Klausur vom 2008-02-23 Kurs 1183

Teil 1 (Numerik)

Aufgabe 1:
Es sei $f : \mathbb{R} \times]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_2^2 \cdot \exp(x_1)}.$$

i) Berechnen Sie die Empfindlichkeit σ_2 des Resultats in Bezug auf die 2-te Komponente des Datenvektors. 5 Punkte

ii) Berechnen Sie die Konditionszahl κ_2 des Resultats in Bezug auf die 2-te Komponente des Datenvektors. 5 Punkte

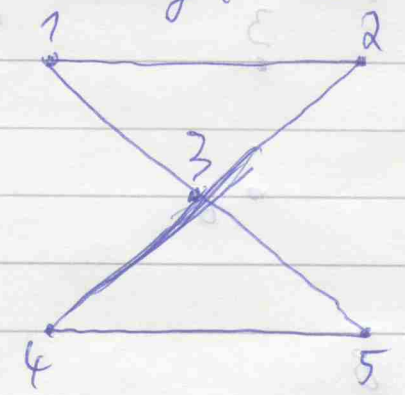
Aufgabe 2:

a) Das Polynom $q \in \Pi_5$ sei definiert durch
$$q(x) := T_5(x) - 2\,T_4(x) + T_2(x) - T_1(x) - 3\,T_0(x),$$
wobei die T_i die Čebyšev-Polynome 1. Art seien. Berechnen Sie den Wert $q(-\frac{1}{2})$ mit Hilfe des Clenshaw-Algorithmus. 5 Punkte

b) Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der positiv definierten Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ -8 & 17 & -2 \\ 2 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$
5 Punkte

Aufgabe 3:

a) Geben Sie die zu folgendem Graphen gehörende Adjazenzmatrix an:

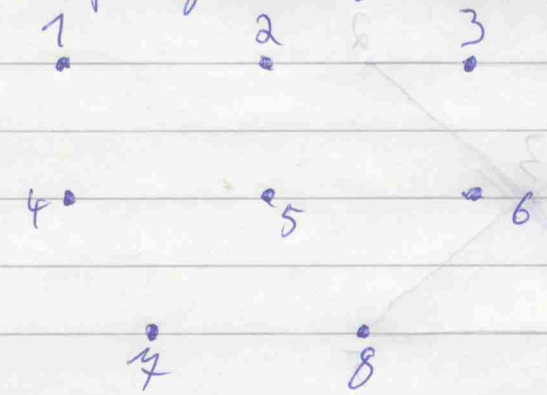


2 Punkte

b) Gegeben sei eine positiv definite Matrix mit folgendem Besetzungsmuster:

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
* & * & & * & * & & & \\
* & * & * & * & & * & & \\
 & * & * & & * & * & & \\
* & * & & * & & & & * \\
* & & * & & * & & & \\
 & * & * & & & * & * & \\
 & & & & & * & * & \\
 & & & * & & & & *
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}
$$

i) Wie sieht der zu diesem Besetzungsmuster gehörende Graph aus? Tragen Sie die Kanten in folgende Knotenanordnung ein. 1 Punkt



ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von Schichtungen, ausgehend von Knoten 5, einen pseudo-peripheren Knoten. 3 Punkte

iii) Führen Sie, mit Knoten 7 startend, den Cuthill-McKee Algorithmus durch. 4 Punkte

Teil II (Stochastik)

Aufgabe 1.

Seien (Ω, P) ein W-Raum und $A, B \subset \Omega$ mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$.

a) Geben Sie die Definitionen der folgenden bedingten Wahrscheinlichkeit wieder

$P(A|B) =$ _____

$P(B|A) =$ _____ 2 Punkte

b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) die Behauptung

$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$ 2 Punkte

c) Sei $C \subset \Omega$ mit $P(B \cap C) > 0$. Zeigen Sie

$P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C)$ 2 Punkte

Aufgabe 2:

Sei $\Omega = \Omega' = \mathbb{N}_5$. Auf $(\Omega, P(\Omega)) = (\mathbb{N}_5, P(\mathbb{N}_5))$ sei das W-Maß P folgendermaßen gegeben:

$P(\{1\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{5}$,
$P(\{4\}) = \frac{1}{20}$ und $P(\{5\}) = \frac{1}{5}$.

Weiterhin sei $X : \Omega \to \Omega'$ gegeben durch die folgende Tabelle:

ω	1	2	3	4	5
$X(\omega)$	4	1	4	2	1

Ziel ist nun die Bestimmung des Bildmaßes P_X. Dies wird zweckmäßigerweise durch Angabe von $P_X(\{i\})$, $i = 1, 2, \ldots, 5$ geschrieben.

a) Ergänzen Sie dazu

$P_X(\{i\}) = P(\underline{\qquad\qquad\qquad})$ $(i \in \Omega)$.

3 Punkte

b) Bestimmen Sie nun für das oben definierte W-Maß P und die ZV X die Werte.

$P_X(\{1\}) =$ _____ $P_X(\{2\}) =$ _____

$P_X(\{3\}) =$ _____ $P_X(\{4\}) =$ _____

$P_X(\{5\}) =$ _____

3 Punkte

Aufgabe 3:

Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum und $X: \Omega \to \mathbb{R}$ eine ZV mit existierender Varianz.

a) Definieren Sie die Varianz

$V(X) := \underline{\qquad\qquad\qquad}$ 2 Punkte

und beweisen Sie den Verschiebungssatz

$V(X) =$ 2 Punkte

b) Was lässt sich über die ZV X sagen, wenn insbesondere $V(X) = 0$ ist.

Dann gilt:

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$. 2 Punkte