Hauptklausur SS2003 Mathe II 1182 16.08.2003

Aufgabe 1

1 Punkt (a) (i) Formulieren Sie die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$.

1 Punkt (ii) Wie lautet der Satz von Archimedes?

(b) Geben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung von möglichst wenigen Intervallen an.

3 Punkte (i) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 - 1 > \dfrac{15}{1+(x+1)^2}\}$,

5 Punkte (ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| < |4x-6|\}$.

(Begründen Sie Ihre Antworten.)

Aufgabe 2

1 Punkt (a) Wie lautet das ε-n_0-Kriterium für konvergente reelle Folgen?

(b) Untersuchen Sie, ob die Folge

2 Punkte (i) (a_n) mit $a_n := \dfrac{10n^2+1}{(n+1)(2+5n)}$

2 Punkte (ii) (b_n) mit $b_n := \cos^n(\dfrac{n\pi}{2})$

konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

2 Punkte (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\log(\frac{n+1}{n})$

3 Punkte (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(Begründen Sie Ihre Angaben!)

Aufgabe 3

2 Punkte (a) Seien $a \in D \subset R$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Wann heißt f stetig im Punkt a?

(b) Untersuchen Sie (mit Begründung) in welchen Punkten die folgenden Abbildungen stetig sind:

3 Punkte (i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{|x+1|}$

5 Punkte **(ii)** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & \text{falls } x < 0, \\ -1 + |x|, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

Aufgabe 4

2 Punkte **(a)** Wie lautet der 1. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung?

(b) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

2 Punkte **(i)** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := x^3 \sin x$

3 Punkte **(ii)** $g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := \cos(\log(x^2))$

3 Punkte **(iii)** $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) := \dfrac{(1+x)^2}{e^x}$.

Aufgabe 5

2 Punkte **(a)** Seien $a \in \mathbb{R}$ und $(a_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wie ist der Konvergenzradius r für die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ definiert?

4 Punkte **(b)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^n x^n.$$

4 Punkte **(c)** Bestimmen Sie für die Funktion

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := x^3 + \frac{48}{x} \quad \text{für } x \in]0, \infty[$$

alle lokalen Extrema, sowie Minimum und Maximum von f auf $[3, 4]$.

(Begründen Sie Ihre Aussagen.)

Aufgabe 6

2 Punkte **(a)** Wann heißt eine Funktion $f \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$, I ein nichtleeres, beschränktes Intervall, Riemann-integrierbar?

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

4 Punkte **(i)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$

4 Punkte **(ii)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x} dx$.