Stochastik

Aufgabe 1

1 Punkt a) Seien (Ω_1, P_1) und (Ω_2, P_2) diskrete W-Räume.

(i) Was versteht man unter der W-Funktion w_i von P_i $(i = 1, 2)$?

(ii) Drücken sie die W-Funktion w des Produkt-W-Maßes $P_1 \otimes P_2$ auf $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ durch die W-Funktion w_i von P_i $(i = 1, 2)$ aus!

1 Punkt b) Sei $\Omega = \mathbb{N}_2$, G die Gleichverteilung über Ω und δ_1 das Punkt-W-Maß in $1 \in \Omega$. Die Zufallsvariablen X, Y: $\Omega \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$X(j) = j, \quad Y(j) = 1 \qquad (j = 1, 2)$$

(i) Gilt X = Y G-fast sicher ? (Gleichverteilung) 11.11 / 11.12

(ii) Gilt X = Y δ_1-fast sicher ?

Begründen Sie Ihre Antworten!

1 Punkt c) Sei (Ω, P) ein W-Raum und seien X, Y: $\Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen.
Ergänzen Sie in den folgenden Gleichungen auf sinnvolle Weise den Rechtsterm:

(i) $V(X + Y) = ?$ 12.11.4

(ii) $P_X \otimes P_Y = ?$ 9.1.2

Aufgabe 2

Sei (Ω, P) ein W-Raum, Ω' eine **abzählbare** Menge und X: $\Omega \to \Omega'$ **eine Zufallsvariable.**

1 Punkt a) Was versteht man unter dem Bildmaß P_X von P unter X? 3.8 / 3.9

1,5 Punkt b) Zeigen Sie die **σ-Additivität** von P_X. 4.1.3

0,5 Punkt c) Ergänzen Sie im Fall $\Omega' \subset \mathbb{R}$:

$$E_P(X) = E_{P_X}(\ldots)$$ 11.6.1

Stochastik

Aufgabe 3

Sei (Ω, P) ein W-Raum mit $P(\{\omega\}) > 0$ $(\omega \in \Omega)$.

1 Punkt a) Was versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit von $A \subset \Omega$ unter der Bedingung $B \subset \Omega$? (Def. 6.3.1)

1 Punkt b) Sei $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Zeigen Sie

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) \qquad \text{(Aufgabe 6.7)}$$

1 Punkt c) Sei speziell $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Begründen Sie durch Angabe eines mathematischen Satzes die Gültigkeit von (Satz 6.5)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid \{\omega_i\}) \cdot P(\{\omega_i\}) \qquad (A \subset \Omega)!$$

Stochastik

Aufgabe 4

Sei (Ω, P) ein W-Raum und $X: \Omega \to \mathbf{R}$ eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable.

1 Punkt a) Geben Sie die Tschebyschev-Ungleichung für X wieder. (Satz 13.1)

1 Punkt b) Begründen Sie die Gültigkeit von

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - E(X) \geq t\}) \leq \frac{V(X)}{t^2} \quad (t > 0).$$

$\{\omega \in \Omega / X - E(x) \geq t\} \subset \{\omega \in \Omega / |X - E(x)| \geq t\}$ ⇒ wg Monotonie von P und Tschebyscheff die Behauptung

1 Punkt c) Es gelte $c > E(X)$. Zeigen Sie durch spezielle Wahl von t in (b) die Gültigkeit der Ungleichung

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq c\}) \leq \frac{V(X)}{(c - E(X))^2}$$

$t := c - E(x) \Rightarrow c = t + E(x)$

Hinweis zu (b): Beachten Sie

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - E(X) \geq t\} \subset \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - E(X)| \geq t\}$$