolare von Ore (Summe Knotengrade nicht-adjazenter Knoten von G stets grösser oder gleich $\geq |V|$) und Dirac (Knotengrad jedes Knotens $\geq |\frac{V}{2}|$ ergibt Hamiltongraph.

Dann interessierte sich Prof. Hochstättler sich noch für den Satz von Moser (dizusammenhängende Turniere sind hamiltonsch), den er gerade im Kurs 1306 entdeckt hatte. Hier sollte dann der Algorithmus zur Konstruktion der Dikreise der Länge n erläutert werden.

Ω_k *bzw. Matchings*
Wann gibt es bedeckende unabhängige Kantenmengen bzw. ein maximales Matching? Für bipartite Graphen folgt dies aus dem Heiratssatz und für allgemeine Graphen aus dem Satz von Tutte (sprich: Tatt). Erläuteren des Satzes von Tutte und anschaulich machen warum das gilt.
Was ist die Komplexität um ω_k zu bestimmen: NP vollständig.

Fazit

In der Prüfung wurden viele Beweise und anschauliche Erklärungen gefragt. Dafür war es auch nicht schlimm, wenn man nicht alles genau wusste, solange man bei Hilfestellungen mitdenken konnte. Auch wurde gerne mal diskutiert, welcher Algorithmus denn nun besser sei und was die Verbindung der verschieden Sätze in der Graphentheorie sind (z.B. Konstruktion Eurlerzüge, maximale Matchings). Alles in allem ging der Zeit sehr angenehm und lehrsam in einer mathematischen Unterhaltung vobei. Dass Prof. Hochstättler keinen Grund zu einem Abzug in der Note sah und die Prüfung mit 1,0 bewertete, überraschte mich am Ende freudig.